[文章编号] 1007 - 7405(2019)01 - 0064 - 04　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2019.01.10

一类具有媒体报道的传染病模型

陈　娟[1]，戴斌祥[2]，李文秀[3]

（1. 集美大学理学院，福建 厦门 361021；2. 中南大学数学与统计学院，湖南 长沙 410083；
3. 湖南大学数学与计量经济学院，湖南 长沙 410082）

[摘要] 将媒体报道量 M 视为时间 t 的函数，利用非连续函数 $\beta/(1+\varepsilon MI)$ 来刻画媒体报道对传染率的影响，建立了一个分段光滑的 SIM 传染病模型，给出了模型的非负平衡点的存在性。利用微分方程线性化稳定性理论分析，得到了系统的各平衡点局部稳定的阈值条件，并进一步利用 Poincare-Bendixon 定理给出了正平衡点全局渐近稳定的充分条件。

[关键词] 媒体报道；传染病模型；局部稳定性；全局稳定性

[中图分类号] O 23

A Class of Epidemic Model with Media Coverage

CHEN Juan[1], DAI Binxiang[2], LI Wenxiu[3]

(1. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China;
3. School of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: In this paper, the media coverage M is considered as a function of time t. Using discontinuous function $\beta/(1+\varepsilon MI)$ to describe the influence of media coverage on the infection rate, a piecewise-smooth SIM epidemic model is established. The existence of the nonnegative equilibrium of the model is given. The local stability of the equilibrium of the system is obtained by using the linear stability theory of differential equations. A sufficient condition for global asymptotic stability of positive equilibrium is given by using the Poincare-Bendixon theorem.

Keywords: media coverage; epidemic model; local stability; global stability

0　引言

媒体报道对疾病传播的影响的理论研究受到了越来越多学者的关注[1-8]。很多学者都引入了媒体影响因子函数来刻画媒体报道对感染率的影响，如：文献［1］讨论了一个受媒体影响的 EIH 模型，其中的媒体影响因子函数为 $\beta e^{-\alpha_1 E-\alpha_2 I-\alpha_3 H}$，$E,I,H$ 分别表示易感者、感染者和住院者；文献［2］引入函数 βe^{-mI} 作为媒体影响因子建立了 SEI 模型，讨论了模型的动力学性态；文献［3-6］利用非线性函数（$\mu_1-\mu_2 f(I)$）描述了媒体报道对传染率的影响。上述文献中出现的模型的一个共同假设是，传染病传播时，媒介报道对传染病传播的影响发生在整个疾病传播过程中。然而，事实并非如此。大多

[收稿日期] 2018 - 04 - 20
[基金项目] 国家自然科学基金项目（51479215，11271371）
[作者简介] 陈娟（1961—），女，副教授，从事应用数学研究

数情况下，在一个新出现的传染病的初始阶段，一般个人和公共大众媒体都不知道这种疾病。媒体报道、信息处理和个人对信息的警觉反应只能随着感染个体的数量达到和超过某一水平而出现。因此，媒体报道对感染率的影响用非光滑或非连续函数描述更加合理。文献［7］利用非光滑函数 $f(I) = \begin{cases} e^{-mI}, & 0 < I \leqslant I_c \\ e^{-mI_c} & I > I_c \end{cases}$ 描述了媒体报道对感染率的影响，其中 $m > 0$ 是媒体因子，给出了模型的全局性态。文献［8］引入了非连续函数 $f(I) = e^{-\alpha\varepsilon I}$，说明当感染者数量低于某一阈值时，媒体报道的影响可以忽略不计，而当感染者超过这个阈值时，媒体报道的增加使得人们减少了与感染者的接触而降低了感染率，其中

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & 0 < I \leqslant I_c, \\ 1, & I > I_c。 \end{cases} \tag{1}$$

然而，媒体报道与传染率不单呈指数递减趋势，媒体报道量与染病者的数量以及前期媒体报道的多少有关。文献［9］引入了媒体报道量随着时间变化的函数 $M(t)$，建立了一个非线性传染病模型并进行了理论分析。

本文将媒体报道量 M 视为时间 t 的函数，利用分段连续函数 $\beta/(1+\varepsilon MI)$ 来刻画媒体报道对感染率的影响，其中 ε 如式（1）所定义，建立了一个与媒体报道有关且具有分段感染率的传染病模型，并对其进行动力学分析，以此来研究媒体报道对传染病模型的影响。

1　模型的建立

首先将人群划分为易感者 $S(t)$ 和感染者 $I(t)$，$M(t)$ 表示 t 时刻的媒体报道量，用 $\beta/(1+\varepsilon MI)$ 来表示媒体报道对疾病传染病的消减作用，则可得到如下的传染病模型：

$$\begin{cases} \mathrm{d}S(t)/\mathrm{d}t = \Lambda - \beta SI/(1+\varepsilon MI) - \mu S + \gamma I, \\ \mathrm{d}I(t)/\mathrm{d}t = \beta SI/(1+\varepsilon MI) - \gamma I - \mu I, \\ \mathrm{d}M(t)/\mathrm{d}t = \sigma I - \tau M, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\varepsilon = \begin{cases} 0, & I < I_C, \\ 1, & I > I_C, \end{cases}$ 这里：Λ 是人口内禀增长数；β 是传染率；μ 是自然死亡率；γ 是疾病的恢复率；σ 是染病者数量对媒体报道的影响率；τ 是媒体报道的衰减率；I_C 是感染者的临界值。

系统（2）是分段光滑系统，可将其分为两个系统，令 $H(Z) = I - I_C$，其中 $Z = (S,I)^T$，当 $H(Z) < 0$ 时得到的系统称为 F_{G_1}；当 $H(Z) > 0$ 时得到的系统为 F_{G_2}。故系统（2）可写成如下的分段光滑系统：

$$Z(t) = \begin{cases} F_{G_1}(Z), & Z \in G_1, \\ F_{G_2}(Z), & Z \in G_2, \end{cases} \tag{3}$$

对于系统 F_{G_1}，有 $G_1 = \{Z \in R^2_+ : H(Z) < 0\}$；对于系统 F_{G_2}，有 $G_2 = \{Z \in R^2_+ : H(Z) > 0\}$，其中 $R^2_+ = \{Z = (S,I) : S \geqslant 0, I \geqslant 0\}$。系统的两个区域 G_1 和 G_2 的切换面为 $\Sigma = \{Z \in R^2_+ : H(Z) = 0\}$。为了讨论分段光滑系统的各个平衡态，做出如下定义。

定义 1　对于分段光滑系统（3），若点 Z^* 满足 $F_{G_1}(Z^*) = 0$，$H(Z^*) < 0$ 或者 $F_{G_2}(Z^*) = 0$，$H(Z^*) > 0$，那么称点 Z^* 为系统（3）的真平衡态；如果点 Z^* 满足 $F_{G_1}(Z^*) = 0$，$H(Z^*) > 0$ 或者 $F_{G_2}(Z^*) = 0$，$H(Z^*) < 0$，那么称点 Z^* 为系统（3）的假平衡态。

2　模型的分析

对于系统 F_{G_1} 和 F_{G_2}，解得其无病平衡点均为 $E_0 = (\Lambda/\mu, 0, 0)$，基本再生数均为 $R_0 = \Lambda\beta/(\mu(\gamma +$

μ))。当 $R_0>1$ 时，系统 F_{G_1} 的正平衡点为：$E_1=((\gamma+\mu)/\beta,(\Lambda\beta-\mu(\gamma+\mu))/(\beta\mu),\sigma(\Lambda\beta-\mu(\gamma+\mu))/(\tau\beta\mu))$；系统 F_{G_2} 的正平衡点 E_2 满足：

$$\begin{cases}\Lambda-\beta SI/(1+MI)-\mu S+\gamma I=0,\\ \beta SI/(1+MI)-\gamma I-\mu I=0,\\ \sigma I-\tau M=0,\end{cases}\tag{4}$$

由式（4）第三式得 $M=\sigma I/\tau$，由第二式得 $S=(\gamma+\mu)(1+MI)/\beta$，代入到第一式得：$AI^2+BI+C=0$，其中：$A=\mu\sigma(\gamma+\mu)$；$B=\beta\tau\mu$；$C=\tau\mu(\gamma+\mu)-\beta\Lambda\tau$。由 $R_0>1$，有 $A>0$，$B>0$，$C<0$，此时 $AI^2+BI+C=0$ 有唯一正根 $I^*=(-B+\sqrt{B^2-4AC})/(2A)$，从而系统 F_{G_2} 存在正平衡点：$E_2=((\gamma+\mu)(\tau+\sigma I^{*2})/(\beta\tau),I^*,\sigma I^*/\tau)$。

计算出平衡点之后，根据感染者数目 I 和临界值 I_C 的关系，以下分两种情况讨论。

1）在 $I>I_C$ 这种情况下，E_0 是 F_{G_2} 的假平衡态。当 $R_0>\beta I_C/(\gamma+\mu)+1+\sigma I_C^2/\tau$ 时，E_2 是系统 F_{G_2} 的真平衡态；当 $1<R_0\leqslant\beta I_C/(\gamma+\mu)+1+\sigma I_C^2/\tau$ 时，E_2 是系统 F_{G_2} 的假平衡态。事实上，由 $I>I_C$，即 $(-B+\sqrt{B^2-4AC})/(2A)>I_C$，由此可推得 $R_0>\beta I_C/(\gamma+\mu)+1+\sigma I_C^2/\tau$。由于 $F_{G_2}(E_0)=0$，$H(E_0)<0$，故 E_0 是 F_{G_2} 的假平衡态。又由于 $F_{G_2}(E_2)=0$，当 $R_0>\beta I_C/(\gamma+\mu)+1+\sigma I_C^2/\tau$ 时，$H(E_2)>0$，故 E_2 是 F_{G_2} 的真平衡态；当 $1<R_0\leqslant\beta I_C/(\gamma+\mu)+1+\sigma I_C^2/\tau$ 时，$H(E_2)<0$，故 E_2 是系统 F_{G_2} 的假平衡态。

2）在 $I<I_C$ 这种情况下，E_0 是 F_{G_2} 的真平衡态。当 $R_0>\beta I_C/(\gamma+\mu)+1$ 时，E_1 是系统 F_{G_1} 的假平衡态；当 $1<R_0\leqslant\beta I_C/(\gamma+\mu)+1$ 时，E_1 是系统 F_{G_1} 的真平衡态。

定理 1 对于子系统 F_{G_1}，当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，正平衡点 E_1 是局部渐近稳定的。

证明 令 $\boldsymbol{J}(E_0)$ 和 $\boldsymbol{J}(E_1)$ 分别为系统 F_{G_1} 在点 E_0 和 E_1 处的雅克比矩阵，则 $\boldsymbol{J}(E_0)=\begin{pmatrix}-\mu & -\beta\Lambda/\mu & 0\\ 0 & \beta\Lambda/\mu-\gamma-\mu & 0\\ 0 & \sigma & -\tau\end{pmatrix}$。

当 $R_0<1$ 时，$\beta\Lambda/\mu-\gamma-\mu=[\beta\Lambda-\mu(\mu+\gamma)]/\mu<0$，故 E_0 是局部渐近稳定的。

当 $R_0>1$ 时，$\boldsymbol{J}(E_1)=\begin{pmatrix}-[\beta\Lambda-\mu(\mu+\gamma)]/\mu-\mu & -\mu & 0\\ [\beta\Lambda-\mu(\mu+\gamma)]/\mu & 0 & 0\\ 0 & \sigma & -\tau\end{pmatrix}$。该矩阵的特征值 $\lambda_1=-\tau$，λ_2 和 λ_3 满足 $\lambda^2+[(\beta\Lambda-\mu(\mu+\gamma))/\mu+\mu]\lambda+\beta\Lambda-\mu(\mu+\gamma)=0$，则 $\lambda_2+\lambda_3=-\{[\beta\Lambda-\mu(\mu+\gamma)]/\mu+\mu\}<0$，$\lambda_2\lambda_3=\beta\Lambda-\mu(\mu+\gamma)>0$，故所有特征值都具有负实部，因此 E_1 是局部渐近稳定的。定理 1 证毕。

定理 2 对于子系统 F_{G_2}，当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的；当 $R_0>1$ 时，正平衡点 E_2 是局部渐近稳定的。

证明 类似于定理 1 可知，当 $R_0<1$ 时，无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的。令 $\boldsymbol{J}(E_2)$ 为系统 F_{G_2} 在点 E_2 处的雅克比矩阵，则 $\boldsymbol{J}(E_2)=\begin{pmatrix}-\beta\tau I^*/(\tau+\sigma I^{*2})-\mu & -(\gamma\sigma I^{*2}-\mu\tau)/(\tau+\sigma I^{*2}) & 0\\ \beta\tau I^*/(\tau+\sigma I^{*2}) & -\sigma(\mu+\tau)I^{*2}/(\tau+\sigma I^{*2}) & 0\\ 0 & \sigma & -\tau\end{pmatrix}$。该矩阵的特征值 $\lambda_1=-\tau$，λ_2 和 λ_3 满足 $\lambda^2+[\beta\tau I^*/(\tau+\sigma I^{*2})+\mu+\sigma(\mu+\tau)I^{*2}/(\tau+\sigma I^{*2})]\lambda+[(\beta\tau\sigma\mu I^{*3}+\beta\mu\tau^2I^*)/(\tau+\sigma I^{*2})^2]+[\mu\sigma(\mu+\gamma)I^{*2}/(\tau+\sigma I^{*2})]=0$，则 $\lambda_2+\lambda_3=-\{\beta\tau I^*/(\tau+\sigma I^{*2})+\mu+[\sigma(\mu+\tau)I^{*2}/(\tau+\sigma I^{*2})]\}<0$，$\lambda_2\lambda_3=[(\beta\tau\sigma\mu I^{*3}+\beta\mu\tau^2I^*)/(\tau+\sigma I^{*2})^2]+[\mu\sigma(\mu+\gamma)I^{*2}/(\tau+\sigma I^{*2})]>0$，故所有特征值都具有负实部，因此，$E_2$ 是局部渐近稳定的。定理 2

证毕。

定理 3　当 $1 < R_0 < \beta I_C/(\gamma+\mu)+1$ 时，正平衡点 E_1 是系统（2）的真平衡态且是全局渐近稳定的；当 $R_0 > \beta I_C/(\gamma+\mu)+1+\sigma I_C^2/\tau$ 时，正平衡点 E_2 是系统（2）的真平衡态且是全局渐近稳定的。

证明　由定理 1 和定理 2 可知，正平衡点 E_1 和 E_2 分别是局部渐近稳定的，由 Poincare-Bendixon 定理，只需证明系统不存在极限环即可。

取 Dulac 函数 $B = 1/(SI)$，则有：$BF = \Lambda/(SI) - \beta/(1+\varepsilon MI) - (\mu/I) + (\gamma/S)$，$BG = \beta/(1+\varepsilon MI) - (\gamma/S) - (\mu/S)$，可得：当 $I < I_C$ 时，$\partial(BF)/\partial S + \partial(BG)/\partial I = -\Lambda/(S^2 I) - (\gamma/S^2) < 0$；当 $I > I_C$ 时，$\partial(BF)/\partial S + \partial(BG)/\partial I = -\Lambda/(S^2 I) - \gamma/S^2 - \beta M/(1+MI)^2 < 0$。故由 Dulac 准则知系统（2）不存在极限环。所以，在给定条件下，E_1 和 E_2 分别是全局渐近稳定的。定理 3 证毕。

3　结论

本文将媒体报道量 M 视为时间 t 的函数，媒体报道对传染率的影响利用分段连续函数 $\beta/(1+\varepsilon MI)$ 来刻画。利用微分方程线性化稳定性理论，分析了系统的各平衡点的局部稳定性，然后再利用排除极限环的存在性，证明了系统正平衡态的全局稳定性。当 $R_0 < 1$ 时，无病平衡态 E_0 是局部渐近稳定的；当 R_0 满足 $1 < R_0 < \beta I_C/(\gamma+\mu)+1$ 时，地方病 E_1 是系统（2）的真平衡态且是全局渐近稳定的，而 E_2 则是系统的假平衡态；当 R_0 满足 $R_0 > \beta I_C/(\gamma+\mu)+1+\sigma I_C^2/\tau$ 时，地方病平衡点 E_2 是系统（2）的真平衡态且是全局渐近稳定的，而 E_1 则是系统的假平衡态。

[参考文献]

[1] LIU R S，WU J H. Media/psychological impact on multiple outbreaks of emerging infectious disease [J]. Comput Math Methods Med，2007，8(3)：153-164.

[2] CUI J A，SUN Y H，ZHU H P. The impact of media on the control of infectious disease [J]. Journal of Dynamics & Differential Equations，2008，20(1)：31-53.

[3] TCHUENCHE J M，DUBE N，BHUNU C P，et al. The impact of media coverage on the transmisssion dynamic of human influenza [J]. BMC Public Health，2011，11(S1)：1-16.

[4] SUN C J，YANG W，ARINO J，et al. Effect of media-induced social distancing on disease transmision in a two patch setting [J]. Math Biosci，2011，230(2)：87-95.

[5] LI Y F，CUI J A. The effect of constant and pulse vacaination on SIS epidemic models incorporating media coverage [J]. Commun Nonlinear Sci，2008，14(5)：2353-2365.

[6] CUI J A，TAO X，ZHU H P. An SIS infection model incorporating media coverage [J]. Rocky Mountain J Math，2008，38(5)：1323-1334.

[7] 刘玉英，肖燕妮. 一类受媒体报道影响的传染病模型的研究 [J]. 应用数学和力学，2003，34(4)：399-407.

[8] WANG A L，XIAO Y N. A Filippov system describing media effects on spread of infectious disease [J]. Nonlinear Analysis，2014，11(1)：84-97.

[9] MISRA A K，SHARMA A，SHUKLA J B. Modeling and analysis of effects of awareness programs by media on the spread of diseases [J]. Mathematical and Computer Modelling，2011，53(5/6)：1221-1228.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）