

# 与图 Zeta 函数相关的一个函数的导数值

李咏, 晏卫根

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 设  $G$  是含有  $n$  个顶点和  $\varepsilon$  条边的图,  $G$  的 Zeta 函数可以表示为  $Z_G(u) = (1 - u^2)^{n-\varepsilon}/f(u)$ , 其中  $f(u) = \det(I - uA(G) + u^2(D(G) - I))$ ,  $A(G)$  与  $D(G)$  分别表示  $G$  的邻接矩阵与度对角矩阵。分别利用正则图的 TU 子图的权重  $\omega$  和二部图的顶点数  $n$  和边数  $\varepsilon$  来表示相应的  $f'(-1)$  的值。

[关键词] Zeta 函数; 生成树数目; TU 子图的权重

[中图分类号] O 157.1

## The Derivative of a Function Related to the Zeta Function of Graph

LI Yong, YAN Wei-gen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** Suppose that  $G$  is a graph with  $n$  vertices and  $\varepsilon$  edges, the Zeta function of  $G$  could be expressed as  $Z_G(u) = (1 - u^2)^{n-\varepsilon}/f(u)$ , where  $f(u) = \det(I - uA(G) + u^2(D(G) - I))$ ,  $A(G)$  and  $D(G)$  are the adjacency matrix and diagonal matrix of degrees of  $G$ . In this paper, we use the weights of the TU-subgraphs of regular graph and the vertices number  $n$  and the edges number  $\varepsilon$  of bipartite graph to express  $f'(-1)$ , respectively.

**Keywords:** Zeta function; spanning trees number; weights of TU-subgraphs

## 0 引言

设  $G$  是一个简单连通图, 其顶点集为  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 边集为  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_\varepsilon\}$ 。对于任意顶点  $v_i$ , 用  $d_i$  来表示与其关联的边数, 也称为顶点  $v_i$  的度。对于任意顶点序列  $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+k}$ , 如果其中任意两个相邻顶点相连, 则称其为一条路, 而在一条路上不出现  $v_i, \dots, v_j, \dots, v_i$  这样的序列, 称这条路是不返回的。如果一条路的起点与终点重合, 则称它是一个圈, 根据圈上顶点个数的奇偶性, 可把圈分为奇圈和偶圈。如果一个圈是不返回, 并且不是由比它更小的圈叠加而成, 则称该圈是素圈, 用  $P$  表示由图  $G$  的所有素圈组成的集合<sup>[1]</sup>。在连通图  $G$  中, 假设  $G$  不是树, 则  $G$  中含有素圈, 对于任意的复变量  $u$ , 图  $G$  的 Zeta 函数定义为

$$Z_G(u) = \prod_{p \in P} (1 - u^{l(p)})^{-1}, \quad (1)$$

其中  $l(p)$  表示  $G$  中素圈  $p$  的长度。

设  $A(G)$  表示图  $G$  的邻接矩阵,  $D(G) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  表示其度对角矩阵, 矩阵  $Q(G) =$

[收稿日期] 2015-07-17 [修回日期] 2015-10-04

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(11571139)

[作者简介] 李咏(1988—), 男, 硕士生, 从事组合数学、图论研究。通信作者: 晏卫根(1967—), 男, 教授, 从事组合与图论及其在统计物理量子化学中的应用研究, E-mail: weigenyan@263.net。

$D(G) - I$ , 其中  $I$  为  $n$  阶单位矩阵。根据文献 [2], 图  $G$  的 Zeta 函数可以表示为  $Z_G(u) = 1/(1 - u^2)^{\varepsilon - n} \det(I - uA(G) + u^2Q(G))$ 。

在文献 [3] 中, 作者令  $f(u) = \det(I - uA(G) + u^2Q(G))$ , 然后对  $f(u)$  求导, 得到  $f'(1) = 2\tau(G)(\varepsilon - n)$ , 其中  $\tau(G)$  表示图  $G$  的生成树数目。本文得到  $f'(u)$  在  $-1$  处的函数值与图  $G$  的一些参数之间的关系。

1 相关引理

在给出结果之前, 下面先给出一些定义及已知结论。设  $L(G) = D(G) - A(G)$  表示图  $G$  的拉普拉斯矩阵,  $K(G) = D(G) + A(G)$  表示其无符号拉普拉斯矩阵, 用  $C_G(x) = \det(xI - L(G))$ ,  $Q_G(x) = \det(xI - K(G))$  分别表示  $L(G)$ 、 $K(G)$  的特征多项式, 并记  $Q_G(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^{n-i} = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n$ 。

引理 1<sup>[4]</sup> 对于任意的二部图  $G$ , 它的无符号拉普拉斯矩阵特征多项式  $Q_G(x)$  与拉普拉斯矩阵特征多项式  $C_G(x)$  是一致的。

如果图  $G$  的一个生成子图的各个分支是树或者奇圈, 则称该生成子图为 TU 子图。假设  $Y$  是  $G$  的一个 TU 子图, 它包含  $c$  个圈和  $s$  棵树  $T_1, T_2, \cdots, T_s$ , 则  $Y$  的权重  $\omega(Y)$  定义为  $\omega(Y) = 4^c \prod_{i=1}^s (1 + |E(T_i)|)$ 。

引理 2<sup>[4]</sup>  $K(G)$  的特征多项式的系数  $p_0 = 1$ , 并且  $p_i = (-1)^i \sum_Y \omega(Y)$ , 其中  $Y$  跑遍图  $G$  中包含  $i$  条边的 TU 子图。

引理 3<sup>[5]</sup> 图  $G$  的拉普拉斯矩阵  $L(G)$  的每个代数余子式等于其生成树的数目  $\tau(G)$ 。

2 结果

定理 1 设图  $G$  是  $r$ -正则的简单连通图, 令  $f(u) = \det(I - uA(G) + u^2Q(G))$ , 则  $f'(-1) = -\{n \sum_{Y_n} \omega(Y_n) + (r-2) \sum_{Y_{n-1}} \omega(Y_{n-1})\}$ , 其中  $n$  表示顶点数,  $Y_{n-1}$  与  $Y_n$  分别是跑遍图  $G$  中包含  $n-1$  与  $n$  条边的 TU 子图。

证明 为方便起见, 记  $M^u = I - uA(G) + u^2Q(G)$ , 即:

$$M^u = \begin{bmatrix} u^2 d_1 - (u^2 - 1) & \cdots & -a_{1i}u & \cdots & -a_{1j}u & \cdots & -a_{1n}u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1}u & \cdots & u^2 d_i - (u^2 - 1) & \cdots & -a_{ij}u & \cdots & -a_{in}u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{j1}u & \cdots & -a_{ji}u & \cdots & u^2 d_j - (u^2 - 1) & \cdots & -a_{jn}u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}u & \cdots & -a_{ni}u & \cdots & -a_{nj}u & \cdots & u^2 d_n - (u^2 - 1) \end{bmatrix},$$

则有:

$$f'(u) = \sum_{i=1}^n \det \begin{bmatrix} u^2 d_1 - (u^2 - 1) & \cdots & -a_{1i}u & \cdots & -a_{1j}u & \cdots & -a_{1n}u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & 2ud_i - 2u & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{j1}u & \cdots & -a_{ji}u & \cdots & u^2 d_j - (u^2 - 1) & \cdots & -a_{jn}u \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}u & \cdots & -a_{ni}u & \cdots & -a_{nj}u & \cdots & u^2 d_n - (u^2 - 1) \end{bmatrix},$$

$$f'(-1) = \sum_{i=1}^n \det \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & a_{li} & \cdots & a_{lj} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{il} & \cdots & -2d_i + 2 & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{jl} & \cdots & a_{ji} & \cdots & d_j & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nl} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & d_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \left\{ \det \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & a_{li} & \cdots & a_{lj} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{il} & \cdots & -d_i & \cdots & -a_{ij} & \cdots & -a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{jl} & \cdots & a_{ji} & \cdots & d_j & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nl} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & d_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & a_{li} & \cdots & a_{lj} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -d_i + 2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{jl} & \cdots & a_{ji} & \cdots & d_j & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nl} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & d_n \end{bmatrix} \right\} =$$
$$-n \det(\mathbf{K}(G)) - \sum_{i=1}^n (d_i - 2) \det \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & a_{li} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{jl} & \cdots & d_j & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nl} & \cdots & a_{ni} & \cdots & d_n \end{bmatrix} \circ \text{记 } \det \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & a_{li} & \cdots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{jl} & \cdots & d_j & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{nl} & \cdots & a_{ni} & \cdots & d_n \end{bmatrix} \text{ 为 } \alpha_{\circ}$$

由于  $G$  是  $r$  正则图, 即  $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = r$ , 再根据矩阵特征多项式的系数与行列式的关系及引理 2 得:  $f'(-1) = (-1)^{n-1} np_n - (-1)^{n-1} (r-2) p_{n-1} = -\{n \sum_{Y_n} \omega(Y_n) + (r-2) \sum_{Y_{n-1}} \omega(Y_{n-1})\}$ , 其中  $n$  表示顶点数,  $\omega(Y_{n-1})$  与  $\omega(Y_n)$  分别表示图  $G$  中包含  $n-1$  与  $n$  条边的 TU 子图的权重, 证毕。

如果图  $G$  是二部图, 根据引理 1 与引理 3 知:  $\det(\mathbf{K}(G)) = \det(\mathbf{L}(G)) = 0$  且  $\alpha = \tau(G)$ , 因此  $f'(-1) = -\tau(G) \sum_{i=1}^n (d_i - 2)$ , 故  $f'(-1) = 2\tau(G)(n - \varepsilon)$ , 于是有推论 1。

**推论 1** 如果图  $G$  是含有  $n$  个顶点和  $\varepsilon$  条边的简单连通二部图, 则有  $f'(-1) = 2\tau(G)(n - \varepsilon)$ , 其中  $\tau(G)$  表示图  $G$  的生成树数目。

[ 参 考 文 献 ]

[1] HASHIMOTO K. Zeta functions of finite graphs and representations of  $p$ -adic groups. Advanced Studies in Pure Mathematics, 1989, 15: 211-280. DOI:10.1016/B978-0-12-330580-0-50015-x.

[2] STARK H, TERRAS A. Zeta function of finite graphs and coverings. Advances in Math, 1996, 121: 124-165. DOI: 10.1006/dima.1996.0050.

[3] NORTHSHIELD S. A note on the Zeta function of a graph. Combin Theory Ser B, 1998, 74: 408-410. DOI:10.1006/jctb.1998.1861.

[4] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, SIMIĆ S. An introduction to the theory of graph spectra. London: Cambridge University Press, 2010.

[5] BIGGS N L. Algebraic graph theory. 2nd ed. London: Cambridge University Press, 1993.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)