第 21 卷　第 6 期　　集美大学学报（自然科学版）　　Vol. 21　No. 6
2016 年 11 月　　Journal of Jimei University (Natural Science)　　Nov. 2016

［文章编号］1007 - 7405(2016)06 - 0466 - 05

# 具波动算子非线性 Schrödinger 方程行波解的稳定性

林成龙，梁宗旗

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］研究具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的行波解的存在性、不稳定性与色散关系。通过给出该方程 Stokes 解，在振幅和相位上引入小扰动，来分析行波解的线性稳定性；利用一元四次方程的拉格朗日解法并结合盛金公式对含参数四次方程解的分布情况进行讨论，给出了参数 $\alpha$、$\beta$ 、振幅 $u_0$ 与波数 $q$ 之间的关系，得到行波解的振荡性、稳定性及不稳定的条件和色散关系。

［关键词］波动算子；非线性 Schrödinger 方程；拉格朗日方法；盛金公式；线性稳定性

［中图分类号］O 175

# Stability of the Traveling Wave Solutions About the Nonlinear Schrödinger Equation with Wave Operator

LIN Cheng-long, LIANG Zong-qi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract**: The existence, stability and dispersion of traveling wave solutions about the nonlinear Schrödinger equation with wave operator were discussed. By giving the Stokes solution of the equation, the small perturbations were introduced into the amplitude and phase to analyze the linear stability of the traveling wave solutions. As the same time, using a quartic equation of Lagrange method and combining with Shengjin's formula on distribution with parameter quartic equation solution were discussed, and the relation between the parameters $\alpha, \beta$ , the amplitude $u_0$ and the wave number $q$ was given, and the oscillation, the stability and the unstable condition and the dispersion relation of the traveling wave solutions were obtained.

**Key words**: wave operator; nonlinear Schrödinger equation; Lagrange method; Shengjin's formula; linear stability

## 0　引言

非线性波理论研究是流体力学中一个重要内容，长期以来，人们给予了广泛关注。非线性 Schrödinger 方程作为最经典的方程，在高能物理、量子力学、非线性光学、超导及深水波等方面应用尤为广泛。具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程[1]描述了单色波的非线性相互作用，同时在推导高频电子波横向速度满足方程时，也得到了类似方程。

关于该方程，国内外学者在理论和数值计算方面做了许多的研究：文献［2］证明了多维具有波

［收稿日期］2016 - 04 - 06　　［修回日期］2016 - 06 - 21
［基金项目］国家自然科学基金资助项目（11201178）；福建省科技计划重点项目（2014H0034）；福建省自然科学基金资助项目（2012J01013）
［作者简介］林成龙（1989—），男，硕士生，从事计算数学方向研究。通信作者：梁宗旗（1964—），男，教授，硕士生导师，从事计算数学方向研究，E-mail：liangzq2719@163.com。

动算子的非线性 Schrödinger 方程的初边值、存在性、唯一性和正则性；文献［3 –4］研究了该方程的谱方法和伪谱方法；文献［5］构造了该方程一类差分格式，并证明了该格式的收敛性、稳定性；文献［6］给出了一类特殊情况下该方程的守恒差分格式；文献［7 –8］给出了特殊情况下的该方程的另外两种守恒差分格式；文献［9 –10］在二阶差分格式的基础上给出了特殊情况下该方程的高精度守恒差分格式；文献［11］给出了具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的显式精确解；文献［12 –13］给出了立 Ginzburg – Landau 方程一维振幅波稳定性分析；文献［14］给出了具有耗散的非线性 Schrödinger 方程的不稳定性分析。为了更好地研究解的相干结构及混沌现象，探讨新的动态结构的特点，本文就具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的线性稳定性进行分析。

本文考察如下的具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程

$$u_{tt} - u_{xx} + \mathrm{i}\alpha u_t + \beta q(|u|^2)u = 0 \quad (x \in \mathbf{R}, t > 0), \tag{1}$$

其中：$\mathrm{i}^2 = -1$；$u_t = \partial u/\partial t$；$u_{tt} = \partial^2 u/\partial t^2$；$u_{xx} = \partial^2 u/\partial x^2$；$\alpha,\beta$ 为实数；$u(x,t)$ 为未知复值函数；$q(\cdot)$ 为已知实变量连续函数。为研究方便，本文取 $q(|u|^2) = |u|^2$。

## 1　行波解的存在性及色散关系

设方程（1）中具有如下形式的行波解

$$u_s(x,t) = u_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+\omega t)}, \tag{2}$$

其中：$|u_0|$ 为振幅；$k$ 为波数；$\omega$ 为频率。将式（2）代入式（1）中，得到：

$$k_0^2 = \omega_0^2 + \alpha\omega_0 - \beta |u_0|^2。 \tag{3}$$

**定理 1**　当振幅 $|u_0|$、波数 $k$、频率 $\omega$ 满足式（3）时，具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程（1）有满足条件（3）的形式为式（2）的行波解。当 $u_0 = \pm 1$ 时，行波解（2）变成齐次 Stokes 解。

## 2　线性稳定性分析

下面讨论行波解（2）的线性稳定性。先对式（2）作一个规范变换

$$u(x,t) = \overline{u(x,t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_0 x+\omega_0 t)}, \tag{4}$$

其中 $k_0$，$\omega_0$ 满足式（3），将式（4）代入式（1）中，并用 $\overline{u(x,t)}$ 替换 $u(x,t)$ 得：

$$u_{tt} - u_{xx} + au_t - bu_x + cu + \beta |u|^2 u = 0, \tag{5}$$

其中：$a = (2\omega_0 + \alpha)\mathrm{i}$；$b = 2k_0\mathrm{i}$；$c = k_0^2 - \omega_0^2 - \alpha\omega_0 = -\beta |u_0|^2$。显然 $u_0$ 是方程（5）的一个临界点，当 $u_0 = \pm 1$ 时，行波解（2）变成齐次 Stokes 解。对任意的 $u_0$，当 $u_0$ 满足式（3）时，$u_0$ 为方程（5）的平衡解。

根据方程（1）行波解 $u_s(x,t) = u_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx+\omega t)}$ 的特性，对行波解的稳定性分析，只需研究式（5）在 $u_0$ 处的稳定性即可。

在 $u_0$ 点附近作微小扰动

$$u(x,t) = u_0 + \delta u(x,t), \delta \ll u_0。 \tag{6}$$

将式（6）代入方程（5），线性化后得方程

$$\begin{pmatrix} \partial_{tt} - \partial_{xx} + a\partial_t - b\partial_x + c + L(|u_0|^2) & h(u_0) \\ h^*(u_0) & \partial_{tt} - \partial_{xx} + a^*\partial_t - b^*\partial_x + c^* + L^*(|u_0|^2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta u^* \end{pmatrix} = 0, \tag{7}$$

其中：$L(|u_0|^2) = 2\beta |u_0|^2$；$h(u_0) = \beta^2 u_0$；“ * ”表示共轭复数。

对行波解平衡点 $u_0$ 在振幅和相位附近作微小扰动,假设

$$u(x,t) = u_0 + \delta u_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(qx+\Omega t)} + \delta u_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(qx+\Omega^* t)}, \tag{8}$$

其中：$q$ 是带边波数且为实数；$\Omega$ 是扰动频率；$\delta u_+ \ll u_0$；$\delta u_- \ll u_0$。

将式(8)代入式(7)中,得:

$$\begin{cases}\Omega^2 + (2\omega_0 + \alpha)\Omega - (q^2 + 2k_0 q + \beta\,|u_0|^2) - \beta u_0^2 \delta u_- / \delta u_+ = 0, \\ \Omega^2 - (2\omega_0 + \alpha)\Omega - (q^2 - 2k_0 q + \beta\,|u_0|^2) - \beta^* u_0^{*2} \delta u_+ / \delta u_- = 0\ 。\end{cases} \tag{9}$$

消去式(9)中的 $\delta u_+$、$\delta u_-$,得

$$\Omega^4 + d\Omega^2 + e\Omega + f = 0, \tag{10}$$

其中:$d = -(2q^2 + \alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2)$;$e = 4k_0 q(2\omega_0 + \alpha)$;$f = q^4 + q^2(2\beta\,|u_0|^2 - 4k_0^2)$。

**引理 1**[14] 在 $u_0$ 点,行波解 $u(x,t)$ 满足色散关系(3),设 $\Omega = \xi + \eta i(\xi,\eta \in \mathbf{R})$,当 $t$ 趋于无穷时,形如式(8)的解满足:1)若 $\eta = 0$,且 $\xi \neq 0$ 是实数时,行波解 $u(x,t)$ 振荡,总是稳定的;2)若 $\eta \neq 0$,当 $\eta > 0$ 时,行波解 $u(x,t)$ 是渐进稳定的;3)若 $\eta < 0$,行波解 $u(x,t)$ 是不稳定的。

**引理 2**[15](盛金公式) 一元三次方程 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$,$a,b,c,d \in \mathbf{R}$,且 $a \neq 0$。重根判别式:$A = b^2 - 3ac, B = bc - 9ad, C = c^2 - 3bd$;总判别式:$\Delta = B^2 - 4AC$。1)当 $A = B = 0$ 时,方程有一个三重实根;2)当 $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ 时,方程有一个实根和一对共轭虚根;3)当 $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ 时,方程有 3 个实根,其中有一个两重根;4)当 $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ 时,方程有 3 个不相等的实根。

**引理 3**[16](拉格朗日方法) 设一元四次方程 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ 的 4 个根为 $x_1, x_2, x_3, x_4$。令 $D = -(3b^2 - 8ac,)$,$E = 3b^4 + 16a^2c^2 - 16ab^2c + 16a^2bd - 64a^3e$,$F = -(b^3 - 4abc + 8a^2d)^2$,$A = D^2 - 3E$,$B = DE - 9F$,$C = E^2 - 3DF$,$\Delta = B^2 - 4AC$,$y_1, y_2, y_3$ 是三次方程 $y^3 - Dy^2 + Ey - F = 0(D, E, F \in \mathbf{R})$ 的三根,则:$x_1 = (-b + \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})/(4a)$,$x_2 = (-b + \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})/(4a)$,$x_3 = (-b - \sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})/(4a)$,$x_4 = (-b - \sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})/(4a)$。

## 3 讨论

根据引理 2、引理 3,结合式(10),令 $D = 8d, F = -8e, E = 16d^2 - 64f, A = D^2 - 3E = 16d^2 + 192f^2$,$B = DE - 9F = 8(16d^3 - 64df + 9e)$,$C = E^2 - 3DF = 64((2d^2 - 8f)^2 + 3de)$。

设 $y_1, y_2, y_3$ 是方程 $y^3 + Dy^2 + Ey + F = 0$ 的根,$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 是方程(10)的根,根据一元四次方程的根的判别式及求根的关系,结合根的形态,下面讨论行波解的扰动对于稳定性的影响。

### 3.1 波数 $q = 0$

1)当 $\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2 = 0$ 时,$A = B = C = D = E = F = 0, \Delta = 0$,得 $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 0$。此时 $\Omega = 0$ 恒成立,根据式(8),行波解没有扰动。

2)当 $\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2 \neq 0$ 时,式(10)变为 $\Omega^4 + d\Omega^2 = 0$,得 $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$,$\Omega_3 = \Omega_4 = \pm\sqrt{\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2}$。当 $\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2 \geqslant 0$ 时,行波解是稳定的;当 $\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2 < 0$ 时,行波解是不稳定的。

### 3.2 波数 $q \neq 0$

1)$D = E = F = 0$,方程(10)有四重 0 根,即 $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 0$。根据式(8),此时行波解有扰动,是振荡解,稳定。

2)当 $A = B = C = 0, D \neq 0, E \neq 0, F \neq 0$,则方程(10)有一个单实根和一个三重根。$\Omega_1 = -F/(4D)$,$\Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = 3F/(4D)$。显然 $\Omega \in \mathbf{R}$ 恒成立,此时行波解是稳定的。

3)当 $E = F = 0, D \neq 0$,则方程有两对重根。$k_0 = 0$ 或 $\alpha^2 + 4k_0^2 + 4\beta\,|u_0|^2 = 0$ 且 $q^2 \neq -(\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2)$,得到 $q^2 = -(\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2)/[4(\alpha^2 + 8k_0^2 + 4\beta\,|u_0|^2)]$,此时,$\Omega_{1,2} = \sqrt{-D} = \sqrt{4(\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2)(2\alpha^2 + 16k_0^2 + 8\beta\,|u_0|^2 + 1)/(\alpha^2 + 8k_0^2 + 4\beta\,|u_0|^2)}$,$\Omega_{3,4} = -\sqrt{-D} = -\sqrt{4(\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta\,|u_0|^2)(2\alpha^2 + 16k_0^2 + 8\beta\,|u_0|^2 + 1)/(\alpha^2 + 8k_0^2 + 4\beta\,|u_0|^2)}$。

设 $\Omega = \pm \sqrt{D}i$ 。ⅰ)当 $(\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta |u_0|^2)(2\alpha^2 + 16k_0^2 + 8\beta |u_0|^2 + 1) \geqslant 0$ ,此时 $D \leqslant 0$ ,方程根 $\Omega \in \mathbf{R}$ ,此时行波解是稳定的;ⅱ)当 $(\alpha^2 + 4k_0^2 + 6\beta |u_0|^2)(2\alpha^2 + 16k_0^2 + 8\beta |u_0|^2 + 1) < 0$ ,此时 $D > 0$ ,方程根 $\Omega$ 是纯虚数,设 $\Omega = \mathrm{i}\rho$ ,$\rho$ 表示线性增长率,$\rho_{\pm}(\alpha,\beta,q,|u_0|) = \pm\sqrt{D}$, 当 $\rho_- \leqslant 0$ 时,此时行波解是不稳定的;当 $\rho_+ > 0$ 时,行波解是稳定的,且是一个渐进稳定点。

4)当 $\Delta = B^2 - 4AC = 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$, 则方程(10)有 2 个二重根。此时 $\Omega_{1,2} = \sqrt{X_1} \pm \sqrt{X_2}/4, \Omega_{3,4} = -\sqrt{X_1}/4$, 其中 $X_1 = -D + B/A, X_2 = -B/(2A)$ 。

设 $\Omega = \lambda_1\sqrt{X_2} + \lambda_2\sqrt{2X_2 + D}i/4(\lambda_1,\lambda_2 \in \mathbf{R})$ 。ⅰ)当 $X_2(2X_2 + D) > 0$, $\Omega$ 可以表示为 $\Omega = \vartheta_1 + \mathrm{i}\rho_1(\vartheta_1,\rho_1 \in \mathbf{R})$ ,根据式(8),行波解是稳定的,且是一个渐进稳定点;ⅱ)当 $X_2 \leqslant 0, (2X_2 + D) > 0$ , $\Omega$ 可以表示为 $\Omega = \mathrm{i}\rho_2(\rho_2 \in \mathbf{R})$ ,根据式(8),此时行波解有扰动,当 $\rho_2 > 0$, 此时行波解是稳定的,且是一个渐进稳定点。$\rho_2 < 0$, 此时行波解是不稳定的;ⅲ)当 $X_2 > 0, (2X_2 + D) \leqslant 0$ , $\Omega \in \mathbf{R}$ ,根据式(8),此时行波解是稳定的。

5)当 $\Delta = B^2 - 4AC < 0, A \neq 0$。令 $\theta = \arccos(2AD - 3B/(2\sqrt{A^3}))$, 得 $\Omega_{1,2} = \sqrt{y_1}/4 \pm (\sqrt{y_2} + \sqrt{y_3})/4, \Omega_{3,4} = -\sqrt{y_1}/4 \pm (\sqrt{y_2} - \sqrt{y_3})/4$ ,其中 $y_1 = -D/3 - 2\sqrt{A}\cos(\theta/3)/3, y_2 = -D/3 - 2\sqrt{A}\cos(\theta + 2\pi/3)/3, y_3 = -D/3 - 2\sqrt{A}\cos(\theta - 2\pi/3)/3$。

a)当 $y_1,y_2,y_3$ 均为实数,ⅰ) $y_1,y_2,y_3 \geqslant 0$ , $\Omega \in \mathbf{R}$ ,此时行波解是稳定的;ⅱ) $y_1,y_2,y_3 < 0$ , $\Omega$ 可以表示为 $\Omega = \mathrm{i}\rho_3$ ,根据式(8),当 $\rho_3 > 0$ 时, 此时行波解是稳定的且是一个渐进稳定的,当 $\rho_3 < 0$ 时,此时行波解是不稳定的;ⅲ) $y_1,y_2,y_3$ 至少 2 个异号, $\Omega = \vartheta_4 + \mathrm{i}\rho_4, \vartheta_4,\rho_4 \in \mathbf{R}$ ,根据式(8),此时行波解是一个渐进稳定的。

b)当 $y_1,y_2,y_3$ 有一个实数和一对共轭复数时, $\Omega = \vartheta_5 + \mathrm{i}\rho_5, \vartheta_5,\rho_5 \in R$ ,根据式(8),此时行波解是一个渐进稳定的。

6)当 $\Delta = B^2 - 4AC > 0$, 得 $\Omega_{1,2} = \sqrt{Z}/4 \pm W_1/2, \Omega_{3,4} = -\sqrt{Z}/4 \pm W_2\mathrm{i}/2$。其中 $Y_1 = AD + 3(-B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2, Y_2 = AD - 3(-B + \sqrt{B^2 - 4AC})/2, Z_1 = (-2D - \sqrt[3]{Y_1} - \sqrt[3]{Y_2})/6$, $Z_2 = \sqrt{3}(\sqrt[3]{Y_1} - \sqrt[3]{Y_2})/6, Z = (-D + \sqrt[3]{Y_1} + \sqrt[3]{Y_2})/3, W_1 = \sqrt{2(Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2})}, W_2 = \sqrt{2(-Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2})}$ 。显然 $W_1 > 0, W_2 > 0$ 恒成立,故只需考虑 $Z$ 即可。

a) $Z \geqslant 0$ , $\Omega$ 可以表示为 $\Omega_{1,2} \in \mathbf{R}$ , $\Omega_{3,4} = \vartheta + \mathrm{i}\rho, \vartheta,\rho \in \mathbf{R}$ ,根据式(8),当 $\Omega_{1,2} \in \mathbf{R}$ 时,行波解是稳定的;当 $\Omega_{3,4} = \vartheta + \mathrm{i}\rho, \vartheta,\rho \in \mathbf{R}$ , $\rho > 0$ ,行波解是渐进稳定, $\rho < 0$ ,此时行波解是不稳定的。

b) $Z < 0$ , $\Omega$ 可以表示为 $\Omega_{1,2} = \vartheta + \mathrm{i}\rho$ , $\Omega_{3,4} = \mathrm{i}\rho$ ,根据式(8), $\rho > 0$ ,此时行波解是渐进稳定的, $\rho < 0$ ,此时行波解是不稳定的。

**定理 2**　对于 Stokes 解,在相空间 $(|u(x,t)|, \partial_t|u(x,t)|)$ 中满足：1) 当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时, 方程(1) 是一个立方非线性 Schrödinger 方程，当参数 $u_0 \neq 0$ 时，存在满足条件行波解 $u_s$ ，使得 $(|u_s|,0)$ 是一个双曲点，若 $u_0 = 0$, 存在满足条件行波解 0 ，使得 $(0,0)$ 是一个椭圆点；2) 当参数 $\beta \neq 0$, 方程的解存在 Stokes 解，行波解在平衡点 $u_0$ 处有扰动 $u(x,t) = u_0 + \delta u_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(qx+\Omega t)} + \delta u_- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(qx+\Omega^* t)}$ 的情况下，设频率扰动 $\Omega = \xi + \eta\mathrm{i}, \xi,\eta \in \mathbf{R}$ ，根据引理 2 及上面讨论，当 $t \to \infty$ 时， ⅰ) 当 $\eta < 0$ 时，满足条件 (3) 的行波解 $u(x,t)$ 是不稳定的, $(|u_s|,0)$ 是一个双曲点； ⅱ) 当 $\eta \geqslant 0$ 时，满足条件 (3) 的行波解 $u(x,t)$ 是稳定的, $(|u_s|,0)$ 是一个渐进稳定点； ⅲ) 当 $\eta = 0, \xi \in \mathbf{R}$ 时，满足条件 (3) 的行波解 $u(x,t)$ 是稳定的, $(|u_s|,0)$ 是一个振荡的稳定点。

## 4　结论

本文研究了具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的行波解的存在性、不稳定性与色散关系。在振

幅和相位上引入小扰动，来分析行波解的线性稳定性，得到了参数 $\alpha$、$\beta$ 、振幅 $u_0$ 与波数 $q$ 在满足某种条件下的关系，分析和预测了解的渐进形态。由于波动算子的非线性 Schrödinger 方程具有波动项，与一般的非线性 Schrödinger 方程相比，其稳定性研究和分析要复杂得多，行波解的形态研究也变得更为复杂，在横向、斜向施加外界干扰项情况下得到其解的变化趋势是将来很重要的研究内容。

## [参考文献]


[1] MATSUNCHI K. Nonlinear interactions of counter-travelling waves [J]. Phys Soc Japan, 1980, 48(5): 1746-1754.

[2] GUO B L, LIANG H X. On the problem of numerical calculation for a class of the system of nonlinear Schrödinger equations with wave operator. Numer Methods Comput Appl, 1983(3): 176-182.

[3] 梁宗旗，鲁百年. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的拟谱方法. 高等学校计算数学学报, 1999(3): 201-211.

[4] 梁宗旗. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的谱方法. 山西师范大学学报（自然科学版）, 2002, 16(2): 9-15.

[5] 梁宗旗. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的有限差分法. 黑龙江大学学报（自然科学版）, 1998 , 15(1): 1-4.

[6] ZHANG L M , CHANG Q S . A conservative numerical scheme for a class of nonlinear Schrödinger equation with wave operator. Appl Math Comput, 2003, 145(2): 603-612. DOI:10.16356 /j.1005-1120.2006.02.002.

[7] WANG T C, ZHANG L M. Analysis of some new conservative schemes for nonlinear Schrödinger equation with wave operator. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(2): 1780-1794. DOI:10.1016/j.amc.2006.06.015.

[8] WANG T C, ZHANG L M, CHEN F Q. Conservate difference scheme based on numerical analysis for nonlinear Schrödinger equation with wave operator. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2006, 23(2): 87-93.

[9] 胡汉章，谢水连. 一类带波动算子的非线性 Schrödinger 方程的高精度守恒差分格式. 高校应用数学学报，2014, 29(1): 36-44. DOI:10.13299/j.cnki.amjcu.001796.

[10] LI X , ZHANG L M, WANG S S . A compact finite difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation with wave operator. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(6): 3187-3197. DOI:org/10.1016/j.amc.2012.09.051.

[11] 游叔军，尚亚东. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的显示精确解. 广州大学学报（自然科学版）, 2005, 4(6): 475-481.

[12] GUO B L, JING Z J, LU B N. Spatitemporal complexity of the cubic Ginzburg-Landau equation. Comm on Nonl Sci & Numer Simul, 1996, 1(4): 12-17.

[13] XIE L L, GAO J ZH, XIE W M. Amplitude wave in one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation. Chin Phys B, 2011, 20(11): 134-139. DOI:10.1088/1674- 1056/20/11/110503.

[14] 梁宗旗. 具耗散的非线性 Schrödinger 方程行波解的不稳定性分析. 集美大学学报（自然科学版）, 2001, 6(2): 101-105.

[15] 范盛金. 一元三次方程的新求根公式与新判别法. 海南师范学院学报（自然科学版）, 1989, 2(2): 91-98.

[16] 智海章. 一元四次方程求解方法的思路与研究. 甘肃高师学报, 2001, 6(2): 25-26.

[17] ZHANG F, PERÉZ-GGARCÍA V M, VÁZQUEZ L. Numerical simulation of nonlinear Schrödinger equation system: a new conservative scheme. Appl Math Comput, 1995, 71(2/3): 165-177. DOI:10.1016/0096-3003(94)00152-T.


（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）