第 20 卷　第 1 期
2015 年 1 月

集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University (Natural Science)

Vol. 20　No. 1
Jan.　2015

［文章编号］1007－7405(2015)01－0071－05

食饵染病生态流行病系统的稳定性与最优收获

吉学盛，毛兴宇

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］讨论了一类在食饵种群中带有传染病结构的捕食－食饵模型，确定了各平衡点存在的阈值条件．利用特征根法、Hurwitz 判别法和 Lyapunov-LaSalle 不变集法，得到了各个平衡点稳定性的结论以及在满足正平衡态全局稳定条件下的最优收获策略.

［关键词］捕食－食饵系统；平衡点；稳定性；最优收获

［中图分类号］O 175.13　　　　［文献标志码］A

The Stability of Eco-epidemiological Model with Infected Prey and Optimal Harvesting

JI Xue-sheng，MAO Xing-yu

（School of Science，Jimei University，Xiamen 361021，China）

Abstract：An epidemic model of a predator-prey system with infectious disease in the prey population was discussed. The conditions and threshold to the existence of various equilibriums were established. By using the characteristic root method，Hurwitz criterion and Lyapunov-LaSalle invariant set theorem，the stable results of various equilibriums and optimal harvesting based on the global stability of the positive equilibriums were obtained.

Key words：prey-predator model；equilibrium；stability；optimal harvesting

0　引言

自 1986 年以来，相关文献先后讨论了疾病在食饵中传播的捕食－食饵模型：文献［1－2］研究了疾病在食饵中流行的简单情况；文献［3］就标准发生率研究了疾病仅在食饵中传播的捕食模型，并得到了一些控制种群规模的条件；Chattopadhyay 等在文献［4］中研究了食饵有病的 SI 模型，这个模型假定捕食者大部分吃有病的食饵，没有考虑遗传因素、恢复率和吃有病食饵对捕食者自身的影响；有人在文献［5－11］中比较深入地研究了食饵有病的 SI 模型，其中文献［6］的模型是：

$$\begin{cases} \mathrm{d}S/\mathrm{d}t = rS(1-(S+I)/K)-\beta SI, \\ \mathrm{d}I/\mathrm{d}t = \beta SI - cI - \bar{\eta} yI, \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = y(-d+k\bar{\eta} I). \end{cases} \tag{1}$$

其中：S 和 I 分别表示易感食饵和染病食饵种群；y 表示捕食者种群；K 是环境最大容纳量；β 和 $\bar{\eta}$ 分

［收稿日期］2014－04－18　　　［修回日期］2014－08－21
［基金项目］福建省自然科学基金资助项目（2011J01014）
［作者简介］吉学盛（1985—），男，硕士生，从事生物数学研究．通讯作者：毛兴宇（1963—），男，教授，博士，从事导电聚合物、纳米材料、磁性材料研究，E-mail：maoxingyu@jmu.edu.cn.

别表示常值转化率和捕食率；k 表示捕食者因捕食食饵而增加自身种群繁殖能力的转化率；c 和 d 分别表示染病食饵和捕食者的死亡率.

但是由于环境容量的限制，当易感食饵达到环境的最大容纳量之后，此时会限制易感食饵的增长，所以本文讨论就易感食饵进行适当的收获，尽可能让易感食饵有足够的空间生长，以能满足人们的实际需求. 为此，本文考虑具有食饵染病的生态流行病系统及收获问题的模型，并假设如下：捕食者种群记为 y，食饵种群被分为两部分：易感者 S 和染病者 I，已感者不具备生育能力. 依照上述假设，建立模型如下：

$$\begin{cases} \mathrm{d}S/\mathrm{d}\bar{t} = rS(1-(S+I)/K) - \beta SI - \xi S, \\ \mathrm{d}I/\mathrm{d}\bar{t} = \beta SI - r_1 I - e_1 yI, \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}\bar{t} = y(-d + l_2 I). \end{cases} \tag{2}$$

其中：$r, K, \beta, \xi, r_1, e_1, d$ 和 l_2 都是正常数；r 表示食饵种群的出生率；K 表示环境的容纳量；β 和 l_2 表示常值转化率；ξ 表示人为对易感食饵的收获程度；r_1 和 d 分别表示染病者和捕食者的死亡率；e_1 表示捕食者的捕食能力.

为了方便起见，对模型（2）作无量纲化代换，令 $N(\mathrm{t}) = S(\bar{t})/K, P(t) = I(\bar{t})/K, Q(t) = y(\bar{t})/K, t = r\bar{t}$. 那么，系统（2）可化为：

$$\begin{cases} N'(t) = N(t)[1-(N(t)+P(t)+aP(t)+b)], \\ P'(t) = P(t)(aN(t) - mQ(t) - c), \\ Q'(t) = Q(t)(-n + lP(t)). \end{cases} \tag{3}$$

其中：$a = \beta K/r$；$b = \xi/r$；$c = r_1/r$；$m = e_1 K/r$；$n = d/r$；$l = l_2 K/r$.

本文主要研究系统（3）的解的非负性、有界性、平衡态的局部稳定性、正平衡态的存在性和全局稳定性以及对易感食饵在正平衡态下的最优收获量.

1　系统（3）解的正性和有界性

定理 1　令 $X(t) = (N(t), P(t), Q(t))^{\mathrm{T}}$ 是系统（3）的任意解，如果 $N(0) > 0$，$P(0) > 0$ 和 $Q(0) > 0$ 成立，则 $N(t) > 0$，$P(t) > 0$，$Q(t) > 0$ 对于 $t \geqslant 0$ 都成立.

证明　由系统（3）的第 1 个等式，得到：$N(t) = N(0)\exp(\int_0^t (1-(N(T)+P(T)+aP(T)+b))\mathrm{d}T)$. 由于 $N(0) > 0$，$\exp(\int_0^t (1-(N(T)+P(T)+aP(T)+b))\mathrm{d}T) > 0$，所以 $N(t) > 0$ 对于 $t \geqslant 0$ 都成立.

同样，由系统（3）的第 2 个等式，得到：$P(t) = P(0)\exp(\int_0^t ((aN(T) - mQ(T) - c)\mathrm{d}T)$. 由于 $P(0) > 0$，$\exp(\int_0^t ((aN(T) - mQ(T) - c)\mathrm{d}T) > 0$，所以 $P(t) > 0$ 对于 $t \geqslant 0$ 都成立.

由系统（3）的第 3 个等式，得到：$Q(t) = Q(0)\exp(\int_0^t (-n + lP(T))\mathrm{d}T)$. 由于 $Q(0) > 0$，$\exp(\int_0^t (-n + lP(T))\mathrm{d}T) > 0$，所以 $Q(t) > 0$ 对于 $t \geqslant 0$ 都成立，证毕.

定理 2　系统（3）所有的解都是有界的.

证明　设 $(N(t), P(t), Q(t))$ 是系统（3）的任意解，当 $t \geqslant 0$，均有 $N(t) > 0$，$P(t) > 0$，$Q(t) > 0$，由系统（3）的第一个等式容易推出 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) \leqslant 1$，令 $V(t) = al/(1+a)N(t) + lP(t) + mQ(t)$，则：$V'(t) = al/(1+a)N(t)(1-N(t)-P(t)-aP(t)-b) + lP(t)(aN(t)-mQ(t)-c) + mQ(t)(-n+lP(t)) = al/(1+a)(N(t)-bN(t)-N^2(t)) - clP(t) - nmQ(t) \leqslant alN(t)/(1+a) -$

$clP(t) - nmQ(t) = 2al/(1+a)N(t) - (al/(1+a)N(t) + clP(t) + nmQ(t)) \leqslant 2al/((1+a)\delta) - \delta V(t)$. 其中 $\delta = \min(1,c,n)$，于是由比较定理得：$V(t) \leqslant 2al/((1+a)\delta) + V(0)e^{-\delta t} \to 2al/((1+a)\delta)(t\to\infty)$，由此证毕.

2　平衡点和局部稳定性

首先，系统（3）可以有如下非负平衡态：$E_0 = (0,0,0)$，$E_1 = (1-b,0,0)$，$E_2 = (c/a,(1-c/a-b)/(1+a),0) \triangleq (\bar{N},\bar{P},\bar{Q})$，$E_3 = (N^*,P^*,Q^*)$，其中：$N^* = 1-((1+a)n/l+b)$，$P^* = n/l$，$Q^* = a(1-((1+a)n/l+b+c/a))/m$. 如果 $c/a+b \triangleq R_{02} < 1$，系统（3）有平衡态 E_0,E_1,E_2；如果 $b \triangleq R_{01} > 1$，系统（3）有平衡态 E_0；如果 $b \triangleq R_{01} < 1, c/a+b \triangleq R_{02} > 1$，系统（3）有平衡态 E_0,E_1；如果 $c/a+b+(1+a)n/l < 1$，系统（3）有平衡态 E_0,E_1,E_2,E_3. 称 E_1 为捕食与疾病灭绝平衡态，E_2 为捕食灭绝平衡态，E_3 为地方病平衡态.

其次，考虑平衡点的局部稳定性，设系统（3）的平衡态为 $(\bar{N},\bar{P},\bar{Q})$，其 Jacobi 矩阵为：

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1-2\bar{N}-\bar{P}-a\bar{P}-b & -\bar{N}-a\bar{N} & 0 \\ a\bar{P} & a\bar{N}-m\bar{Q}-c & -m\bar{P} \\ 0 & l\bar{Q} & -n+l\bar{P} \end{pmatrix}.$$

其特征多项式为：

$$|\lambda E - \boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \lambda-(1-2\bar{N}-\bar{P}-a\bar{P}-b) & \bar{N}+a\bar{N} & 0 \\ -a\bar{P} & \lambda-(a\bar{N}-m\bar{Q}-c) & m\bar{P} \\ 0 & -l\bar{Q} & \lambda-(-n+l\bar{P}) \end{vmatrix}.$$

定理 3　ⅰ）当 $R_{01} < 1$ 时，E_0 是鞍点；当 $R_{01} \geqslant 1$ 时，E_0 是稳定的结点；ⅱ）当 $R_{01} < 1$ 且 $R_{02} > 1$ 时，E_1 是稳定的结点；当 $R_{01} > 1$，E_1 是鞍点；ⅲ）当 $c/a+b+(1+a)n/l < 1$ 即正平衡态存在时，E_2 是鞍点；当 $R_{02} \geqslant 1$ 时，E_2 是稳定的结点或焦点.

证明　当 $(\bar{N},\bar{P},\bar{Q}) = (0,0,0)$，$|\lambda E - \boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \lambda-(1-b) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+n \end{vmatrix}$，当 $R_{01} < 1$ 时，$\lambda_1 = (1-b) > 0$，知平衡态 E_0 是鞍点；当 $R_{01} \geqslant 1$ 时，平衡态 E_0 是稳定的结点；当 $(\bar{N},\bar{P},\bar{Q}) = (1-b,0,0)$，$|\lambda E - \boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \lambda-(b-1) & (1+a)(1-\mathrm{b}) & 0 \\ 0 & \lambda-a(1-(b+c/a) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+n \end{vmatrix}$，当 $R_{01} < 1$ 且 $R_{02} > 1$，知平衡态 E_1 是稳定的结点，当 $R_{01} > 1$ 平衡态 E_1 是鞍点；当 $\bar{N},\bar{P},\bar{Q}) = (c/a,(a-c-ab)/a(1+a),0)$，$|\lambda E - \boldsymbol{J}| = \begin{vmatrix} \lambda+c/a & c(1+a)/a & 0 \\ -(a-c-ab)/(1+a) & \lambda & m(1-c/a-b)/(1+a) \\ 0 & 0 & \lambda-(-n+l(1-c/a-b)/(1+a)) \end{vmatrix} = (\lambda-(-n+l(1-c/a-b)/(1+a)))(\lambda^2+c/a\lambda+c(1-c/a-b)) = 0$，在方程 $(\lambda^2+c/a\lambda+c(1-c/a-b)) = 0$ 中，$\lambda_1+\lambda_2 = -c/a < 0, \lambda_1\lambda_2 = c(1-c/a-b) > 0$，则 λ_1,λ_2 均为负. 因此，当 $c/a+b+(1+a)n/l < 1$，即正平衡态存在时，E_2 是鞍点；当 $R_{02} \geqslant 1$ 时，E_2 是稳定的结点或焦点.

定理 4　如果 $c/a+b+(1+a)n/l < 1$ 且 $c+b+(1+a)n/l < 1$，系统（3）的地方病平衡态 $E_3 = (N^*,P^*,Q^*)$ 是局部渐近稳定的.

证明 平衡态 E_3 的特征方程为：$(\lambda - p_1)(\lambda^2 - p_4p_5) + p_2(-\lambda p_3) = 0$，其中：$p_1 = -(l-(1+a)n-bl)/l$，$p_2 = -(1+a)(l-(1+a)n-bl)/l$，$p_3 = an/l$，$p_4 = -mn/l$，$p_5 = (a(l-(1+a)n-bl)-cl)/m$．令 $a_1 = -p_1, a_2 = -(p_2p_3 + p_4p_5)$，$a_3 = p_1p_4p_5$，则 $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$．$H_1 = a_1 = 1-((1+a)n+bl)/l > 0$，$H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = p_1(p_2p_3 + p_4p_5) - p_1p_4p_5 = p_1p_2p_3 = (1+a)((l-(1+a)n-bl)/l)^2(an/l) > 0$，$H_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3 = p_1^2p_2p_3p_4p_5 = (1-((1+a)n+bl)/l)^2(-(1+a)(1-((1+a)n+bl)/l)(an/l)(-mn/l)(a(l-(1+a)n-bl)-cl)/m > 0$．则由 Hurwitz 判别法知，特征根的实部均为负的，所以地方病平衡态 E_3 局部渐近稳定.

3 全局稳定性

本节中，利用构造合适的 Lyapunov 函数，将证明在一定条件下，地方病平衡态 (N^*, P^*, Q^*) 的全局渐近稳定性.

定理 5 如果 $c/a + b + (1+a)n/l < 1$，则地方病平衡态 E_3 是全局渐近稳定的.

证明 设 $\alpha = 1, \beta = (1+a)/a, \gamma = m(1+a)/(al)$，首先在 R_3^+ 上定义 Lyapunov 函数：

$V(t) = \alpha(N(t) - N^* - N^*\ln(N(t)/N^*)) + \beta(P(t) - P^* - P^*\ln(P(t)/P^*)) + \gamma(Q(t) - Q^* - Q^*\ln(Q(t)/Q^*)$，

$V'(t) = \alpha(N-N^*)N'/N + \beta(P-P^*)P'/P + \gamma(Q-Q^*)Q'/Q = \alpha(N-N^*)/N(N(1-N-P-aP)) + \beta(P-P^*)/P(P(aN-mQ-c)) + \gamma(Q-Q^*)/Q(Q(lP-n)) = \alpha(N-N^*)(N^*-N+(1+a)(P^*-P) + \beta(P-P^*)(a(N-N^*)+m(Q^*-Q)) + \gamma(Q-Q^*)l(P-P^*) = -\alpha(N-N^*)^2 + (\alpha(1+a)-\beta a)(N-N^*)(P^*-P) + (\beta m - \gamma l)(Q^*-Q)(P-P^*)$.

注意到 $\alpha = 1, \beta = (1+a)/a, \gamma = m(1+a)/(al)$，因此得到：$V'(t) = -(N-N^*)^2 \leqslant 0$．当且仅当 $N(\mathrm{t}) = N^*$，$V'(t) = 0$，由 Lasalle 不变集原理得到 E_3 是吸引的，从而 E_3 是全局渐近稳定的.

4 最优收获问题

本部分讨论最优收获问题，系统（3）是仅收获易感食饵种群. 如果系统（3）满足定理 5 的条件，得到系统（3）的正平衡点为 (N^*, P^*, Q^*)，其中：$N^* = 1-((1+a)n+bl)/l$，$P^* = n/l$，$Q^* = a(l-(1+a)n-bl)-cl/(ml)$．把 $Y_1 = bN^*$ 看作收获程度 b 目标函数，由系统（3）的第一个等式得：$Y_1 = bN^* = N^*(1-N^*-P^*-aP^*)$ 且 $P^* = n/l$．因此 $Y_1 = bN^* = N^*(1-N^*-n/l-an/l)$，为了获得系统（3）的最大持续产量，需要满足下列条件：$\mathrm{d}Y_1/\mathrm{d}N^* = 1-2N^*-(1+a)n/l = 0$；易感食饵种群的最优生存量为 $N^* = (l-(1+a)n)/2l$，其最大的持续产量为 $Y_1^* = (l-(1+a)n)^2/(4l^2)$.

5 结论

本文分析了食饵种群中带有传染病结构的捕食－食饵模型，讨论了系统解的正性和有界性，边界平衡态的性质及地方病平衡态的全局稳定性. 得到了疾病流行与否的两个阈值条件 R_{01} 和 R_{02}，且当 $R_{01} \geqslant 1$ 时，捕食者与食饵种群全都灭绝；当 $R_{01} < 1$ 且 $R_{02} > 1$ 时，无病平衡点全局渐近稳定；$R_{02} \geqslant 1$ 时，地方病平衡点全局渐近稳定，从而疾病流行. 同时得出了正平衡态下的最大持续产量，即当 $N^* = (l-(1+a)n)/2l$，最大持续产量为 $Y_1^* = (l-(1+a)n)^2/(4l^2)$.

[参 考 文 献]

[1] ANDERSON R M, MAY P M. The invasion, persistence, and spread of infection diseases within animal and plant communities [J]. Phil Trans R Soc, 1986(314): 533-570.

[2] VENTURINO E. The influence of diseases on Lotka-Volterra system [J]. Rockymount J Math, 1994(24): 389-402.

[3] VENTURINO E. Epidemics in predator-prey models: disease in the prey [C] //ARINO O, AXELRODO, KIMMELM, et al. Mathematical Population Dynamics: Analysis of Heterogeneity. Winnipeg: Wuerz Publishing, 1995: 381-393.

[4] CHATTOPADHYAY J, ARINO O. A predator-prey model with disease in the prey [J]. Nonlinear Anal, 1999(36): 749-766.

[5] XIAO Y N, CHEN L S. Analysis of three species eco-epidemiological model [J]. J Math Appl, 2001(258): 733-754.

[6] 宋新宇，肖燕妮，陈兰荪. 具有时滞的生态 - 流行病模型的稳定性和 Hopf 分支 [J]. 数学物理学报，2005，25A(1): 57-66.

[7] XIAO Y N, CHEN L S. Modeling and analysis of a predator-prey model with disease in the prey [J]. Math Biosci, 2001(171): 59-82.

[8] HETHCOTE H W. Four predator-prey models with infectious disease [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2001, 34: 849-858.

[9] 陈晓鹰，朱婉贞. 具有 Holling 功能性反应的捕食 - 食饵种群 SIS 模型定性分析 [J]. 厦门大学学报：自然科学版，2005，44(1): 16-19.

[10] 韩丽涛，原三领，马之恩. 两种群相互竞争的 SIRS 传染病模型的稳定性 [J]. 生物数学学报，2003，18(1): 21-26.

[11] 张靖，宋燕，詹丽. 食饵具有流行病的捕食 - 被捕食（SI）模型的分析 [J]. 渤海大学学报：自然科学版，2008，29(2): 173-176.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）