

空间分数阶扩散方程的多项式点插值配置法

危国华

(福建广播电视大学三明分校, 福建 三明 365000)

[摘要] 采用多项式基点插值配置法, 求解带有双侧导数的空间分数阶微分方程。首先给出利用多项式基点插值离散得到的数值逼近格式; 然后给出数值算例, 分别采用规则点和散点离散空间变量, 均得到近似程度较好的计算结果, 很好地验证了所提出数值方法的有效性。

[关键词] 空间分数阶微分方程; 多项式基; 配置法; Riemann-Liouville 分数阶导数; 形函数

[中图分类号] O 241.8

Polynomial Point Interpolation Collocation Method for Spatial Fractional Diffusion Equation

WEI Guohua

(Sanming Branch, The Open University of Fujian, Sanming 365000, China)

Abstract: In this paper, we make the first attempt to apply polynomial point interpolation collocation method for solving spatial fractional differential equation with two-side derivative. Firstly, numerical approximation scheme was obtained by polynomial point interpolation. Then numerical examples, discretizing space variable with both regular nodes and irregular nodes, had good approximation results, which testified the validity of the proposed numerical method.

Keywords: spatial fractional differential equation; polynomial; collocation method; Riemann-Liouville fractional derivative; shape function

0 引言

近年来, 分数阶微积分以及分数阶微分方程在模拟自然界的各种现象中得到了广泛应用^[1-4], 随后分数阶微分方程的数值求解也成为研究者们的一个研究热点^[5-11]。针对空间分数阶微分方程的数值方法, 已有文献采用有限差分方法^[12]、有限元方法^[13]和谱方法^[14]进行处理。在离散微分方程之前, 有限差分方法需要对区域利用规则均匀点进行划分, 有限元方法和谱方法需要对区域进行划分并生成网格, 这些方法使得在处理二维情形时仅限于规则区域上的问题。鉴于无网格方法不需要生成网格, 可以方便处理不规则区域, 本文首次尝试将其应用到空间分数阶微分方程中, 采用多项式基点插值配置法处理带有双侧分数阶导数的空间分数阶微分方程, 在数值例子中分别采用等间距节点以及不规则散点离散空间变量, 均得到了较好的结果。

本文讨论如下带有双侧分数阶导数的空间分数阶微分方程:

$$\partial u(x, t) / \partial t = k_{1a} D_x^\alpha u(x, t) + k_{2x} D_b^\alpha u(x, t) + f(x, t), x \in [a, b], t > 0, \quad (1)$$

[收稿日期] 2017-08-03

[修回日期] 2017-10-10

[作者简介] 危国华 (1960—), 男, 讲师, 从事微分方程数值解方向研究。

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

带有初边值条件: $u(x, 0) = \omega(x), x \in [a, b], \begin{cases} u(a, t) = 0 \\ u(b, t) = 0 \end{cases}, 0 < t \leq T$, 其中 ${}_a D_x^\alpha, {}_x D_b^\alpha$ 分别为左、右侧

Riemann-Liouville 分数阶导数算子, 定义为: ${}_a D_x^\alpha u(x, t) = 1/\Gamma(2 - \alpha) \cdot \partial^2/\partial x^2 \int_a^x u(\xi, t)/(x - \xi)^{\alpha-1} d\xi$,

${}_x D_b^\alpha u(x, t) = 1/\Gamma(2 - \alpha) \cdot \partial^2/\partial x^2 \int_x^b u(\xi, t)/(\xi - x)^{\alpha-1} d\xi$, 其中 $1 < \alpha < 2$, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数。

本文假设空间分数阶微分方程的解满足 $u(x, \cdot) \in C^2(0, T)$ 。

1 离散格式

1.1 多项式点插值

首先, 在问题域 $[a, b]$ 内生成场节点, 节点可以随机生成, 也可以人工加入节点。设有内部节点 x_1, x_2, \dots, x_d 和边界节点 x_0, x_{d+1} 。

对每一个场节点, 都做一个包含该节点的支持域, 在实际计算中, 一般取节点平均间距的 2~3 倍大小^[15]。设第 i 个节点的支持域为 Ω_i , 支持域 Ω_i 内包含 n_i 个节点 $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n_i}}$ 。为书写方便, 记 $D_i = \{i_1, i_2, \dots, i_{n_i}\}$, 这也就意味着, 当 $l \in D_i$ 时, $x_l \in \Omega_i$ 。

接下来在节点的支持域内对函数 $u(x)$ 及其左侧分数阶导数利用基函数进行插值逼近。为了描述方便, 假设计算点 x 的支持域内包含 n 个场节点 x_1, x_2, \dots, x_n , 连续函数 $u(x)$ 对应于这些场节点上的函数值分别为 u_1, u_2, \dots, u_n 。因此, 函数 $u(x)$ 可以由这组场节点近似表示为:

$$\bar{u}(x) = \sum_{j=1}^m (p_j(x) a_j) = [p_1(x) \quad p_2(x) \quad \cdots \quad p_m(x)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a}, \quad (2)$$

其中 $p_j(x) (j = 1, 2, \dots, m)$ 为空间坐标变量的单项式, 被称为多项式基, m 是多项式基的个数, $a_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 为一组待定常数。通常使用的一维 k 次完备多项式基为

$$\mathbf{p}^T(x) = \{1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^k\}, \quad (3)$$

其中基函数的个数满足 $m = k + 1$ 。

假设 x 点的支持域内包括 n 个节点。传统的多项式基点插值中, 一般选取与基函数个数 m 相同数

目的节点作为支持域, 即 $n = m$ 。为了得到待定系数 a_i , 令 $\bar{u}(x_i) = u_i$, 于是, $u_1 = \sum_{i=1}^m (a_i p_i(x_1)) =$

$$a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + \cdots + a_m x_1^k, u_2 = \sum_{i=1}^m (a_i p_i(x_2)) = a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + \cdots + a_m x_2^k, \cdots, u_n =$$

$$\sum_{i=1}^m (a_i p_i(x_n)) = a_1 + a_2 x_n + a_3 x_n^2 + \cdots + a_m x_n^k。写成矩阵形式为$$

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{a}, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{U}_s = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n]^T$ 是节点上的函数值向量, $\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_m]^T$ 为待定系数矩阵,

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^k \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^k \end{bmatrix}。$$

由于 $n = m$, 矩阵 \mathbf{P}_m 是 $n \times n$ 维的方阵。由式 (4), 有:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_m^{-1} \mathbf{U}_s。 \quad (5)$$

将式 (5) 代入式 (2), 并令 $n = m$, 可得: $\bar{u}(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{P}_m^{-1} \mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^n (\varphi_i(x) u_i) = \boldsymbol{\Phi}^T(x) \mathbf{U}_s$, 其中 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是形函数向量, 其定义为:

$$\boldsymbol{\Phi}^T(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{P}_m^{-1} = (\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad \cdots \quad \varphi_n(x))^T. \quad (6)$$

形函数的 α 阶 (α 为正实数) 左侧 Riemann 导数为: ${}_a D_x^\alpha \boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{bmatrix} {}_a D_x^\alpha \varphi_1(x) \\ {}_a D_x^\alpha \varphi_2(x) \\ \vdots \\ {}_a D_x^\alpha \varphi_n(x) \end{bmatrix} = {}_a D_x^\alpha \mathbf{p}^T(x) \mathbf{P}_m^{-1}.$

一维 k 次完备多项式基式 (3) 取为 $\bar{\mathbf{p}}^T(x) = \{1 \quad (b-x) \quad (b-x)^2 \quad \cdots \quad (b-x)^k\}$ 。类似地, 可得到用来计算函数 $u(x, t)$ 右侧分数阶导数的形函数的 α 阶 (α 为正实数) 右侧 Riemann 导数为:

$${}_x D_b^\alpha \bar{\boldsymbol{\Phi}}(x) = \begin{bmatrix} {}_x D_b^\alpha \bar{\varphi}_1(x) \\ {}_x D_b^\alpha \bar{\varphi}_2(x) \\ \vdots \\ {}_x D_b^\alpha \bar{\varphi}_n(x) \end{bmatrix} = {}_x D_b^\alpha \bar{\mathbf{p}}^T(x) \mathbf{P}_m^{-1}.$$

1.2 全离散格式

首先利用合适的场节点离散空间区域, 采用 PIM 形函数逼近 $u(x, t)$, 假设有 $M+1$ 个场节点: $x_0 < x_1 < \cdots < x_M$, 其中包括 $M-1$ 个内点和两个边界点。假设 x_i 的支持域 $\{x_l, l = i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ 用来构造形函数, 并记 $D_i = \{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$, $u_i(t) = u(x_i, t)$, $f_i(t) = f(x_i, t)$, ${}_a D_x^\alpha u_i(t) = {}_a D_x^\alpha u(x_i, t) = 1/\Gamma(2-\alpha) \left[\partial^2/\partial x^2 \int_a^x u(\xi, t)/(x-\xi)^{\alpha-1} d\xi \right] \Big|_{x=x_i}$, ${}_x D_b^\alpha u_i(t) = {}_x D_b^\alpha u(x_i, t) = 1/\Gamma(2-\alpha) \left[\partial^2/\partial x^2 \int_x^b u(\xi, t)/(\xi-x)^{\alpha-1} d\xi \right] \Big|_{x=x_i}$, 得到 $M+1$ 个方程: $\begin{cases} \partial u_i(t)/\partial t = k_{1a} {}_a D_x^\alpha u_i(t) + k_{2x} {}_x D_b^\alpha u_i(t) + f_i(t), i = 1, 2, \cdots, M-1, \\ u_0(t) = 0, u_M(t) = 0. \end{cases}$

由于 PIM 形函数式 (6) 满足 Kronecker delta 条件, 则有 $\sum_{j \in D_i} (u_j(t) \varphi_j(x_i)) = u_i(t)$ 。

接下来离散时间变量, 记 $t_n = n\tau, n = 0, 1, \cdots, N$, 其中 $\tau = T/N$ 为时间步长。全离散格式为:

$$u_i^{n+1} - \tau \sum_{j \in D_i} \{ u_j^{n+1} [k_{1a} {}_a D_x^\alpha \varphi_j(x_i) + k_{2x} {}_x D_b^\alpha \varphi_j(x_i)] \} = u_i^n + \tau f_i^{n+1}, i = 1, 2, \cdots, M-1, \quad (7)$$

其中 u_i^n 为 $u(x_i, t_n)$ 的近似解。由幂函数的分数阶导数公式^[16]: ${}_a D_x^\alpha (x-a)^\gamma = \Gamma(\gamma+1)/\Gamma(\gamma-\alpha+1) (x-a)^{\gamma-\alpha}, 0 \leq m \leq \alpha < m+1, \gamma > m$, ${}_x D_b^\alpha (b-x)^\gamma = \Gamma(\gamma+1)/\Gamma(\gamma-\alpha+1) (b-x)^{\gamma-\alpha}, 0 \leq m \leq \alpha < m+1, \gamma > m$, 得到形函数 $\varphi_j(x) (j = 1, 2, \cdots, n)$ 在 x_i 的分数阶导数表达式为:

$$\begin{bmatrix} {}_a D_x^\alpha \varphi_1(x_i) \\ {}_a D_x^\alpha \varphi_2(x_i) \\ \vdots \\ {}_a D_x^\alpha \varphi_n(x_i) \end{bmatrix} = [(x_i - a)^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha), (x_i - a)^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha), \cdots, (x_i - a)^{k-\alpha}/\Gamma(k+1-\alpha)] \mathbf{P}_{i,m}^{-1}, k = n-1, \begin{bmatrix} {}_x D_b^\alpha \varphi_1(x_i) \\ {}_x D_b^\alpha \varphi_2(x_i) \\ \vdots \\ {}_x D_b^\alpha \varphi_n(x_i) \end{bmatrix} = [(1-x_i)^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha), (1-x_i)^{1-\alpha}/\Gamma(2-\alpha), \cdots, (1-x_i)^{k-\alpha}/\Gamma(k+1-\alpha)] \mathbf{P}_{i,m}^{-1},$$

$k = n-1$, 其中 $\mathbf{P}_{i,m}$ 为节点 x_i 的支持域 $\{x_l, l = i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ 形成的方阵,

$$P_{i,m} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i_1} & x_{i_1}^2 & \cdots & x_{i_1}^k \\ 1 & x_{i_2} & x_{i_2}^2 & \cdots & x_{i_2}^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{i_n} & x_{i_n}^2 & \cdots & x_{i_n}^k \end{bmatrix} \circ$$

2 数值结果

为了避免在计算中产生 Runge 现象, 在每个场节点 x_i 处, 取 $n = 6$, 也就是选择 6 个临近节点作为其支持域 $\{x_l, l = i_1, i_2, \dots, i_6\}$, 于是 $k = 5$, 基函数为 5 次完备多项式基。

例 1 考虑下列含有单侧导数的方程: $\partial u(x, t) / \partial t = {}_0 D_x^\alpha u(x, t) + f(x, t), x \in [0, 1], t > 0$, 带有边界条件 $\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = e^t \end{cases}, t \in (0, 1]$, 以及初始条件 $u(x, 0) = x^3, x \in [0, 1]$ 精确解为 $u(x, t) = e^t x^3$, 源项为 $f(x, t) = e^t (x^3 - 6/\Gamma(4 - \alpha)x^{3-\alpha})$, 并取 $\alpha = 1.8$ 。

先将问题域 $[0, 1]$ 用规则节点 $x_i = ih (i = 0, 1, 2, \dots, 50)$ 划分, 采用全离散格式式 (7) 进行求解 (计算中取 $m = 5$), 从图 1 中可以看出, 精确解和数值解吻合得很好。表 1 中列出时间步长变化时, 数值解与精确解的误差以及误差阶。

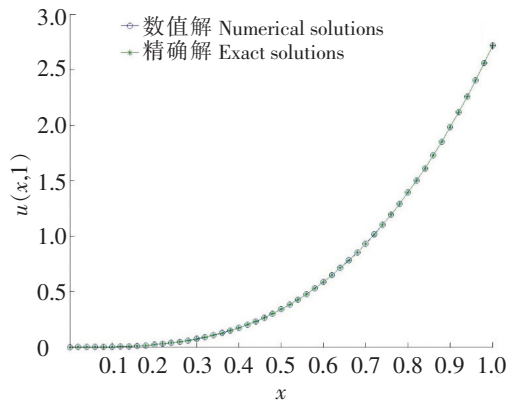


图 1 采用规则点划分求解具有单侧导数方程的数值解与精确解

Fig.1 Numerical and exact solutions with left fractional derivative for regular distributed nodes

表 1 采用规则点划分求解具有单侧导数的方程的数值解与精确解的误差以及误差阶

Tab.1 Error and error-order of the numerical and exact solutions for regular distributed nodes

τ	ε_2	order ₂	ε_∞	order _{∞}
1/10	2.214 9e-002	—	3.708 8e-002	—
1/20	1.131 1e-002	0.969 5	1.894 0e-002	0.969 5
1/40	5.715 4e-003	0.984 9	9.569 8e-003	0.984 9
1/80	2.872 7e-003	0.992 5	4.809 9e-003	0.992 5
1/160	1.440 1e-003	0.996 2	2.411 3e-003	0.996 2
1/320	7.210 1e-004	0.998 1	1.207 2e-003	0.998 1

接下来将问题域 $[0, 1]$ 用不规则节点划分, 采用全离散格式式 (7) 进行求解。图 2 给出此时精确解与数值解, 表 2 列出针对不规则点划分空间变量时间步长变化时, 数值解与精确解的误差以及误差阶。可以看出, 本文所提出的数值方法仍然适用于不规则点划分。

例 2 考虑下列具有双侧分数阶导数的空间分数阶微分方程: $\partial u(x, t) / \partial t = {}_0 D_x^\alpha u(x, t) + {}_x D_1^\alpha u(x, t) + f(x, t), x \in [0, 1], t > 0$, 带有边界条件 $\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{cases}, t \in (0, 1]$, 以及初始条件: $u(x, 0) = 0, x \in [0, 1]$, 其中精确解为 $u(x, t) = t^2 x^2 (1 - x)^2$, 由分数阶导数的 Leibniz 公式^[16]: ${}_a D_x^\alpha (\varphi(x)\psi(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^{(k)}(x) {}_a D_x^{\alpha-k} \psi(x)$, ${}_x D_b^\alpha (\varphi(x)\psi(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \varphi^{(k)}(x) {}_x D_b^{\alpha-k} \psi(x)$, 其中 $\binom{\alpha}{k} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)/k!$, 得到源项为: $f(x, t) = 2tx^2(1-x)^2 + t^2[2((1-x)^2 x^{2-\alpha} + x^2(1-x)^{2-\alpha})/\Gamma(3-\alpha) - 4\alpha((1-x)x^{3-\alpha} - x(1-x)^{3-\alpha})/\Gamma(4-\alpha) + 2\alpha(\alpha-1)(x^{4-\alpha} + (1-x)^{4-\alpha})/\Gamma(5-\alpha)]$ 。

取 $\alpha = 1.8$, 分别将问题域 $[0, 1]$ 用规则节点 $x_i = ih (i = 0, 1, 2, \dots, 50)$ 和不规则节点划分, 采用全离散格式式 (7) 进行求解 (计算中取 $m = 5$)。从图 3 和图 4 中可以看出, 无论是规则点, 还是不等距节

点,精确解和数值解吻合得很好。表 3 和表 4 给出规则点和不规则点划分空间变量,时间步长变化时的误差以及误差阶。

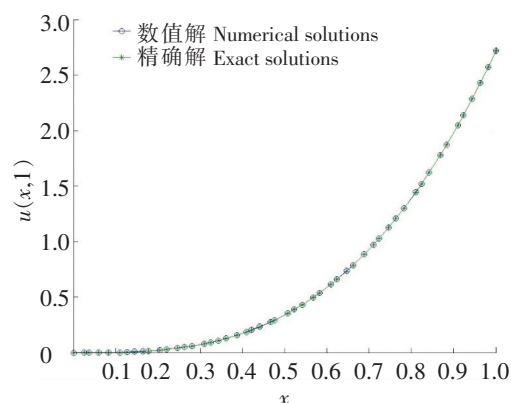


图 2 采用不规则点划分求解具有单侧导数的方程的数值解与精确解

Fig.2 Numerical and exact solutions with left fractional derivative for irregular distributed nodes

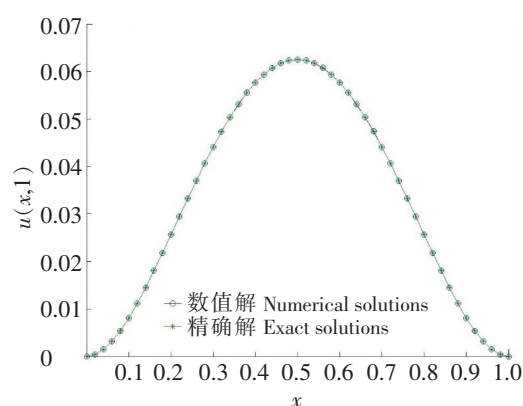


图 3 采用规则点划分求解具有双侧导数的方程的数值解与精确解

Fig.3 Numerical and exact solutions with two-side fractional derivative for regular distributed nodes

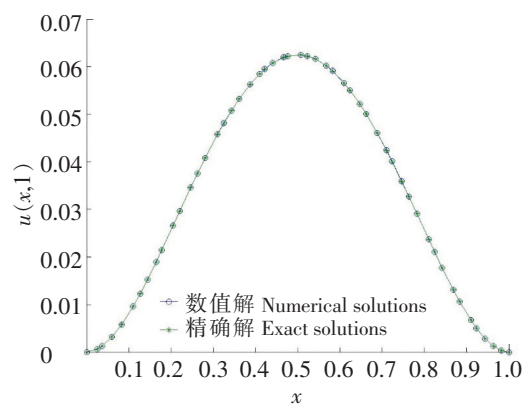


图 4 不规则点划分求解具有双侧导数的方程的数值解与精确解

Fig.4 Numerical and exact solutions with two-side fractional derivative for irregular distributed nodes

表 2 采用不规则点划分求解具有单侧导数方程的数值解与精确解的误差以及误差阶

Tab.2 Error and error-order of the numerical and exact solutions for irregular distributed nodes

τ	ε_2	order_2	ε_∞	order_∞
1/10	2.184 1e-002	—	3.702 5e-002	—
1/20	1.115 4e-002	0.969 5	1.890 8e-002	0.969 5
1/40	5.635 9e-003	0.984 9	9.553 5e-003	0.984 9
1/80	2.832 7e-003	0.992 5	4.801 8e-003	0.992 5
1/160	1.420 1e-003	0.996 2	2.407 1e-003	0.996 2
1/320	7.109 6e-004	0.998 1	1.205 1e-003	0.998 1

表 3 采用规则点划分求解具有双侧导数的方程的数值解与精确解的误差以及误差阶

Tab.3 Error and error-order of the numerical and exact solutions for regular distributed nodes

τ	ε_2	order_2	ε_∞	order_∞
1/10	3.867 4e-003	—	2.838 5e-004	—
1/20	1.933 7e-003	1.000 0	1.419 2e-004	1.000 0
1/40	9.668 6e-004	1.000 0	7.096 2e-005	1.000 0
1/80	4.834 3e-004	1.000 0	3.548 1e-005	1.000 0
1/160	2.417 2e-004	1.000 0	1.774 1e-005	1.000 0
1/320	1.208 7e-004	0.999 9	8.870 7e-006	1.000 0

表 4 采用规则点划分求解具有双侧导数的方程的数值解与精确解的误差以及误差阶

Tab.4 Error and error-order of the numerical and exact solutions for irregular distributed nodes

τ	ε_2	order_2	ε_∞	orde_∞
1/10	4.883 4e-003	—	3.073 9e-004	—
1/20	2.441 7e-003	1.000 0	1.537 0e-004	1.000 0
1/40	1.220 8e-003	1.000 1	7.684 3e-005	1.000 1
1/80	6.102 8e-004	1.000 2	3.841 6e-005	1.000 2
1/160	3.050 4e-004	1.000 5	1.920 2e-005	1.000 5
1/320	1.524 2e-004	1.000 9	9.594 8e-006	1.000 9

3 结论

本文将基于多项式基点插值配置法处理带有双侧分数阶导数的空间分数阶微分方程, 在数值例子中分别采用等间距节点以及不规则散点离散空间变量, 均得到了较好的逼近结果。但是, 由于无网格方法理论上的匮乏, 即使在讨论传统的整数阶微分方程时, 此方法在空间上的逼近阶数也不能得到保证。由于传统方法在不规则区域上的局限性, 在后续工作中, 笔者将继续探讨将其应用到二维不规则区域上的空间分数阶微分方程。

[参考文献]

- [1] HAVLIN S, BEN-AVRAHAM D. Diffusion in disordered media: advances in physics [J]. 2002, 51: 187-292. DOI: 10.1016/0169-7439(91)80040-W.
- [2] ATHAR M, FETEAU C. Unsteady flow of a generalized Maxwell fluid with fractional derivative due to a constantly accelerating plate [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57: 596-603. DOI:10.1016/j.camwa.2008.09.052.
- [3] YANG D, ZHU K Q. Start-up flow of a viscoelastic fluid in a pipe with the fractional Maxwell's model [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 60(8): 2231-2238. DOI:10.1016/j.camwa.2010.08.013.
- [4] 王建宏, 殷姝. 一类分数阶混沌系统的滑膜控制 [J]. 机械制造与自动化, 2016, 45(3): 180-183. DOI:10.19344/j.cnki.issn1671-5276.2016.03.054.
- [5] LIU F, ANH V, TURNER I, et al. Numerical simulation for solute transport in fractal porous media [J]. Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal, 2004, 45:461-473. DOI:10.21914/ANZIAMJ.V45I0.901.
- [6] ROOP J P. Computational aspects of FEM approximation of fractional advection dispersion equation on bounded domains in R^2 [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 193(1): 243-268. DOI:10.1016/j.cam.2005.06.005.
- [7] LIN Y M, XU C J. Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 225(2): 1079-1095. DOI:10.1016/j.jcp.2007.02.001.
- [8] LANGLANDS T, HENRY B, WEARNE S. Solutions of a fractional cable equation: finite case [R]. Sydney: University of New South Wales, 2005.
- [9] LIU Q, GU Y T, ZHUANG P, et al. An implicit RBF meshless approach for time fractional diffusion equations [J]. Computational Mechanics, 2011, 48:1-12. DOI:10.1007/s00466-011-0573-x.
- [10] LI C, DENG W H, SHEN X Q. Exact solutions and their asymptotic behaviors for the averaged generalized fractional elastic models [J]. Communications in Theoretical Physics, 2014, 62(4): 443-450.
- [11] ZHUANG P, LIU F, TURNER I, et al. Galerkin finite element method and error analysis for the fractional cable equation [J]. Numerical Algorithms, 2016, 72: 447-466. DOI:10.1007/s11075-015-0055-x.
- [12] ZENG F H, LIU F W, LI C P, et al. A Crank-Nicolson ADI spectral method for a two-dimensional Riesz space fractional nonlinear reaction-diffusion equation [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2014, 52(6): 2599-2622. DOI: 10.1137/130934192.
- [13] ZHAO Y Z, BU W B, HUANG J F, et al. Finite element method for two-dimensional space-fractional advection-dispersion equations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 257: 553-565. DOI:10.1016/j.amc.2015.01.016.
- [14] ZHANG Y X, DING H F. High-order algorithm for the two-dimension Riesz space-fractional diffusion equation [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2017, 94(10): 2063-2073. DOI:10.1080/00207160.2016.1274746.
- [15] LIU G R. Mesh free methods: moving beyond the finite element method [M]. Boca Raton: CRC Press, 2005.
- [16] PODLUBNY I. Fractional differential equations [M]. New York: Academic Press, 1999.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)