[文章编号] 1007-7405(2017)04-0068-07

右侧 Caputo 分数阶导数的 $L2-1$ 插值逼近

杜瑞连，梁宗旗

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 对右侧 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 分数阶导数在 $t=t_k$ 处进行了差分离散，分别在区间 $[t_{j-1},t_j]$ $(j\in[k+1,N-1])$ 上用 $L2$ 插值，在区间 $[t_{N-1},t_N]$ 上用 $L1$ 插值，构造了 $L2-1$ 差分格式，给出了相关的系数性质，并证明了其收敛阶为 $O(\Delta t^{3-\alpha})$。

[关键词] 右侧 Caputo 导数；$L1$ 插值；$L2$ 插值；收敛阶

[中图分类号] O 241.82

Interpolation Approximation of the Right Side of the Caputo Fractional Derivative

DU Ruilian, LIANG Zongqi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The difference of the right side of the Caputo fractional derivation at $t=t_k$ was discretized by using $L2$ interpolation on interval $[t_{j-1},t_j]$ $(j\in[k+1,N-1])$ and $L1$ interpolation on interval $[t_{N-1},t_N]$ respectively. The $L2-1$ difference scheme was constructed, and the properties of the related coefficient were given, and it was proved that the convergence order was $O(\Delta t^{3-\alpha})$.

Keywords: right Caputo fractional derivative; $L1$ interpolation; $L2$ interpolation; convergence order

0　引言

整数阶微积分作为描述经典物理及相关学科理论的解析数学工具已为人们普遍接受。很多问题的数学模型最终都可以归结为整数阶微分方程的定解问题，但当人们进行复杂系统和复杂现象的研究时，经典的整数阶微分方程就遇到了许多难以克服的矛盾和难于解决的问题。例如，当材料或外界条件发生微小改变时，就需要重新构造新的数学模型来实现，这给问题的解决造成了很大的不便。分数阶微分方程对刻画具有记忆和遗传性质的材料和过程，以及对复杂系统的描述具有建模简单、参数物理定义清晰、描述准确等优点，从而成为复杂力学或物理过程数学建模的重要工具之一。随之分数阶微分方程应用而生，因此关于分数阶微积分数值解的研究方法便得到了迅速的发展。

分数阶微积分在科学工程各领域的应用主要是通过分数阶微分方程来描述和实现的。根据分数阶导数的特点，分数阶微分方程可以分为时间分数阶、空间分数阶和时空分数阶微分方程。许多学者在求分数阶微分方程或动力系统的解析解方面做出了重要的贡献[1-10]。而在分数阶微分方程所求得的解析解中，往往会碰到一些特殊函数，这就给实际应用带来了很大的困难，因而越来越多的学者开始

[收稿日期] 2016-11-14　[修回日期] 2017-01-21
[基金项目] 国家自然科学基金项目（11201178）；福建省科技厅重点项目（2014H0034）
[作者简介] 杜瑞连（1992—），女，硕士生，从事计算数学方向研究。通信作者：梁宗旗（1964—），男，教授，硕导，从事计算数学方向研究，E-mail:zqliang@jmu.edu.cn。

转而求助于数值解，并取，了丰硕的研究成果，比如有限元法[1-5]、有限区域分解法[6]、谱方法[7]、预估校正法[8]、同伦摄动法[9]、有限差分法[10]等，其中有限差分法计算简单，适用于各种光滑与不光滑函数，因而被广泛应用。

Caputo 分数阶导数分为左侧导数和右侧导数。关于左侧导数的研究成果已经很丰富，对左侧 Caputo 分数阶导数的离散主要是 $L1$ 或 $L2$ 离散：Murio[11]基于 $L1$ 离散，对左侧 $\alpha(0<\alpha<1)$ Caputo 型时间分数阶低扩散方程建立了差分格式，并得到离散后的局部截断误差为 $O(\Delta t)$；Lin 等[12]同样对其进行 $L1$ 离散，将其精度提高到 $O(\Delta t^{2-\alpha})$；Sun 等[13]对其进行 $L1-2$ 离散，并证明了其收敛阶可以为 $O(\Delta t^{3-\alpha})$。而关于右侧导数的研究成果很少，大部分采用的是 Grünwald – Letnikov 的差分定义来离散的。本文主要研究了右侧 Caputo 分数阶导数的数值计算问题，对右侧 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 分数阶导数进行 $L2-1$ 离散，得到了逼近格式，并给出了严格的误差估计，证明了其收敛阶为 $O(\Delta t^{3-\alpha})$。

1　右侧 Caputo 分数阶导数的数值差分格式（$L2-1$ 格式）

右侧 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 分数阶导数为

$$ {}_t^CD_b^\alpha f(t)=-(1/(\Gamma(1-a)))\int_t^b f'(\tau)(\tau-t)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau, \tag{1}$$

假设 $f(t)\in C^3[t_k,b]$，记 $t_k<t_{k+1}<\cdots<t_N=b$，$t_k=k\Delta t$，$k=0,1,2,\cdots,N$，Δt 为步长，在节点 $t=t_k$ 处，右侧 Caputo 分数阶导数可以写为

$$ {}_t^CD_b^\alpha f(t_k)=-(1/(\Gamma(1-\alpha)))\int_{t_k}^b f'(\tau)(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau=-(1/(\Gamma(1-\alpha)))\sum_{j=k+1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(\tau)(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau。 \tag{2}$$

为计算方便，定义如下符号：$\delta_t f_{k-1/2}=(f(t_k)-f(t_{k-1}))/\Delta t$，$\delta_t^2 f_k=(\delta_t f_{k+1/2}-\delta_t f_{k-1/2})/\Delta t$，$t_{k+1/2}=(t_{k+1}+t_k)/2$。式（2）中，在区间 $[t_{N-1},t_N]$ 上用 $L1$ 插值 $\Pi_{1,N}f(t)$ 来近似代替 $f(t)$，在区间 $[t_{j-1},t_j]$ $(j\in[k+1,N-1])$ 上用 $L2$ 插值 $\Pi_{2,j}f(t)$ 来近似代替 $f(t)$，其中 $\Pi_{1,N}f(t)=f(t_{N-1})(t_N-t)/\Delta t+f(t_N)(t-t_{N-1})/\Delta t$，截断误差为

$$f(t)-\Pi_{1,N}f(t)=f''(\xi)(t-t_{N-1})(t-t_N)/2,\ \xi\in(t_{N-1},t_N)。 \tag{3}$$

在区间 $t\in[t_{j-1},t_j]$ $(j\in[k+1,N-1])$ 上，取三点 $(t_{j-1},f(t_{j-1}))$，$(t_j,f(t_j))$，$(t_{j+1},f(t_{j+1}))$，采用二次插值多项式，可以得到：

$$\begin{aligned}\Pi_{2,j}f(t)=\ & f(t_{j-1})(t-t_j)(t-t_{j+1})/(2\Delta t^2)+f(t_j)(t-t_{j-1})(t_{j+1}-t)/\Delta t^2+\\ & f(t_{j+1})(t-t_{j-1})(t-t_j)/(2\Delta t^2),\\ (\Pi_{2,j}f(t))'=\ & f(t_{j-1})(2t-(2j+1)\Delta t)/(2\Delta t^2)-f(t_j)(2t-2j\Delta t)/\Delta t^2+\\ & f(t_{j+1})(2t-(2j-1)\Delta t)/(2\Delta t^2)=\\ & f(t_{j-1})(t-(j+1/2)\Delta t)/\Delta t^2-2f(t_j)(t-(j+1/2-1/2)\Delta t)/\Delta t^2+\\ & f(t_{j+1})(t-(j+1/2-1)\Delta t)/\Delta t^2=(f(t_{j-1})/\Delta t^2-2f(t_j)/\Delta t^2+\\ & f(t_{j+1})/\Delta t^2)(t-t_{j+1/2})+(f(t_{j+1})-f(t_j)/\Delta t)=\delta_t f_{j+1/2}+\delta_t^2 f_j(t-t_{j+1/2})。\end{aligned}$$

截断误差为

$$f(t)-\Pi_{2,j}f(t)=f'''(\zeta_j)(t-t_{j-1})(t-t_j)(t-t_{j+1})/6,\ t\in[t_{j-1},t_j],\ \zeta_j\in(t_{j-1},t_{j+1})。 \tag{4}$$

式（2）中，右侧 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 分数阶导数可以写成：

$$\begin{aligned}{}_t^CD_b^\alpha f(t_k)=\ & -(1/(\Gamma(1-\alpha)))\sum_{j=k+1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(\tau)(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau=\\ & -(1/(\Gamma(1-\alpha)))\Big[\sum_{j=k+1}^{N-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(\tau)(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau+\int_{t_{N-1}}^{t_N} f'(\tau)(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau\Big]\approx\\ & -(1/(\Gamma(1-\alpha)))\Big[\sum_{j=k+1}^{N-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_k)^{-\alpha}(\Pi_{2,j}f(\tau))'\mathrm{d}\tau+\int_{t_{N-1}}^{t_N}(\tau-t_k)^{-\alpha}(\Pi_{1,N}f(\tau))'\mathrm{d}\tau\Big]=\end{aligned}$$

$$-(1/(\Gamma(1-\alpha)))\{\sum_{j=k+1}^{N-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_k)^{-\alpha}[\delta_t f_{j+1/2}+\delta_t^2 f_j(\tau-t_{j+1/2})]\mathrm{d}\tau+\int_{t_{N-1}}^{t_N}(\tau-t_k)^{-\alpha}\delta_t f_{N-1/2}\mathrm{d}\tau\} =$$

$$-(1/(\Gamma(1-\alpha)))[\sum_{j=k+1}^{N-1}\delta_t f_{j+1/2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau+$$

$$\delta_t f_{N-1/2}\int_{t_{N-1}}^{t_N}(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau+\sum_{j=k+1}^{N-1}(\delta_t^2 f_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_k)^{-\alpha}(\tau-t_{j+1/2})\mathrm{d}\tau)] \overset{\Delta}{=}$$

$$\Delta^\alpha f(t_k)-1/(\Gamma(1-\alpha))\sum_{j=k+1}^{N-1}(\delta_t^2 f_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_k)^{-\alpha}(\tau-t_{j+1/2})\mathrm{d}\tau)\triangleq {}_t\Delta_b^\alpha f(t_k)。\tag{5}$$

这里,

$$\Delta^\alpha f(t_k)=-(1/(\Gamma(1-\alpha)))[\sum_{j=k+1}^{N-1}(\delta_t f_{j+1/2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau)+\delta_t f_{N-1/2}\int_{t_{N-1}}^{t_N}(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau]=$$

$$-(\Delta t^{1-\alpha}/(\Gamma(2-\alpha)))\{\sum_{j=k+1}^{N-1}[\delta_t f_{j+1/2}((j-k)^{1-\alpha}-(j-k-1)^{1-\alpha})]+\delta_t f_{N-1/2}((N-k)^{1-\alpha}-$$

$$(N-k-1)^{1-\alpha})\}=-(\Delta t^{-\alpha}/(\Gamma(2-\alpha)))[\sum_{j=k+1}^{N-1}((f_{j+1}-f_j)a_{j-k})+(f_N-f_{N-1})a_{N-k}]=$$

$$-(\Delta t^{-\alpha}/(\Gamma(2-\alpha)))[-a_1 f_{k+1}+\sum_{j=k+2}^{N-2}((a_{j-k-1}-a_{j-k})f_j)+(a_{N-k-2}-a_{N-k-1}-a_{N-k})f_{N-1}+$$

$$(a_{N-k-1}+a_{N-k})f_N],\tag{6}$$

其中,

$$a_l=l^{1-\alpha}-(l-1)^{1-\alpha},\ 1\leqslant l\leqslant N-k\ 。\tag{7}$$

注意到,

$$-\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_k)^{-\alpha}(\tau-t_{j+1/2})\mathrm{d}\tau=\Delta t^{2-\alpha}b_{j-k}/(1-\alpha),\ k+1\leqslant j\leqslant N-1,\tag{8}$$

其中,

$$b_l=[l^{2-\alpha}-(l-1)^{2-\alpha}]/(2-\alpha)+[l^{1-\alpha}-3(l-1)^{1-\alpha}]/2,\ l\geqslant 1。\tag{9}$$

将式（6）和式（8）代入式（5），得右侧 Caputo 分数阶导数的差分格式为:

$${}_t^C D_b^\alpha f(t_k)\approx {}_t\Delta_b^\alpha f(t_k)=\Delta^\alpha f(t_k)+(\Delta t^{2-\alpha}/(\Gamma(2-\alpha)))\sum_{j=k+1}^{N-1}(b_{j-k}\delta_t^2 f_j)。\tag{10}$$

式（10）中，算子 ${}_t\Delta_b^\alpha f$ 是右侧 Caputo 分数阶导数 ${}_t^C D_b^\alpha f$ 的数值差分算子，称之为 $L2-1$ 算子。

下面给出系数 a_l, b_l 的性质。

引理 1[14] 对于任意的 $\alpha(0<\alpha<1)$，由式（7）定义的 a_l，有以下性质：1）$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{N-k}, k\geqslant 1$；2）$(1-\alpha)(l+1)^{-\alpha}<a_l<(1-\alpha)l^{-\alpha}$, $l\geqslant 1$。

引理 2 对于任意的 $\alpha(0<\alpha<1)$, 由式（9）定义的 b_l，有以下性质：1）$b_l\geqslant 0, l>1$；2）$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant\cdots$, 即 b_l 是关于 l 单调递减的数列。

证明 1）由中值定理可得, $b_l=[l^{2-\alpha}-(l-1)^{2-\alpha}]/(2-\alpha)+[l^{1-\alpha}-3(l-1)^{1-\alpha}]/2=\theta_1^{1-\alpha}+[l^{1-\alpha}-(l-1)^{1-\alpha}]/2-(l-1)^{1-\alpha}=\theta_1^{1-\alpha}+(1-\alpha)\theta_2^{-\alpha}/2-(l-1)^{1-\alpha}\geqslant(1-\alpha)\theta_2^{-\alpha}/2\geqslant 0, \theta_1, \theta_2\in(l-1, l)$。

2）设 $y=[x^{2-\alpha}-(x-1)^{2-\alpha}]/(2-\alpha)+[x^{1-\alpha}-3(x-1)^{1-\alpha}]/2$, 则有: $y'=[x^{1-\alpha}-(x-1)^{1-\alpha}]+(1-\alpha)[x^{-\alpha}-(x-1)^{-\alpha}]/2-(1-\alpha)(x-1)^{-\alpha}=(1-\alpha)\zeta_1^{-\alpha}-(1-\alpha)\alpha\zeta_2^{-\alpha-1}/2-(1-\alpha)(x-1)-\alpha\leqslant-(1-\alpha)\alpha\zeta_2^{-\alpha-1}/2\leqslant 0$, $\zeta_1, \zeta_2\in(x-1, x)$。所以 b_l 是关于 l 的严格单调递减数列，证毕。

引理 3 对于任意的 $\alpha(0<\alpha<1)$, e_l 定义如下：当 $l=0$ 时, $e_0=b_1$；当 $l\geqslant 1$ 时，有

$$e_l=\begin{cases}a_1+b_2-2b_1, & l=1,\\ b_{l-1}-2b_l+b_{l+1}-a_{l-1}+a_l, & 2\leqslant l\leqslant N-k-2,\\ b_{N-k-2}-2b_{N-k-1}-a_{N-k-2}+a_{N-k-1}+a_{N-k}, & l=N-k-1,\\ b_{N-k-1}-a_{N-k-1}-a_{N-k}, & l=N-k。\end{cases}\tag{11}$$

有如下结论成立：1）$e_l<0,\ l\geqslant 1$；2）$e_1\leqslant e_2\leqslant\cdots\leqslant e_{N-k}$，即 e_l 是关于 l 的单调递增数列；3）$\sum_{j=0}^{N-k}e_j=-a_1<0$。

证明　当 $2\leqslant l\leqslant N-k-2$ 时，$e_{l+1}-e_l=\{[(l+2)^{2-\alpha}-(l+1)^{2-\alpha}]/(2-\alpha)+[(l+2)^{1-\alpha}-(l+1)^{1-\alpha}]/2\}-\{[(l-1)^{2-\alpha}-(l-2)^{2-\alpha}]/(2-\alpha)+[(l-1)^{1-\alpha}-(l-2)^{1-\alpha}]/2\}-\{3[(l+1)^{2-\alpha}-l^{2-\alpha}]/(2-\alpha)+3[(l+1)^{1-\alpha}-l^{1-\alpha}]/2\}+\{3[l^{2-\alpha}-(l-1)^{2-\alpha}]/(2-\alpha)+3[l^{1-\alpha}-(l-1)^{1-\alpha}]/2\}\triangleq E_{l+1}-E_{l-2}-3E_l+3E_{l-1}$。其中，$E_l=[(l+1)^{2-\alpha}-l^{2-\alpha}]/(2-\alpha)+[(l+1)^{1-\alpha}-l^{1-\alpha}]/2=[(l+1)^{2-\alpha}/(2-\alpha)+(l+1)^{1-\alpha}/2]-[l^{2-\alpha}/(2-\alpha)+l^{1-\alpha}/2]$，$l\geqslant 2$。

令 $m(x)=x^{2-\alpha}/(2-\alpha)+x^{1-\alpha}/2$，则 $E_l=m(l+1)-m(l)$，对于 $l\geqslant 2$，

$$m'(x)=x^{1-\alpha}+(1-\alpha)x^{-\alpha}/2>0,$$
$$m''(x)=(1-\alpha)x^{-\alpha-1}(x-\alpha/2)>0,$$
$$m'''(x)=(1-\alpha)\alpha x^{-\alpha-2}[(1+\alpha)/2-x]<0,$$
$$m^{(4)}(x)=(1-\alpha)\alpha x^{-\alpha-3}[(\alpha+1)x-(1-\alpha)(\alpha+2)/2]>0。$$

因此，$e_l=m(l+1)-3m(l)+3m(l-1)-m(l-2)=m(l+1)-m(l)-2(m(l)-m(l-1))+m(l-1)-m(l-2)=m'(\eta_1)-m'(\eta_2)-(m'(\eta_2)-m'(\eta_3))=m''(\kappa_1)-m''(\kappa_2)=m'''(\sigma_l)<0$，其中 $\eta_i\in(l+1-i,l+2-i)$，$i=1,2,3$，$\kappa_r\in(\eta_{r+1},\eta_r)$，$r=1,2,l-2<\sigma_l<l+1$。

又易知，当 $l=1,N-k-1,N-k$ 时，都有 $e_l<0$，所以 1）成立。

$$e_{l+1}-e_l=E_{l+1}-E_{l-2}-3E_l+3E_{l-1}=m(l+2)-4m(l+1)+6m(l)-4m(l-1))+m(l-2)=$$
$$m(l+2)-m(l+1)-3(m(l+1)-m(l))+3(m(l)-m(l-1))-(m(l-1)-m(l-2))=$$
$$m'(\iota_1)-3m('\iota_2)+3m'(\iota_3)-m'(\iota_4)=m^{(4)}(\vartheta_l),$$

其中 $\iota_i\in(l+2-i,l+3-i)$，$i=1,2,3,4$，$\vartheta_l\in(l-2,l+2)$。所以 $e_2\leqslant e_3\leqslant\cdots\leqslant e_{N-k-2}$，1）得证。其次易证 $e_{N-k-2}\leqslant e_{N-k-1}\leqslant e_{N-k}$，2）得证。3）可以直接从 e_l 的定义得出，命题证毕。

由式（6）可知，右侧 Caputo 分数阶导数的数值差分格式（10）可以改写成：

$$\begin{aligned}{}_t^CD_b^\alpha f(t_k)\approx{}_t\Delta_b^\alpha f(t_k)&=\Delta^\alpha f(t_k)+(\Delta t^{2-\alpha}/(\Gamma(2-\alpha)))\sum_{j=k+1}^{N-1}(b_{j-k}\delta_t^2f_j)=-(\Delta t^{-\alpha}/(\Gamma(2-\alpha)))\\&[-a_1f_{k+1}+\sum_{j=k+2}^{N-2}((a_{j-k-1}-a_{j-k})f_j)+(a_{N-k-2}-a_{N-k-1}-a_{N-k})f_{N-1}+(a_{N-k-1}+a_{N-k})f_N]+\\&(\Delta t^{-\alpha}/(\Gamma(2-\alpha)))\sum_{j=k+1}^{N-1}(b_{j-k}(f_{j+1}-2f_j+f_{j-1}))=(\Delta t^{-\alpha}/(\Gamma(2-\alpha)))\sum_{j=k}^{N}(e_{j-k}f_j)。\end{aligned}\tag{12}$$

对于右侧 Caputo 分数阶导数的 $L2-1$ 差分格式（12），有如下的一致收敛性。

定理 1　假设 $f(t)\in C^3[t_k,b]$，对于任意的 $\alpha(0<\alpha<1)$，记 $R(f(t_k))={}_t^CD_b^\alpha f(t_k)-{}_t\Delta_b^\alpha f(t_k)$，则有

$$\begin{aligned}|R(f(t_k))|\leqslant\{&[1/12+\alpha/3(1-\alpha)(3-\alpha)]\max_{t_k\leqslant t\leqslant t_{N-1}}|f'''(t)|\Delta t^{3-\alpha}+\\&\alpha\max_{t_{N-1}\leqslant t\leqslant t_N}|f''(t)|(t_{N-1}-t_k)^{-\alpha-1}\Delta t^3/8\}/(\Gamma(1-\alpha))。\end{aligned}\tag{13}$$

证明　由式（3）和式（4）可知，

$$R(f(t_k))=-(1/(\Gamma(1-\alpha)))[\sum_{j=k+1}^{N-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))'(\tau-t_k)^{-\alpha}d\tau+$$

$$\int_{t_{N-1}}^{t_N}(f(\tau)-\Pi_{1,N}f(\tau))'(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau]=$$

$$-(1/(\Gamma(1-\alpha)))[\sum_{j=k+1}^{N-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))+\int_{t_{N-1}}^{t_N}(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}(f(\tau)-\Pi_{1,N}f(\tau))]=$$

$$-(1/(\Gamma(1-\alpha))[\sum_{j=k+1}^{N-1}(\tau-t_k)^{-\alpha}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))|_{t_{j-1}}^{t_j}+(\tau-t_k)^{-\alpha}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))|_{t_{N-1}}^{t_N}]-$$

$$(\alpha/(\Gamma(1-\alpha)))[\sum_{j=k+1}^{N-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau+$$

$$\int_{t_{N-1}}^{t_N}(f(\tau)-\Pi_{1,N}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau]=$$

$$-(\alpha/(\Gamma(1-\alpha)))[\sum_{j=k+1}^{N-1}(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau)+$$

$$\int_{t_{N-1}}^{t_N}(f(\tau)-\Pi_{1,N}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau]=-(\alpha/(\Gamma(1-\alpha)))(H_1+H_2),\tag{14}$$

其中，

$$|H_1|=\left|\int_{t_{N-1}}^{t_N}(f(\tau)-\Pi_{1,N}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau\right|=\left|\int_{t_{N-1}}^{t_N}f''(\xi_N)(\tau-t_{N-1})(\tau-t_N)(\tau-t_k)^{-\alpha-1}/2\mathrm{d}\tau\right|=$$

$$\left|\int_{t_{N-1}}^{t_N}f''(\xi_N)(\tau-t_{N-1})(t_N-\tau)(\tau-t_k)^{-\alpha-1}/2\mathrm{d}\tau\right|\leqslant(1/8)\max_{t_{N-1}\leqslant t\leqslant t_N}|f''(t)|\Delta t^2\int_{t_{N-1}}^{t_N}(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$(1/8)\max_{t_{N-1}\leqslant t\leqslant t_N}|f''(t)|(t_{N-1}-t_k)^{-\alpha-1}\Delta t^3,\quad \xi_N\in(t_{N-1},t_N),\tag{15}$$

其中由均值不等式可得，

$$(\tau-t_{N-1})(t_N-\tau)\leqslant(t_N-t_{N-1})^2/4=\Delta t^2/4,$$

$$|H_2|=\left|\sum_{j=k+1}^{N-1}(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau)\right|=$$

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau\right|+\left|\sum_{j=k+2}^{N-1}(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau)\right|,$$

而

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau\right|=$$

$$(1/6)\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}f'''(\zeta_k)(\tau-t_{k-1})(\tau-t_k)(\tau-t_{k+1})(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau\right|=$$

$$(|f'''(\vartheta_k)|/6)\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}(\tau-t_{k-1})(\tau-t_{k+1})(\tau-t_k)^{-\alpha}\mathrm{d}\tau\right|=$$

$$|f'''(\vartheta_k)|\Delta t^{3-\alpha}/3(1-\alpha)(3-\alpha),\vartheta_k\in(t_{k-1},t_{k+1})。\tag{16}$$

$$\left|\sum_{j=k+2}^{N-1}(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(f(\tau)-\Pi_{2,j}f(\tau))(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau)\right|=$$

$$(1/6)\left|\sum_{j=k+2}^{N-1}(\int_{t_{j+1}}^{t_j}f'''(\zeta_j)(\tau-t_{j-1})(\tau-t_j)(\tau-t_{j+1})(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau)\right|=$$

$$(|f'''(\vartheta)|/6)\sum_{j=k+2}^{N-1}(\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\tau-t_{j-1})(t_j-\tau)(t_{j+1}-\tau)(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau)\leqslant(|f'''(\vartheta)|\Delta t^3/12),$$

$$\left|\int_{t_{k+1}}^{t_{N-1}}(\tau-t_k)^{-\alpha-1}\mathrm{d}\tau\right|\leqslant(1/12\alpha)|f'''(\vartheta)|\left|\Delta t^3(\tau-t_k)^{-\alpha}|_{t_{k+1}}^{t_{N-1}}\right|\leqslant(1/12\alpha)|f'''(\vartheta)|\Delta t^{3-\alpha}(1-$$

$$(N-1-k)^{-\alpha})\leqslant(1/12\alpha)|f'''(\vartheta)|\Delta t^{3-\alpha},\quad\vartheta\in(t_{k+1},t_{N-1})。\tag{17}$$

所以，

$$|H_2| \leqslant (1/12\alpha + 1/3(1-\alpha)(3-\alpha)) \max_{t_k \leqslant t \leqslant t_{N-1}} |f'''(t)| \Delta t^{3-\alpha}, \tag{18}$$

从而式（14）可以写为：$|R(f(t_k))| \leqslant (1/(\Gamma(1-\alpha)))\{[1/12+\alpha/3(1-\alpha)(3-\alpha)] \max_{t_k \leqslant t \leqslant t_{N-1}} |f'''(t)| \Delta t^{3-\alpha} + \alpha \max_{t_{N-1} \leqslant t \leqslant t_N} |f''(t)| (t_{N-1}-t_k)^{-\alpha-1} \Delta t^3/8\}$。定理证毕。

由定理 1 可知，${}_t\Delta_b^{\alpha} f(t_k)$ 一致收敛于右侧 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 分数阶导数 ${}_t^C D_b^{\alpha} f(t_k)$，且与左侧 Caputo 分数阶导数的收敛阶是相同的。

2　数值例子

本节将通过数值例子来说明式（12）的差分格式 $L2-1$ 的有效性和数值精度。

取正整数 N，假设 $0<\alpha<1$，取 $f(t)=(1-t)^{4+\alpha}$。令 $t_0=0$，$b=t_N=1$，记 $F^0={}_t^C D_1^{\alpha} f(t)|_{t=t_0}$，$f^0={}_t\Delta_1^{\alpha} f(t)|_{t=t_0}$，$0 \leqslant k \leqslant N$，$E^0(\Delta t)=|F^0-f^0|$。

$f(t)$ 的 α 阶 Caputo 分数阶导数的精确解为：${}_t^C D_1^{\alpha}(1-t)^{4+\alpha}|_{t=t_0}=(\Gamma(5+\alpha)/24)(1-t)^4|_{t=t_0}=\Gamma(5+\alpha)/24.$

取 $N=10,20,40,80,160,320$，分别计算式（12）中差分格式的数值解，表 1 给出了当 $\alpha=0.1$，0.5，0.9 时式（12）中差分格式在 $t=t_0$ 处的误差和收敛阶。从表 1 中可以看出，文中构造的新的差分格式的收敛阶可以达到 $3-\alpha$ 阶。

表 1　不同节点时的数值误差和收敛阶

Tab. 1　Computational errors and convergence orders with different node

α	N	$E(\Delta t)$	$\log_2(E(\Delta t)/E(\Delta t/2))$
0.1	10	6.238 2e−4	—
	20	9.663 2e−5	2.70
	40	1.444 3e−5	2.74
	80	2.111 9e−6	2.77
	160	3.043 1e−7	2.80
	320	4.338 8e−7	2.81
0.5	10	1.350 0e−2	—
	20	2.600 0e−3	2.38
	40	4.861 8e−4	2.42
	80	8.864 5e−5	2.46
	160	1.597 5e−5	2.47
	320	2.859 1e−6	2.48
0.9	10	1.070 0e−1	—
	20	2.700 0e−2	1.99
	40	6.500 0e−3	2.05
	80	1.600 0e−3	2.02
	160	3.666 9e−4	2.13
	320	8.596 0e−5	2.10

3　结论

在左侧 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 分数阶导数研究的基础上，对右侧 $\alpha(0<\alpha<1)$ 阶 Caputo 分数阶导数给出了一种新的差分格式 $L2-1$ 格式。下一步的研究将讨论右侧或左侧 $\alpha(n-1<\alpha<n)$ 阶 Caputo 分数阶导数的差分逼近格式，以寻求更高阶的数值计算方法。

[参考文献]

[1] FIX G J, ROOF J P. Least squares finite-element solution of a fractional order two-point boundary value problem [J].

Comput Math Appl, 2004, 48(7/8): 1017-1033. DOI:10.1016/j.camwa.2004.10.003.

[2] DENG W H. Finite element method for the space and time fractional Fokker-Planck equation [J]. SIAM J Numer Anal, 2008, 47(1): 204-226. DOI:10.1137/080714130.

[3] ERVIN V J, HEUER N, ROOP J P. Numerical approximation of a time dependent, nonlinear, space-fractional diffusion equation [J]. SIAM J Numer Anal, 2007, 45(2): 572-591. DOI:10.1137/050642757.

[4] ERVIN V J, ROOP J P. Variational solution of fractional advection dispersion equations on bounded domains in Rd [J]. Numer Methods Partial Differential Eq, 2007, 23(2): 256-281. DOI:10.1002/num.20169.

[5] ZHUANG P, LIU F, ANH V, et al. The Galerkin finite element approximation of the fractional cable equation [J]. Numerical Algorithms, 2015, 72(2): 1-8.

[6] LI C, WANG Y. Numerical algorithm based on a domain decomposition for fractional differential equations [J]. Comput Math Appl, 2009, 57(10): 1672-1681.

[7] LIN Y M, LI X J, XU C J. Finite difference/spectral approximations for the fractional cable equation [J]. Math Comput, 2011(80): 1369-1396. DOI:10.1090/S0025-5718-2010-02438-x.

[8] DENG W H. Numerical algorithm for the time fractional Fokker-Planck equation [J]. J Comput Phys, 2007, 227(2): 1510-1522. DOI:10.1016/j.jcp.2007.09.015.

[9] GOLBABAI A, SAYEVAND K. Fractional calculus: a new approach to the analysis of generalized fourth-order diffusion-wave equations [J]. Comput Math Appl, 2011(67): 2227-2231. DOI:10.1016/j.camwa.2010.09.022.

[10] LI H F, CAO J X, LI C P. High-order approximation to Caputo derivatives and Caputo-type advection-diffusion equations [J]. Comput Math, 2016, 299(3): 159-175. DOI:10.1016/j.cam.2015.11.037.

[11] MURIO D A. Implicit finite difference approximation for time fractional diffusion equations [J]. Comput Math Appl, 2008, 56(4): 1138-1145. DOI:10.106/j.camwa.2008.02.015.

[12] LIN X, XU C. Finite difference /spectral approximations for the time-fractional diffusion equation [J]. J Comput Phys, 2007, 225(2): 1533-1552. DOI:10.1016/j.jcp.2007.02.001.

[13] GAO G H, SUN Z Z. A new fractional numerical differentiation formula to approximate the Caputo fractional derivative and its applications [J]. Comput Phys, 2014(259): 33-50. DOI:10.1016/j.jcp.2013.11.017.

[14] 孙志忠，高广花. 分数阶微分方程的有限差分方法 [M]. 北京：科学出版社，2015：8.

[15] 叶超. 分数阶偏微分方程的高阶数值格式与理论分析 [J]. 湘潭大学学报（自然科学版），2012, 33(4): 2-8.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）