

具有比例时滞和非线性耦合的复杂网络同步

曾翰旻, 宾红华

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 讨论了一类具有比例时滞和非线性耦合的复杂网络指数型同步问题。基于时间变量指数变换可把比例时滞转化为常数时滞的方法, 通过构造李雅普诺夫泛函和设计合适的控制器, 建立驱动-响应网络指数型同步的充分条件。最后通过数值模拟验证了结果的有效性。

[关键词] 复杂网络; 比例时滞; 指数型同步; 李雅普诺夫泛函

[中图分类号] O 231.2

Synchronization of Complex Networks with Proportional Delays and Nonlinear Coupling

ZENG Hanmin, BIN Honghua

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The exponential synchronization problem for a class of complex networks with proportional delays and nonlinear coupling was discussed. Based on the approach of exponential transformation of time, sufficient conditions for exponential synchronization of drive-response networks were established by constructing proper Lyapunov functional and designing suitable controller. Finally, a numerical simulation was given to illustrate the effectiveness of the results.

Keywords: complex networks; proportional delays; exponential synchronization; Lyapunov functional

0 引言

具有自组织、自相似、吸引子、无标度、小世界中一部分性质或者全部性质的网络可以称为复杂网络。复杂网络广泛存在于自然科学和人文科学的领域中, 在过去的几十年里, 人们对其进行了深入的研究。现实中的例子如互联网、电力输送网络、代谢网络等。根据网络的类别, 复杂网络又可以分为规则网络、随机网络、小世界网络、无标度网络等。同步是指两个及以上变量在变化过程中保持相对的稳定。Pecora 等提出了驱动-响应系统, 使混沌系统里多个系统之间可以实现同步^[1]。此后人们又提出了许多使系统之间实现同步的方案^[2-4], 大部分的同步问题都需要通过构造适当的李雅普诺夫泛函^[5-6]。含时滞的神经网络指数同步问题是复杂网络重要的研究课题, 在一般含时滞的系统中, 时滞是一个常数, 而比例时滞中的时滞则与时间成比例^[7-9]。这方面的研究也已取得了一些重要结果^[10-13]。

具有比例时滞系统的指数型同步问题受到了学者的广泛关注^[10,13-16]。然而, 少有文献考虑具有

[收稿日期] 2016-11-24

[修回日期] 2017-01-15

[基金项目] 国家自然科学基金项目(61573005); 福建省自然科学基金项目(2012J06001)

[作者简介] 曾翰旻(1992—), 男, 硕士生, 从事神经网络方向研究。通信作者: 宾红华(1966—), 女, 教授, 硕导, 从事神经网络方向研究, E-mail: hhhbin@jmu.edu.cn。

比例时滞的非线性驱动-响应复杂网络系统的指数型同步,而研究这类系统获得的结果不仅可以包含线性耦合的复杂网络系统,也可以看作是文献[11]在比例时滞上的推广。比例时滞在现实工程 and 实际运用中大量存在,比如在质量安全路径选择和路由算法中经常会用到比例时滞。在系统的稳定性问题中,通常会设计一个驱动系统和一个初值不同于驱动系统的响应系统,并且添加控制项使驱动系统和响应系统之间的误差逐渐缩小。同时,计算两者的误差,如果误差最后趋于 0 且满足指数性同步的条件,则可以认为该驱动-响应系统达到全局指数型同步。具有常数时滞的系统状态演化通常表述为 $\dot{\mathbf{x}}_i(t) = f_i(x_i(t)) + F(x_i(t - \tau))$, 其中 τ 是常数时滞。在具有比例时滞的系统 $\dot{\mathbf{x}}_i(t) = f_i(x_i(t)) + F(x_i(qt))$ ($0 < q \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$) 中,可把 qt 变形为 $t - (1 - q)t$, 原式的时滞 $\tau = (1 - q)t$, 即比例时滞系统是一种特殊的变时滞系统。通过对时间 t 进行变量代换,令 $v_i(t) = x_i(e^t)$, 则 qt 变为 $t - \tau$, 其中 $\tau = -\log(q)$, 这等价于把该系统转换为常数时滞系统。本文通过构造李雅普诺夫泛函,求出减少驱动系统与响应系统之间误差的控制项,使驱动响应系统满足全局指数型同步的条件。对于具有比例时滞的系统,如果对任何两个解 $\{v_i(t)\}_{i=1}^n, \{w_i(t)\}_{i=1}^n$, 存在常数 $M \geq 1, \lambda > 0$, 使得当 $t > 0$ 时, $\sum_{i=1}^n |v_i(t) - w_i(t)| \leq M \sum_{i=1}^n \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |v_i(s) - w_i(s)| e^{-\lambda t}$, 则系统达到指数型同步。

1 模型与预备知识

考虑一个由 n 个相同结点非线性耦合组成的复杂网络,其驱动系统为:

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n [c_{ij} \Gamma f_j(x_j(q_{ij}t))], \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{iN}(t))^T \in R^N$ 代表第 i 个结点在 t 时刻的状态向量; $f_j(x_j(q_{ij}t))$ 是非线性耦合函数; $f(x_i(t))$ 是适当的演化函数; $\Gamma \in R^{n \times n}$ 且 $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $t \geq 1, 0 < q_{ij} \leq 1, q = \min_{1 \leq i, j \leq n} \{q_{ij}\}$ 。 $\mathbf{C} = (c_{ij})_{n \times n} \in R^{n \times n}$ ($j \neq i$) 是耦合强度矩阵。当第 i 个结点和第 j 个结点有关联时, $c_{ij} \neq 0$, 否则 $c_{ij} = 0$ ($j \neq i$)。对角元 $c_{ii} = \sum_{i=1, j \neq i}^n c_{ij}$ 。系统的初始条件 $x_i(t) = x_{i0}(t)$, $t \in [q, 1]$ 。设响应系统为:

$$\dot{\mathbf{z}}_i(t) = f(z_i(t)) + \sum_{j=1}^n [c_{ij} \Gamma f_j(z_j(q_{ij}t))] + u_i(t), \quad (2)$$

其中 $u_i(t)$ 是等待设计的控制项。对时间 t 做变量代换,令 $v_i(t) = x_i(e^t), w_i(t) = z_i(e^t)$, 则 $x_i(t) = v_i(\ln(t)), z_i(t) = w_i(\ln(t))$, 可以得到以下系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_i(t) &= e^t \{f(x_i(e^t)) + \sum_{j=1}^n [c_{ij} \Gamma f_j(x_j(e^{q_{ij}t}))]\} = e^t \{f(v_i(\ln(e^t))) + \\ &\sum_{j=1}^n [c_{ij} \Gamma f_j(v_j(\ln(e^{q_{ij}t})))]\} = e^t \{f(v_i(t)) + \sum_{j=1}^n [c_{ij} \Gamma f_j(v_j(t - \tau_{ij}))]\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{\mathbf{w}}_i(t) = e^t \{f(w_i(t)) + \sum_{j=1}^n [c_{ij} \Gamma f_j(w_j(t - \tau_{ij}))]\} + U_i(t), \quad (4)$$

其中, $t \geq 0, i = 1, 2, \dots, n, \tau_{ij} = -\ln q_{ij} \geq 0, U_i(t) = u_i(e^t)$ 。

假设 1 设 $f(x), f_i(x)$ 满足全局 Lipschitz 连续, 即 $\forall u, v \in R, L, L_i$ 为正常数。

$$|f(u) - f(v)| \leq L |u - v|, |f_i(u) - f_i(v)| \leq L_i |u - v|. \quad (5)$$

考虑 $y_i(t) = v_i(t) - w_i(t), g(y_i(t)) = f(v_i(t)) - f(w_i(t)), g_j(y_j(t - \tau_{ij})) = f_j(v_j(t - \tau_{ij})) - f_j(w_j(t - \tau_{ij}))$, 则得到误差系统为:

$$\dot{\mathbf{y}}_i(t) = e^t \{g(y_i(t)) + \sum_{j=1}^n [c_{ij} \Gamma g_j(y_j(t - \tau_{ij}))]\} - U_i(t). \quad (6)$$

定义 1 系统 (3) 和 (4) 指数型同步当且仅当存在常数 $M \geq 1, \lambda > 0$, 使得当 $t > 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^n |v_i(t) - w_i(t)| \leq M \sum_{i=1}^n \left[\sup_{-\tau \leq s \leq 0} |v_i(s) - w_i(s)| e^{-\lambda t} \right], \text{ 其中 } \lambda \text{ 为指数型同步率。}$$

2 主要定理

定理 1 设计反馈控制

$$U_i(t) = \{(\sigma - 1)e^{-t} + L + \sum_{j=1}^n [|c_{ji}| L_i \| \Gamma \| e^{\sigma \tau_{ji}}] \} y_i(t), \quad (7)$$

则驱动-响应系统 (3) 和 (4) 取得指数型同步。其中 $\sigma > 1$ 是正常数, 指数同步率 $\alpha = \sigma - 1$ 。

证明 令 $Y_i(t) = e^{\sigma t} |y_i(t)|, \sigma > 1$, 可得: $\dot{Y}_i(t) = \sigma e^{\sigma t} |y_i(t)| + e^{\sigma t} y_i(t) \dot{y}_i(t) / |y_i(t)| = \sigma e^{\sigma t} |y_i(t)| + e^{\sigma t} y_i(t) e^t \{ g(y_i(t)) + \sum_{j=1}^n [c_{ij} \Gamma g_j(y_j(t - \tau_{ij}))] - U_i(t) \} / |y_i(t)| = \sigma e^{\sigma t} |y_i(t)| + e^{\sigma t} y_i(t) e^t \{ (f(v_i(t)) - f(w_i(t)) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \Gamma [f_j(v_j(t - \tau_{ij})) - f_j(w_j(t - \tau_{ij}))] - U_i(t) \} / |y_i(t)|$ 。

根据假设 $|f(u) - f(v)| \leq L |u - v|, |f_i(u) - f_i(v)| \leq L_i |u - v|$, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{Y}_i(t) &\leq \sigma e^{\sigma t} |y_i(t)| + e^{\sigma t} e^t \{ L |y_i(t)| + \sum_{j=1}^n [c_{ij} \| \Gamma \| L_j |y_j(t - \tau_{ij})|] - y_i(t) U_i(t) / |y_i(t)| \} = \\ &\sigma Y_i(t) + e^t \{ L Y_i(t) + \sum_{j=1}^n [\| \Gamma \| L_j |c_{ij}| e^{\sigma \tau_{ij}} Y_j(t - \tau_{ij})] - e^{\sigma t} y_i(t) U_i(t) / |y_i(t)| \}. \end{aligned} \quad (8)$$

构造李雅普诺夫泛函

$$V(t) = e^{-t} \sum_{i=1}^n Y_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\| \Gamma \| L_j |c_{ij}| e^{\sigma \tau_{ij}}] \int_{t-\tau_{ij}}^t Y_j(s) ds, \quad (9)$$

令 $t \geq 0, \sigma > 1$, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -e^{-t} \sum_{i=1}^n Y_i(t) + e^{-t} \sum_{i=1}^n \dot{Y}_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\| \Gamma \| L_j |c_{ij}| e^{\sigma \tau_{ij}} (Y_j(t) - Y_j(t - \tau_{ij}))] \leq -e^{-t} \sum_{i=1}^n Y_i(t) + \\ &e^{-t} \sum_{i=1}^n \{ (\sigma Y_i(t) + e^t L Y_i(t) + e^t [\sum_{j=1}^n L_j |c_{ij}| \| \Gamma \| e^{\sigma \tau_{ij}} Y_j(t - \tau_{ij}) - e^{\sigma t} y_i(t) U_i(t) / |y_i(t)|] \} + \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [L_j \| \Gamma \| |c_{ij}| e^{\sigma \tau_{ij}} (Y_j(t) - Y_j(t - \tau_{ij}))] = \sum_{i=1}^n \{ -e^{-t} Y_i(t) + \sigma e^{-t} Y_i(t) + L Y_i(t) + \\ &\sum_{j=1}^n [\| \Gamma \| L_i |c_{ji}| e^{\sigma \tau_{ji}} Y_i(t)] - e^{\sigma t} y_i(t) U_i(t) / |y_i(t)| \} = \sum_{i=1}^n e^{\sigma t} \{ (\sigma - 1) e^{-t} + L + \\ &\sum_{j=1}^n L_i |c_{ji}| \| \Gamma \| e^{\sigma \tau_{ji}} \} |y_i(t)| - \sum_{i=1}^n [e^{\sigma t} y_i(t) U_i(t)] / |y_i(t)|. \end{aligned} \quad (10)$$

为了使 $t \geq 0, \dot{V}(t) \leq 0$, 设计控制函数 $U_i(t) = \{(\sigma - 1)e^{-t} + L + \sum_{j=1}^n [L_i |c_{ji}| \| \Gamma \| e^{\sigma \tau_{ji}}] y_i(t)\}$ 。

在上述控制下, 可得 $\dot{V}(t) \leq 0$ 。根据式 (8) 和式 (10) 易得:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |v_i(t) - w_i(t)| &\leq \sum_{i=1}^n [e^{-t} e^{\sigma t} |y_i(t)|] \leq e^{-t} \sum_{i=1}^n Y_i(t) + \\ &\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\| \Gamma \| L_j |c_{ij}| e^{\sigma \tau_{ij}}] \int_{t-\tau_{ij}}^t Y_j(s) ds = V(t) \leq V(0). \end{aligned}$$

根据式 (9) 可知,

$$V(0) = \sum_{i=1}^n |y_i(0)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [\| \Gamma \| L_j |c_{ij}| e^{\sigma \tau_{ij}}] \int_{-\tau_{ij}}^0 Y_j(s) ds \leq \sum_{i=1}^n [|y_i(0)| + \sum_{j=1}^n [L_j |c_{ij}| \| \Gamma \| \tau_{ij} e^{\sigma \tau_{ij}}]]$$

$$\sup_{-\tau \leq s \leq 0} Y_j(s) \leq \sum_{i=1}^n [|y_i(0)| + \sum_{j=1}^n (L_j |c_{ij}| \| \Gamma \| \tau e^{\sigma \tau}) \sup_{-\tau \leq s \leq 0} Y_j(s)] = \sum_{i=1}^n [|y_i(0)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (L_j |c_{ji}| \| \Gamma \| \tau e^{\sigma \tau}) \sup_{-\tau \leq s \leq 0} Y_i(s)] \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{ 1 + \| \Gamma \| L_i \tau e^{\sigma \tau} \sum_{j=1}^n |c_{ji}| \} \sum_{i=1}^n \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |y_i(s)|. \quad (11)$$

设 $M = \max_{1 \leq i \leq n} \{ 1 + L_i \| \Gamma \| \tau e^{\sigma \tau} \sum_{j=1}^n |c_{ji}| \} \geq 1$, 可得 $\sum_{i=1}^n |v_i(t) - w_i(t)| \leq M \sum_{i=1}^n \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |v_i(s) - w_i(s)| e^{-\alpha t}$, 其中指数 $\alpha = \sigma - 1 = \lambda, \sigma > 1$, 定理 1 证毕。

3 例子

考虑网络模型的驱动系统为: $\dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^3 (a_{ij} x_j(t)) + \sum_{j=1}^3 (c_{ij} \Gamma x_j(q_{ij} t)), i = 1, 2, 3$. 响应系统为: $\dot{z}_i(t) = - \sum_{j=1}^3 (a_{ij} z_j(t)) + \sum_{j=1}^3 (c_{ij} \Gamma z_j(q_{ij} t)) + u_i(t), i = 1, 2, 3$. 令 $v_i(t) = x_i(e^t), w_i(t) = z_i(e^t), y_i(t) = v_i(t) - w_i(t)$. $\dot{v}_i(t) = e^t \{ - \sum_{j=1}^3 (a_{ij} v_j(t)) + \sum_{j=1}^3 (c_{ij} \Gamma v_j(t - \tau_{ij})) \}, i = 1, 2, 3$. $\dot{w}_i(t) = e^t \{ - \sum_{j=1}^3 (a_{ij} w_j(t)) + \sum_{j=1}^3 (c_{ij} \Gamma w_j(t - \tau_{ij})) + U_i(t) \}, i = 1, 2, 3$. 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & -0.1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}, \tau_{ij} = -\log(q_{ij})$, 其中 $U_i(t) = [(\sigma - 1)e^{-t} + L + \sum_{j=1}^n (|c_{ji}| L_i \| \Gamma \| e^{\sigma(-\log q_{ji})})] y_i(t)$, $\sigma = 2, L = 1, L_i = 1, \| \Gamma \| = 1$. 初始值 $(v_1(t_0), v_2(t_0), v_3(t_0))^T = (2, 5, -5)^T, (w_1(t_0), w_2(t_0), w_3(t_0))^T = (20, 1, 6)^T$. 图 1 ~ 图 4 分别是 $v_i(t)$ 、 $w_i(t)$ 、 $v_i(t) - w_i(t)$ 、 $U_i(t)$ 的变化曲线图, 其中 $t \in [0, 6.9]$. 又因为图 3、图 4 中初始波动过大, 在图 5、图 6 中取 $t \in [1.38, 6.9]$, 可以清楚地看到变化的情况。

在控制项 $U_i(t) = [(\sigma - 1)e^{-t} + L + \sum_{j=1}^n (|c_{ji}| L_i \| \Gamma \| e^{\sigma(-\log q_{ji})})] y_i(t)$ 中, $y_i(t)$ 起到了决定性的作用。令 $U_i(t) = y_i(t)$, 图 7 ~ 图 9 是改了控制项后的 $w_i(t)$ 、 $v_i(t) - w_i(t)$ 、 $U_i(t)$ 在 $t \in [1.38, 6.9]$ 上的变化曲线图。从图 5 和图 8, 图 6 和图 9 的对比中可以明显看出, 改了控制项后收敛速率下降, 而且这是把时间 t 变成 e^t 后的方程, 即收敛速率下降了很多倍。由此可以看出, 本文设计的控制项具有良好的控制效果。

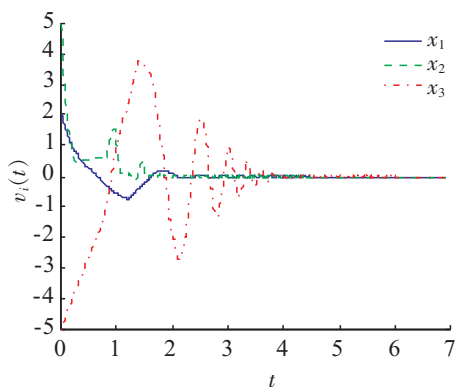


图 1 驱动系统的变化曲线图

Fig.1 The change of the drive system

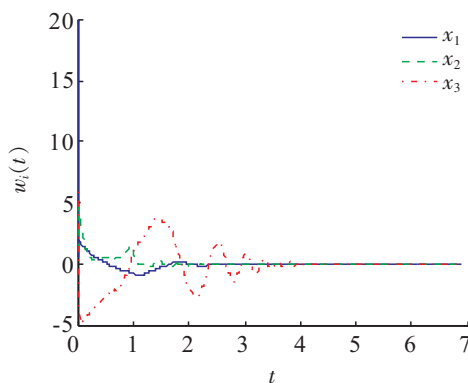


图 2 响应系统的变化曲线图

Fig.2 The change of the response system

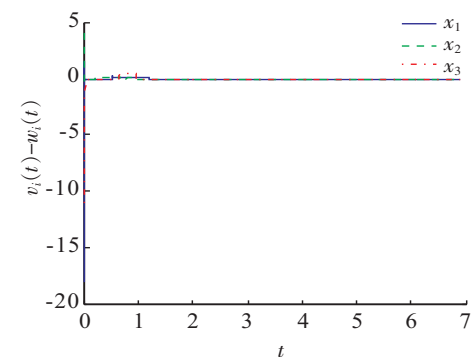


图 3 同步误差的变化曲线图

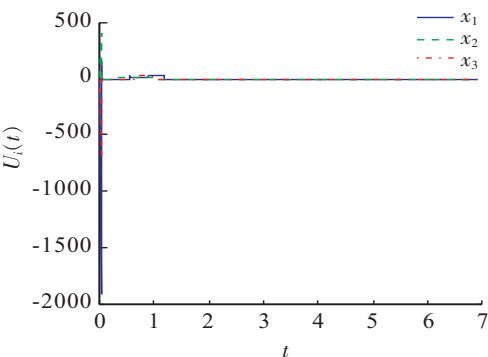


图 4 控制项的变化曲线图

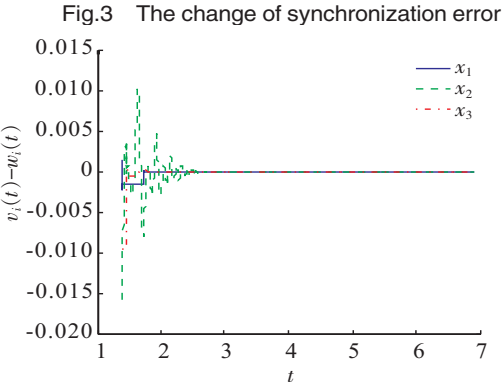


图 5 部分的同步误差变化曲线图

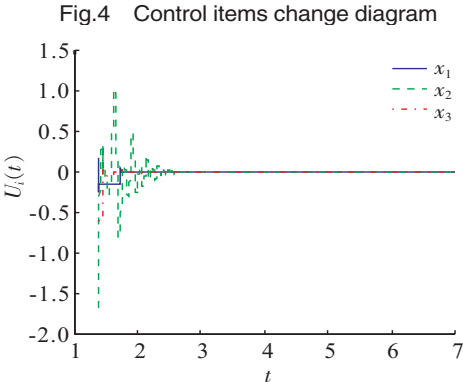


图 6 部分的控制项变化曲线图

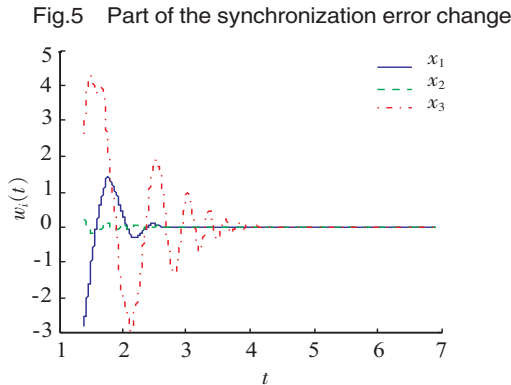


图 7 修改了控制项的响应系统变化曲线图
Fig.7 Modify the control response of the system change

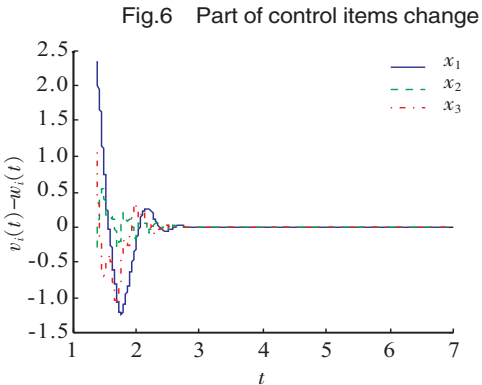


图 8 修改了控制项的同步误差变化曲线图
Fig.8 Modify the control of synchronous error change

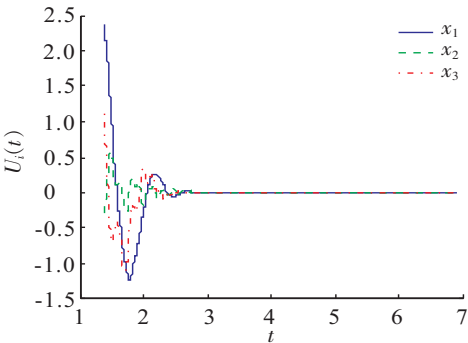


图 9 修改了控制项的控制项变化曲线图
Fig.9 Modify the control of control items change

4 结论

本文研究了一类具有比例时滞和非线性耦合的驱动-响应复杂网络系统,通过对驱动系统的时间 t 进行变量代换,构造李雅普诺夫泛函,得到了使驱动系统与响应系统之间误差稳定的控制项。最后进行了数值模拟,证明了系统的指数型同步性。

[参考文献]

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems [J]. Physical Review Letters, 1990, 64(8): 142-145. DOI:10.1103/PhysRevLett. 64. 821.
- [2] CHENG S, JI J C, ZHOU J. Fast synchronization of directionally coupled chaotic systems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(1/2): 127-136. DOI:10.1016/j.apm.2012.02.018.
- [3] CHEN L, CHAI Y, WU R, et al. Cluster synchronization in fractional-order complex dynamical networks [J]. Physics Letters A, 2012, 376(35): 2381-2388. DOI:10.1016/j.physleta.2012.05.060.
- [4] FEKI M. An adaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2003, 18(1): 141-148. DOI:10.1016/S0960-0779(02)00585-4.
- [5] LIN J S, HUNG M L, YAN J J, et al. Decentralized control for synchronization of delayed neural networks subject to dead-zone nonlinearity [J]. Nonlinear Analysis, 2007, 67(6): 1980-1987. DOI:10.1016/j.na.2006.07.048.
- [6] BURBANO D, BERNARDO M D. Consensus and synchronization of complex networks via proportional-integral coupling [C] //IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Melbourne VIC: IEEE, 2014: 1796-1799. DOI:10.1109/ISCAS.2014.6865505.
- [7] CHEN Y, QIAO C, HAMDI M, et al. Proportional differentiation: a scalable QoS approach [J]. IEEE Communications Magazine, 2003, 41(6): 52-58. DOI:10.1109/MCOM.2003.1204748.
- [8] AGARKHED J, BIRADAR G S, MYTRI V D. Energy efficient QoS routing in multi-sink wireless multimedia sensor networks [J]. International Journal of Computer Science & Network Security, 2012, 12(5): 731-736.
- [9] 周立群, 刘纪茹. 一类具比例时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2016, 38(4): 673-682.
- [10] ZHOU L. Delay-dependent exponential synchronization of recurrent neural networks with multiple proportional delays [J]. Neural Processing Letters, 2015, 42(3): 619-632. DOI:10.1007/s11063-014-9377-2.
- [11] 李文林, 苗静, 刘振红. 含时滞的复杂动态网络模型的指数同步 [J]. 河南师范大学学报 (自然科学版), 2009, 37(5): 1-4.
- [12] 蒲浩, 蒋海军, 刘衍民, 等. 带有离散滞后时滞和非线性脉冲效应的模糊细胞神经网络的指数同步 [J]. 西南大学学报 (自然科学版), 2015, 37(7): 102-110.
- [13] 周立群. 多比例时滞细胞神经网络的指数周期性与稳定性 [J]. 生物数学学报, 2012(3): 480-488.
- [14] SALARIEH H, SHAHROKHI M. Dual synchronization of chaotic systems via time-varying gain proportional feedback [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2008, 38(5): 1342-1348. DOI:10.1016/j.chaos.2008.02.015.
- [15] WANG W, LI L, PENG H, et al. Anti-synchronization control of memristive neural networks with multiple proportional delays [J]. Neural Processing Letters, 2016, 43(1): 269-283. DOI:10.1007/s11063-015-9417-6.
- [16] FENG N, WU Y, WANG W, et al. Exponential cluster synchronization of neural networks with proportional delays [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2015, 2015(3): 1-10. DOI:10.1155/2015/523424.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)