

# $L$ -fuzzy 保序算子空间的 $\omega\delta$ -导集

黄朝霞

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究了  $L$ -fuzzy 保序算子空间的  $\omega\delta$ -导集问题. 利用  $L$ -fuzzy 保序算子空间的  $\omega\delta$ -远域和  $\omega\delta$ -聚点等概念, 系统讨论了  $L$ -fuzzy 保序算子空间的  $\omega\delta$ -导集的特征性质.

[关键词]  $L$ -fuzzy 保序算子空间;  $\omega\delta$ -远域;  $\omega\delta$ -聚点;  $\omega\delta$ -导集

[中图分类号] O 189.13

[文献标志码] A

## The $\omega\delta$ -derived Set on an $L$ -fuzzy Order-preserving Operator Space

HUANG Zhao-xia

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** The properties of the  $\omega\delta$ -derived set on an  $L$ -fuzzy order-preserving operator space are discussed. By using the concepts of the  $\omega\delta$ -remote neighborhood and the  $\omega\delta$ -accumulation point on an  $L$ -fuzzy order-preserving operator, some characterizations of the  $\omega\delta$ -derived set are given, such as hereditarity.

**Key words:**  $L$ -fuzzy order-preserving operator;  $\omega\delta$ -remote neighborhood;  $\omega\delta$ -accumulation point;  $\omega\delta$ -derived set

## 0 引言

在拓扑空间理论中, 导集有着自身的特征性质. 1988年, 文献[1]引进了远域的概念并由此建立了连通性、可数性、分离性等拓扑空间理论, 研究了导集的若干性质. 2002年, 文献[2]引进了  $L$ -fuzzy 保序算子空间, 并在此空间上定义了  $\omega$ -远域等概念. 随后, 文献[3-6]分别研究了  $L$ -fuzzy 保序算子空间的  $\omega$ -可数性、 $\omega$ -分离性、 $\omega$ -导集及  $\omega$ -连通性等性质, 而文献[7-8]分别研究了  $L$ -fuzzy 保序算子空间的  $\omega\theta$ -连通性及  $\omega\delta$ -连通性等性质. 本文在这一系列文献研究工作的基础上, 讨论了  $L$ -fuzzy 保序算子空间中  $\omega\delta$ -导集的性质.

## 1 预备知识

文中,  $L$ 表示模糊格,  $M$ 表示  $L$ 上所有非零不可约元素(即分子<sup>[1]</sup>)的全体所组成的集合,  $X$ 表示非空分明集,  $L^X$ 表示  $X$ 上的全体  $L$ -fuzzy 集.  $A'$ 表示  $A$ 的伪补.  $1_X$ 和  $0_X$ 分别表示  $L^X$ 中的最大元和最小元. 记  $M^*(L^X) = \{x_\alpha | x \in X, \alpha \in L\}$ . 其余符号皆可在参考文献中找到.

**定义 1**<sup>[2]</sup> 设  $X$  为一个非空集合,  $\omega: L^X \rightarrow L^X$  为满足下列条件的算子: 1)  $\omega(1_X) = 1_X$ ; 2)  $\forall A, B \in L^X$  且  $A \leq B$ , 有  $\omega(A) \leq \omega(B)$ ; 3)  $\forall A \in L^X$ , 有  $A \leq \omega(A)$ , 则称  $\omega$  为  $L$ -fuzzy 保序算子. 如果  $A = \omega(A)$ , 则称  $A$  为  $L^X$  中的  $\omega$ -集. 记  $\Omega = \{A \in L^X \mid A = \omega(A)\}$ , 称序对  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间. 当  $L = [0, 1]$  时, 称为  $F$  保序算子空间.

**定义 2**<sup>[2]</sup> 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间,  $x_\alpha \in M^*(L^X)$ ,  $P \in L^X$ . 1) 如果存在  $Q \in \Omega$ , 使得  $x_\alpha \not\leq Q$  且  $P \leq Q$ , 则称  $P$  为分子  $x_\alpha$  的一个  $\omega$ -远域, 记  $\omega\eta(x_\alpha)$  为  $x_\alpha$  的所有  $\omega$ -远域构成的集族; 2) 如果  $A \in L^X$ , 且  $\forall P \in \omega\eta(x_\alpha)$ , 有  $A \not\leq P$ , 则称  $x_\alpha$  为  $A$  的  $\omega$ -附着点.  $A$  的所有  $\omega$ -附着点之并称为  $A$  的  $\omega$ -闭包, 记作  $\omega cl(A)$ . 如果  $A = \omega cl(A)$ , 则称  $A$  为  $(L^X, \Omega)$  中的  $\omega$ -闭集. 记  $\omega c(L^X)$  为  $L^X$  中的所有  $\omega$ -闭集构成的集族. 显然,  $\omega cl(A) = \bigwedge \{G \in L^X \mid A \leq G, G \in \omega c(L^X)\}$ . 如果  $A$  为  $(L^X, \Omega)$  中的  $\omega$ -闭集, 则称  $A'$  为  $(L^X, \Omega)$  中的  $\omega$ -开集. 记  $\omega o(L^X)$  为  $L^X$  中的所有  $\omega$ -开集构成的集族. 记  $\omega int(A) = \bigvee \{B \in L^X \mid B \leq A, B \in \omega o(L^X)\}$ , 称之为  $A$  的  $\omega$ -内部. 显然,  $A$  为  $\omega$ -开集当且仅当  $A = \omega int(A)$ . 如果  $Q \in L^X$  是  $\omega$ -闭集且满足  $x_\alpha \not\leq Q$ , 则称  $Q$  为  $x_\alpha$  的一个  $\omega$ -闭远域, 记  $\omega\eta^-(x_\alpha)$  为  $x_\alpha$  的所有  $\omega$ -闭远域构成的集族.

## 2 $L$ -fuzzy 保序算子空间中 $\omega\delta$ -导集的性质

**定义 3** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间,  $x_\alpha \in M^*(L^X)$ ,  $P \in L^X$ . 1) 如果存在  $Q \in \Omega$ , 使得  $x_\alpha \not\leq \omega cl(\omega int(Q))$  且  $P \leq Q$ , 则称  $P$  为分子  $x_\alpha$  的一个  $\omega\delta$ -远域, 记  $\omega\delta\eta(x_\alpha)$  为  $x_\alpha$  的所有  $\omega\delta$ -远域构成的集族; 2) 设  $A \in L^X$ , 如果  $\forall P \in \omega\delta\eta(x_\alpha)$ , 有  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P))$ , 则称  $x_\alpha$  为  $A$  的  $\omega\delta$ -附着点.  $A$  的所有  $\omega\delta$ -附着点之并称为  $A$  的  $\omega\delta$ -闭包, 记作  $\omega\delta cl(A)$ . 如果  $A = \omega\delta cl(A)$ , 则称  $A$  为  $(L^X, \Omega)$  中的  $\omega\delta$ -闭集. 记  $\omega\delta c(L^X)$  为  $L^X$  中的所有  $\omega\delta$ -闭集构成的集族. 如果  $A$  为  $(L^X, \Omega)$  中的  $\omega\delta$ -闭集, 则称  $A'$  为  $(L^X, \Omega)$  中的  $\omega\delta$ -开集. 记  $\omega\delta o(L^X)$  为  $L^X$  中的所有  $\omega\delta$ -开集构成的集族. 如果  $Q \in L^X$  是  $\omega\delta$ -闭集且满足  $x_\alpha \not\leq \omega cl(\omega int(Q))$ , 则称  $Q$  为  $x_\alpha$  的一个  $\omega\delta$ -闭远域, 记  $\omega\delta\eta^-(x_\alpha)$  为  $x_\alpha$  的所有  $\omega\delta$ -闭远域构成的集族.

显然,  $A$  的  $\omega$ -附着点必为  $A$  的  $\omega\delta$ -附着点,  $A$  的  $\omega$ -远域 (闭远域) 必为  $A$  的  $\omega\delta$ -远域 (闭远域).

**定义 4** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间,  $A \in L^X$ ,  $x_\alpha \in M^*(L^X)$ . 如果: 1)  $x_\alpha$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -附着点; 2)  $x_\alpha \not\leq A$ , 或  $x_\alpha \leq A$  且  $\forall P \in \omega\delta\eta(x_\alpha)$  以及对  $A$  中每个包含  $x_\alpha$  的分子  $x_\lambda$ , 有  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\lambda$ , 则称  $x_\alpha$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点, 而称  $A$  的一切  $\omega\delta$ -聚点之并为  $A$  的  $\omega\delta$ -导集, 记作  $\omega\delta d(A)$ .

**定理 1** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间, 则  $\forall A \in L^X$ , 有  $\omega\delta cl(A) = A \vee \omega\delta d(A)$ .

**证明** 由定义 4 知  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点必为  $A$  的  $\omega\delta$ -附着点, 即  $\omega\delta d(A) \leq \omega\delta cl(A)$ , 又显然  $A \leq \omega\delta cl(A)$ , 故  $A \vee \omega\delta d(A) \leq \omega\delta cl(A)$ . 反过来, 设任意  $x_\alpha \leq \omega\delta cl(A)$ . 如果  $x_\alpha \leq A$ , 则显然  $\omega\delta cl(A) \leq A \vee \omega\delta d(A)$ ; 如果  $x_\alpha \not\leq A$ , 则由定义 4 知  $x_\alpha$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点, 即  $x_\alpha \leq \omega\delta d(A)$ , 于是有  $\omega\delta cl(A) \leq A \vee \omega\delta d(A)$ , 这就证明了  $\omega\delta cl(A) = A \vee \omega\delta d(A)$ .

**定理 2** 设  $([0, 1]^X, \Omega)$  为  $F$  保序算子空间. 如果每个  $F$  点  $x_\lambda$  的  $\omega\delta$ -导集都是  $\omega\delta$ -闭集, 则每个  $F$  集  $A$  的  $\omega\delta$ -导集  $\omega\delta d(A)$  都是  $\omega\delta$ -闭集, 即  $\omega\delta d(A) = \omega\delta cl(\omega\delta d(A))$ .

**证明** 显然只须证明  $\omega\delta cl(\omega\delta d(A)) \leq \omega\delta d(A)$ . 设  $x_\lambda \leq \omega\delta cl(\omega\delta d(A))$ , 则由定理 1 及文献 [8] 知,  $x_\lambda \leq \omega\delta cl(\omega\delta cl(A)) = \omega\delta cl(A)$ . 若  $x_\lambda \not\leq A$ , 则  $x_\lambda \leq \omega\delta d(A)$ . 故不妨假设  $x_\lambda \leq A$ . 令  $\mu = A(x)$ , 则  $\lambda \leq \mu$ . 因当  $v \leq \mu$  时, 对  $\forall P \in \omega\delta\eta(x_v)$ ,  $x_\mu \leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\mu$ , 所以  $x_v$  不是  $x_\mu$  的  $\omega\delta$ -聚点, 特别由于  $\lambda \leq \mu$ , 有  $x_\lambda \not\leq \omega\delta d(x_\mu)$ , 从而  $x_\lambda \not\leq \omega cl(\omega int(\omega\delta d(x_\mu)))$ . 又已知  $\omega\delta d(x_\mu)$  是  $\omega\delta$ -闭集, 从而  $\omega\delta d(x_\mu) \in \omega\delta\eta^-(x_\lambda)$ . 设  $P \in \omega\delta\eta^-(x_\lambda)$ , 令  $P_1 = P \vee \omega\delta d(x_\mu)$ , 则  $P_1 \in$

$\omega\delta\eta^-(x_\lambda)$ . 由  $x_\lambda \leq \omega\delta cl(\omega\delta d(A))$  知  $\omega\delta d(A) \not\leq \omega cl(\omega int(P_1))$ , 故  $A$  有  $\omega\delta$ -聚点  $e$  使  $e \not\leq \omega cl(\omega int(P_1))$ . 若  $e \not\leq \omega cl(\omega int(\omega\delta cl(x_\mu)))$ , 则  $e \not\leq \omega cl(\omega int(P_1)) \vee \omega cl(\omega int(\omega\delta cl(x_\mu)))$ , 从而  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P_1)) \vee \omega cl(\omega int(\omega\delta cl(x_\mu)))$ . 又因  $x_\mu \leq \omega\delta cl(x_\mu)$ , 从而  $x_\mu \leq \omega cl(\omega int(\omega\delta cl(x_\mu)))$ . 若  $e \leq \omega cl(\omega int(\omega\delta cl(x_\mu)))$ , 则因  $e \not\leq \omega cl(\omega int(P_1))$ , 而  $P_1 = P \vee \omega\delta d(x_\mu) \geq \omega\delta d(x_\mu)$ , 故有  $e \not\leq \omega cl(\omega int(\omega\delta d(x_\mu)))$ , 由定理1知  $e \leq \omega cl(\omega int(x_\mu)) \leq x_\mu$ . 因  $e$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点,  $e \leq x_\mu \leq A$ , 所以  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P_1)) \vee x_\mu$ . 总之,  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\mu$ , 故  $x_\lambda$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点, 即  $x_\lambda \leq \omega\delta d(A)$ .

**定义5** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间. 若  $\forall x_a, x_b \in M^*(L^X)$ , 当  $x_a < x_b$  时, 存在  $P \in \omega\delta\eta^-(x_b)$ , 使  $x_a \leq \omega cl(\omega int(P))$ , 则称  $(L^X, \Omega)$  是  $\omega\delta - T_{-1}$  的.

**定理3** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间, 则它是  $\omega\delta - T_{-1}$  空间当且仅当  $\forall x_\alpha \in M^*(L^X)$ ,  $x_\alpha$  是  $\omega cl(\omega int(x_\alpha^-))$  的成分, 即  $x_\alpha$  是包含于  $\omega cl(\omega int(x_\alpha^-))$  中的极大分子.

**证明** 设有  $x_\alpha \in M^*(L^X)$ ,  $x_\alpha$  不是  $\omega cl(\omega int(x_\alpha^-))$  的成分, 则有  $x_\mu \in M^*(L^X)$  使  $x_\alpha < x_\mu \leq \omega cl(\omega int(x_\alpha^-))$ . 设  $P \in \omega\delta\eta^-(x_\mu)$ , 即  $x_\mu \not\leq \omega cl(\omega int(P))$ , 则  $x_\alpha \not\leq \omega cl(\omega int(P))$ . 否则若  $x_\alpha \leq \omega cl(\omega int(P)) \leq P$ , 则  $x_\alpha^- \leq P$ , 从而  $\omega cl(\omega int(x_\alpha^-)) \leq \omega cl(\omega int(P))$ , 于是  $x_\mu \leq \omega cl(\omega int(P))$ , 矛盾. 由此可见  $(L^X, \Omega)$  不是  $\omega\delta - T_{-1}$  空间. 反过来, 设  $(L^X, \Omega)$  不是  $\omega\delta - T_{-1}$  空间, 则有  $x_a, x_b \in M^*(L^X)$ , 当  $x_a < x_b$  时, 对于  $\forall P \in \omega\delta\eta^-(x_b)$ ,  $x_a \not\leq \omega cl(\omega int(P))$ . 特别是由  $x_a \leq \omega cl(\omega int(x_a^-))$  得  $x_b \leq \omega cl(\omega int(x_a^-))$ , 这说明  $x_a$  不是  $\omega cl(\omega int(x_a^-))$  的成分, 矛盾.

**定理4** 设  $([0, 1]^X, \Omega)$  为  $\omega\delta - T_{-1}$  空间,  $\omega\delta d: [0, 1]^X \rightarrow [0, 1]^X$  是  $\omega\delta$ -导算子, 则  $\forall A, B \in [0, 1]^X$ , 有  $\omega\delta d(A \vee B) = \omega\delta d(A) \vee \omega\delta d(B)$ .

**证明** 首先, 证明  $\omega\delta d$  是单调算子, 即若  $A \leq B$ , 则  $\omega\delta d(A) \leq \omega\delta d(B)$ . 为此, 设  $x_\lambda \leq \omega\delta d(A)$ , 如果  $x_\lambda \not\leq B$ , 则由  $x_\lambda \leq \omega\delta cl(A) \leq \omega\delta cl(B)$  [8] 及定理1知  $x_\lambda \leq \omega\delta d(B)$ , 故可设  $x_\lambda \leq B$ .

令  $A(x) = \mu, B(x) = \xi$ . 如果  $x_\lambda \leq A$ , 则  $\lambda \leq \mu$ , 于是  $\forall P \in \omega\delta\eta(x_\lambda)$ ,  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\mu$ . 又显然  $A(x) \leq \omega cl(\omega int(P(x))) \vee \mu$ , 所以存在  $y \in X, y \neq x$ , 使  $A(y) \not\leq \omega cl(\omega int(P(y)))$ , 此时  $B(y) \not\leq \omega cl(\omega int(P(y)))$ , 从而  $B \not\leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\xi$ , 故  $x_\lambda \leq \omega\delta d(B)$ ; 如果  $x_\lambda \not\leq A$ , 则  $x_\lambda \not\leq x_\mu$ , 即  $\mu < \lambda$ . 由于  $([0, 1]^X, \Omega)$  为  $\omega\delta - T_{-1}$  空间, 根据定理3,  $x_\mu$  是  $\omega cl(\omega int(x_\mu^-))$  的成分, 故  $x_\lambda \not\leq \omega cl(\omega int(x_\mu^-))$ , 因此  $\forall P \in \omega\delta\eta^-(x_\lambda)$ ,  $P \vee x_\mu^- \in \omega\delta\eta^-(x_\lambda)$ . 又因为  $x_\lambda$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点, 故  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\mu^-$ , 从而存在  $y \in X, y \neq x$ , 使  $A(y) \not\leq \omega cl(\omega int(P(y)))$ , 从而  $B(y) \not\leq \omega cl(\omega int(P(y)))$ . 由此可见  $B \not\leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\xi$ , 所以  $x_\lambda \leq \omega\delta d(B)$ .

其次, 证明  $\omega\delta d(A \vee B) \leq \omega\delta d(A) \vee \omega\delta d(B)$ . 设  $x_\lambda$  是  $A \vee B$  的  $\omega\delta$ -聚点. 如果  $x_\lambda \not\leq A \vee B$ , 则  $x_\lambda \not\leq A$  且  $x_\lambda \not\leq B$ . 又由  $x_\lambda \in \omega\delta d(A \vee B) \leq \omega\delta cl(A \vee B) = \omega\delta cl(A) \vee \omega\delta cl(B)$  [8] 知  $x_\lambda \leq \omega\delta cl(A)$  或  $x_\lambda \leq \omega\delta cl(B)$ , 从而由定理1知  $x_\lambda \leq \omega\delta d(A)$  或  $x_\lambda \leq \omega\delta d(B)$ , 即  $x_\lambda \leq \omega\delta d(A) \vee \omega\delta d(B)$ ; 如果  $x_\lambda \leq A \vee B$ , 令  $A(x) = \mu, B(x) = \xi$ , 不妨设  $\mu \leq \xi$ . 如果有  $P \in \omega\delta\eta(x_\lambda)$  使  $A \leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\mu$ , 则  $\forall Q \in \omega\delta\eta(x_\lambda)$ , 有  $P \vee Q \in \omega\delta\eta(x_\lambda)$ . 由  $A \vee B \not\leq \omega cl(\omega int(P \vee Q)) \vee x_\xi$  知  $B \not\leq \omega cl(\omega int(P \vee Q)) \vee x_\xi$ , 从而  $B \not\leq \omega cl(\omega int(Q)) \vee x_\xi$ , 所以  $x_\lambda$  是  $B$  的  $\omega\delta$ -聚点,  $x_\lambda \leq \omega\delta d(B)$ . 如果  $\forall P \in \omega\delta\eta(x_\lambda)$ , 均有  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\mu$ , 则  $x_\lambda \leq \omega\delta d(A)$ . 综上所述, 恒有  $\omega\delta d(A \vee B) \leq \omega\delta d(A) \vee \omega\delta d(B)$ , 故  $\omega\delta d(A \vee B) = \omega\delta d(A) \vee \omega\delta d(B)$ .

**定义6** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间. 若  $\forall x_a, y_b \in M^*(L^X)$ , 当  $x_a \not\leq y_b$  时, 存在  $P \in \omega\delta\eta^-(x_a)$ , 使得  $y_b \leq \omega cl(\omega int(P))$ , 则称  $(L^X, \Omega)$  是  $\omega\delta - T_1$  的.

**定理5** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间, 则它是  $\omega\delta - T_1$  空间当且仅当  $\forall x_\alpha \in M^*(L^X)$ ,  $x_\alpha$  是  $\omega\delta$ -闭集.

**证明** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $L$ -fuzzy 保序算子空间,  $x_\alpha \in M^*(L^X)$ . 若  $y_\lambda \in M^*(L^X)$  且  $y_\lambda \not\leq x_\alpha$ , 则存在

$Q \in \omega\delta\eta^-(y_\lambda)$  使  $x_\alpha \leq \omega cl(\omega int(Q))$ , 这说明  $y_\lambda$  不是  $x_\alpha$  的  $\omega\delta$ -附着点, 即  $y_\lambda \not\leq \omega\delta cl(x_\alpha)$ , 从而由  $y_\lambda$  的任意性知  $\omega\delta cl(x_\alpha) \leq x_\alpha$ . 又若  $y_\lambda \in M^*(L^X)$  且  $y_\lambda \leq x_\alpha$ , 则任意  $Q \in \omega\delta\eta^-(y_\lambda)$  有  $x_\alpha \not\leq \omega cl(\omega int(Q))$ , 这说明  $y_\lambda$  是  $x_\alpha$  的  $\omega\delta$ -附着点, 即  $y_\lambda \leq \omega\delta cl(x_\alpha)$ , 从而有  $x_\alpha \leq \omega\delta cl(x_\alpha)$ . 于是有  $x_\alpha = \omega\delta cl(x_\alpha)$ , 即  $x_\alpha$  是  $\omega\delta$ -闭集.

反过来, 设  $\forall x_\alpha \in M^*(L^X)$ ,  $x_\alpha$  是  $\omega\delta$ -闭集. 若  $y_\lambda \in M^*(L^X)$  且  $y_\lambda \not\leq x_\alpha$ , 则  $y_\lambda \not\leq \omega\delta cl(x_\alpha)$ , 从而由定义 3 知存在  $Q \in \omega\delta\eta^-(y_\lambda)$  使  $x_\alpha \leq \omega cl(\omega int(Q))$ , 这就证明了  $(L^X, \Omega)$  为  $\omega\delta$ - $T_1$  空间.

**定理 6** 设  $F$  保序算子空间  $([0, 1]^X, \Omega)$  为  $\omega\delta$ - $T_1$  空间, 则每个  $F$  集  $A$  的  $\omega\delta$ -导集  $\omega\delta d(A)$  都是  $\omega\delta$ -闭集.

**证明** 由定理 2, 只须证明  $\forall x_\lambda \in [0, 1]^X$ ,  $\omega\delta d(x_\lambda)$  是  $\omega\delta$ -闭集. 如果  $x_\lambda$  有  $\omega\delta$ -聚点  $y_\mu$ , 则由定理 5 知  $y_\mu \leq \omega\delta d(x_\lambda) \leq \omega\delta cl(x_\lambda) = x_\lambda$ , 故  $y = x, \mu \leq \lambda$ . 设  $Q \in \omega\delta\eta(y_\mu)$ , 则由  $\omega\delta$ -聚点的定义知  $x_\lambda \not\leq \omega cl(\omega int(Q) \vee x_\lambda)$ , 这是不可能的, 所以  $x_\lambda$  没有任何  $\omega\delta$ -聚点, 即  $\omega\delta d(x_\lambda) = 0_X$ , 这说明  $\omega\delta d(x_\lambda)$  是  $\omega\delta$ -闭集.

**定义 7**<sup>[1]</sup> 设  $Y$  是  $X$  的非空子集,  $A \in L^Y$ .  $\forall x \in X$ , 令  $A^*(x) = \begin{cases} A(x), & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$ , 则  $A^* \in L^X$ , 称  $A^*$  为  $A$  在  $X$  中的扩张. 显然,  $A^*|_Y = A$ .

**定义 8**<sup>[3]</sup> 设  $(L^X, \Omega)$  是  $L$ -fuzzy 保序算子空间,  $Y$  为  $X$  的非空子集, 令  $\Omega|_Y = \{A|_Y | A \in \Omega\}$ , 其中  $A|_Y$  表示  $A$  在  $Y$  上的限制, 则称  $(L^Y, \Omega|_Y)$  为  $(L^X, \Omega)$  的子空间.

**定理 7** 设  $(L^X, \Omega)$  是  $L$ -fuzzy 保序算子空间,  $(L^Y, \Omega|_Y)$  为  $(L^X, \Omega)$  的子空间,  $e \in M^*(L^Y)$ ,  $A \in L^Y$ , 则: 1)  $(L^X, \Omega)$  的  $\omega\delta$ -闭集在  $Y$  上的限制是  $(L^Y, \Omega|_Y)$  中的  $\omega\delta$ -闭集; 反之,  $(L^Y, \Omega|_Y)$  中的  $\omega\delta$ -闭集必可由  $(L^X, \Omega)$  中的  $\omega\delta$ -闭集在  $Y$  上的限制而得出; 2)  $\omega\delta\eta(e^*)|_Y = \omega\delta\eta(e)$ ; 3)  $\omega\delta cl(A) = \omega\delta cl(A^*)|_Y$ ; 4)  $\omega\delta d(A) = \omega\delta d(A^*)|_Y$ .

**证明** 1) 由  $LF$  集在  $Y$  上的限制的定义得:  $\forall y \in Y$ ,  $(A'|_Y)(y) = A'(y)$ ,  $(A|_Y)'(y) = ((A|_Y)(y))' = (A(y))' = A'(y)$ , 即有  $A'|_Y = (A|_Y)'$ .

2) 设  $P \in \omega\delta\eta(e^*)$ , 则存在  $Q \in \Omega$ , 使得  $e^* \not\leq \omega cl(\omega int(Q))$ ,  $P \leq Q$ , 此时  $Q|_Y \in \Omega|_Y$ ,  $e \not\leq \omega cl(\omega int(Q))|_Y$  且  $P|_Y \leq Q|_Y$ , 所以  $P|_Y \in \omega\delta\eta(e)$ , 这就证明了  $\omega\delta\eta(e^*)|_Y \subseteq \omega\delta\eta(e)$ . 反过来, 设  $T \in \omega\delta\eta(e)$ , 则存在  $S \in (L^Y, \Omega|_Y)$ , 使得  $T \leq S$ ,  $e \not\leq \omega cl(\omega int(S))$ , 但  $S$  必为  $(L^X, \Omega)$  中的某  $\omega\delta$ -集  $R$  在  $Y$  上的限制而得到, 即  $S = R|_Y$ , 此时显然有  $e^* \not\leq \omega cl(\omega int(R))$ ,  $T^* \leq R$ , 所以  $T^* \in \omega\delta\eta(e^*)$ ,  $T^*|_Y = T$ , 这就证明了  $\omega\delta\eta(e) \subseteq \omega\delta\eta(e^*)|_Y$ . 故 2) 成立.

3)  $\omega\delta cl(A^*)|_Y$  是  $(L^Y, \Omega|_Y)$  中的  $\omega\delta$ -闭集, 且  $A \leq \omega\delta cl(A^*)|_Y$ , 所以  $\omega\delta cl(A) \leq \omega\delta cl(A^*)|_Y$ . 反之,  $\omega\delta cl(A)$  是  $(L^Y, \Omega|_Y)$  中的  $\omega\delta$ -闭集, 所以由 1) 知  $(L^X, \Omega)$  中有  $\omega\delta$ -闭集  $B$  使得  $\omega\delta cl(A) = B|_Y$ . 显然  $B \geq A^*$ , 从而  $B \geq \omega\delta cl(A^*)$ . 由此得  $\omega\delta cl(A) \geq \omega\delta cl(A^*)|_Y$ , 这就证明了 3).

4) 由限制的定义知,  $\forall A \in L^Y$ ,  $\omega\delta d(A^*)|_Y = \bigvee \{x_\lambda^* | x_\lambda^*$  是  $A^*$  的  $\omega\delta$ -聚点, 且  $x \in Y, \lambda \in M(L)\}$ . 因此, 问题转化为证明  $x_\lambda$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点当且仅当  $x_\lambda^*$  是  $A^*$  的  $\omega\delta$ -聚点, 且  $x \in Y$ . 事实上, 若  $x_\lambda$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点, 则  $x_\lambda \in \omega\delta cl(A)$ . 由 3) 有  $x_\lambda^* \in \omega\delta cl(A^*)$  且  $x \in Y$ , 所以若  $x_\lambda \not\leq A$ , 就有  $x_\lambda^* \not\leq A^*$ , 从而  $x_\lambda^*$  是  $A^*$  的  $\omega\delta$ -聚点. 现设  $x_\lambda \leq A$ , 则有  $x_\lambda^* \leq A^*$ . 设  $P$  是  $x_\lambda^*$  在  $(L^X, \Omega)$  中的任一  $\omega\delta$ -远域,  $x_\mu^*$  是满足条件  $x_\lambda^* \leq x_\mu^* \leq A^*$  的分子, 由 2) 知  $P|_Y$  是  $x_\lambda$  在  $(L^Y, \Omega|_Y)$  中的  $\omega\delta$ -远域, 且由  $x_\lambda$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点知  $A \not\leq \omega cl(\omega int(P|_Y)) \vee x_\mu$ , 从而由文献 [8] 中的定理 3.1 知  $A \not\leq \omega cl((\omega int(P)))|_Y \vee x_\mu$ , 于是有  $A^* \not\leq \omega cl(\omega int(P)) \vee x_\mu^*$ , 这就证明了  $x_\lambda^*$  是  $A^*$  的  $\omega\delta$ -聚点. 反之, 设  $x_\lambda^*$  是  $A^*$  的  $\omega\delta$ -聚点且  $x \in Y$ , 由 3) 知,  $x_\lambda \in \omega\delta cl(A)$ . 不妨设  $x_\lambda \leq A$ . 设  $Q$  是  $x_\lambda$  在  $(L^Y$ ,

$\Omega|_Y$  中的任一  $\omega\delta$ -远域,  $x_\mu$  是满足条件  $x_\lambda \leq x_\mu \leq A$  的分子, 由 2) 知,  $x_\lambda^*$  在  $(L^X, \Omega)$  中有一  $\omega\delta$ -远域  $R$  使  $Q = R|_Y$ . 由  $x_\lambda^* \leq x_\mu^* \leq A^*$  得  $A^* \not\leq \omega cl(\omega int(R)) \vee x_\mu^*$ , 从而  $A \not\leq \omega cl(\omega int(Q)) \vee x_\mu$ , 这说明  $x_\lambda$  是  $A$  的  $\omega\delta$ -聚点.

**定理 8** 设  $(L^X, \Omega)$  为  $\omega\delta - T_1$  空间, 则  $(L^X, \Omega)$  的任一子空间  $(L^Y, \Omega|_Y)$  也是  $\omega\delta - T_1$  空间, 其中  $Y$  为  $X$  的非空子集.

**证明** 设  $x_\alpha, y_\lambda \in M^*(L^Y)$  且  $x_\alpha \not\leq y_\lambda$ , 则  $x_\alpha^*, y_\lambda^* \in M^*(L^X)$  且  $x_\alpha^* \not\leq y_\lambda^*$ , 这里  $x_\alpha^*, y_\lambda^*$  分别为  $x_\alpha, y_\lambda$  在  $L^X$  上的扩张. 因为  $(L^X, \Omega)$  为  $\omega\delta - T_1$  空间, 所以存在  $P \in \omega\delta\eta^-(x_\alpha^*)$ , 使  $y_\lambda^* \leq \omega cl(\omega int(P))$ , 从而由定理 7 知  $P|_Y \in \omega\delta\eta^-(x_\alpha)$ , 且  $y_\lambda \leq \omega cl(\omega int(P))|_Y \leq \omega cl(\omega int(P|_Y))$  [8], 这就证明了  $(L^Y, \Omega|_Y)$  也是  $\omega\delta - T_1$  空间.

定理 8 表明,  $\omega\delta - T_1$  空间具有遗传性.

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] 王国俊.  $L$ -fuzzy 拓扑空间论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 1988.
- [2] 陈水利, 董长清.  $L$ -fuzzy 保序算子空间 [J]. 模糊系统与数学, 2002, 16(增刊): 36-41.
- [3] 陈水利.  $L$ -fuzzy 保序算子空间的  $\omega$ -可数性 [J]. 模糊系统与数学, 2004, 18(3): 11-16.
- [4] 黄朝霞, 陈水利.  $L$ -fuzzy 保序算子空间的  $\omega$ -分离性 [J]. 数学杂志, 2005, 25(4): 383-388.
- [5] 黄朝霞.  $LF$  保序算子空间的  $\omega$ -导集 [J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(2): 26-29.
- [6] 黄朝霞.  $LF$  保序算子空间的  $\omega$ -连通性 [J]. 数学杂志, 2007, 27(3): 343-347.
- [7] 黄朝霞.  $L\omega$ -空间的  $\omega\theta$ -连通性 [J]. 模糊系统与数学, 2008, 22(1): 1-5.
- [8] HUANG Z X. The  $\omega\delta$ -connectedness in an  $L\omega$ -space [C] //The 2012 Third International Conference on Intelligent Control and Information Processing (ICICIP 2012). Dalian: ICICIP, 2012: 322-325.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)