

# 多智能体系统的固定时间和有限时间比例一致性

陈超, 赖艺芬

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究无向拓扑下多智能体系统的固定时间和有限时间的比例一致性问题。利用集值映射、微分包含和 Lyapunov 稳定性理论, 给出多智能体系统达到固定时间和有限时间比例一致的判别准则。最后, 给出一个实例, 验证结论的可行性和有效性。

[关键词] 多智能体系统; 固定时间; 有限时间; 比例一致性

[中图分类号] O 175

## Fixed-Time and Finite-Time Scaled Consensus for Multi-Agent Systems

CHEN Chao, LAI Yifen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** In this paper, the problem of fixed-time and finite-time scaled consensus of multi-agent systems under undirected topology was studied. Based on set-value map, differential inclusion and Lyapunov stability theory, fixed-time and finite-time scaled consensus criteria of multi-agent systems were given. Finally, an example was given to illustrate the feasibility and effectiveness of the conclusion.

**Keywords:** multi-agent systems; fixed-time; finite-time; scaled consensus

## 0 引言

自然界纷繁复杂, 人们经常能看到成群的动物聚集在一起, 比如蚁群、牛群、鸟群、鱼群等。这些群体的规模有时达到成千上万, 而且有时并不存在一个统一的领导者, 但这些群体都具有集体捕食和集体抵御天敌的能力, 生物的这种特性被称为“群集行为”。受此启发, 人们开始从不同的角度对这种群集现象进行深入研究, 提出了多智能体的概念, 多智能体系统的研究就是在这种应用需求下应运而生的。从群体行为的不同角度来看, 多智能体系统协同控制大概可以分为聚集问题、蜂拥问题、编队问题等几类, 这几类问题可以看作是一致性问题的延伸和体现。因此, 多智能体系统的一致性是该研究的基础和热点。

多智能体的一致性问题<sup>[1-5]</sup>主要基于多智能体系统中各智能体相互之间的信息交换, 通过设计一致性协议使得所有的智能体的状态趋于一致。在实际应用中, 多智能体系统的收敛速度十分重要, 已

[收稿日期] 2020-02-25

[基金项目] 国家自然科学基金项目(61573005)

[作者简介] 陈超(1978—), 男, 讲师, 硕士, 从事神经网络与优化研究。

有的很多一致性算法使得群体系统状态达到渐近稳定,但实际系统的状态变量不可能在有限的时间内达到平衡状态,因而有限时间一致性问题具有很强的工程应用背景。文献[6-8]研究了多智能体系统的有限时间一致性问题。尽管以上研究很好解决了多智能体系统的有限时间一致性问题,但系统的收敛时间都与智能体的初始状态有关,当系统初始状态很大时,系统收敛时间会受到较大的影响。为了解决初始状态的问题,多智能体系统的固定时间一致性问题得到了学者们的研究<sup>[9-13]</sup>。

相比于文献[6-8],本文提出一种新的协议,即多智能体系统的收敛时间不再依赖于系统的初始状态,同时多智能体不再收敛于同一状态,而是按照既定的比例收敛到不同的状态。

## 1 预备知识及模型介绍

### 1.1 图论

假设多智能体系统包含  $n$  个智能体,无向图  $G = (V, E, A)$  表示各个智能体之间进行信息交换的网络拓扑,有限非空集合  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  表示节点集,其中  $v_i$  表示第  $i$  个智能体,  $E \subseteq V \times V$  表示边集。图  $G$  的邻接矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , 其中  $a_{ii} = 0$ 。如果  $(v_i, v_j) \notin E$ , 那么  $a_{ij} = 0$ , 否则  $a_{ij} > 0$ 。顶点  $v_i$  的度  $d_i$  定义为与第  $i$  个顶点相连的顶点的数目, 即有  $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$ , 度矩阵表示为  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ 。图

$G$  的 Laplacian 矩阵定义为  $L = (l_{ij})_{n \times n}$ ,  $L = D - A$ , 其中  $l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i \neq j \\ \sum_{p \neq i}^n a_{ip}, & i = j \end{cases}$ 。

### 1.2 相关定义及引理

**定义 1**<sup>[14]</sup> 考虑下面的向量值非线性微分方程:  $dx/dt = f(t, x)$ ,  $f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 其中  $f(t, x)$  关于  $x$  是非连续。其集值映射定义为  $F(t, x) = \bigcup_{\delta > 0} \bigcap_{\mu(N)=0} \text{co}\{f[B(x, \delta) \setminus N]\}$ , 其中,  $B(x, \delta) = \{y \mid \|y - x\| \leq \delta\}$ ,  $\text{co}[\cdot]$  表示凸闭包,  $\mu(N)$  表示集合  $N$  的 Lebesgue 测度。若向量函数  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  在任意的子区间  $[l_1, l_2]$  上是绝对连续的, 且满足以下微分包含:  $dx/dt \in F(t, x)$ , 则称向量值函数  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$  为上述向量值非线性微分方程定义在非退化区间  $I \subset \mathbf{R}$  上的 Filippov 解。

**定义 2**<sup>[15]</sup> 对于给定的控制器  $u_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 如果对于给定的任何初始值  $x_i(0), i = 1, 2, \dots, n$ , 都存在一个与初始值有关的正数  $T$  以及固定的常数  $T_{\max} > 0$ , 且  $T < T_{\max}$ 。对于任意的  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , 有:  $\lim_{t \rightarrow T} |s_i x_i(t) - s_j x_j(t)| = 0, \lim_{t \rightarrow T} v_i(t) = 0, s_i x_i(t) = s_j x_j(t), v_i(t) = v_j(t), \forall t \geq T$ , 则称闭环系统达到固定时间比例一致性, 其中  $s_i = 1, 2, \dots, n$  为比例系数。

**引理 1**<sup>[16]</sup> 对于无向拓扑图  $G$ , 其 Laplacian 矩阵  $L$  具有以下性质: 1)  $L$  为半正定, 有一个特征值为 0, 如果无向图  $G$  是连通的, 则除 0 以外的特征值均正定; 2)  $L$  的第二小特征值  $\lambda_2(L)$  满足:

$\lambda_2(L) = \min_{\|x\| \neq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 0} \{x^T L x / \|x\|^2\} > 0$ , 因此当  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$  时, 有  $x^T L x \geq \lambda_2(L) x^T x$ ; 3) 对于任意  $x =$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 有:  $x^T L x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij} (x_j - x_i)^2) / 2$ 。

**引理 2**<sup>[17]</sup> 假设  $w_1, w_2, \dots, w_N \geq 0, 0 < p \leq 1, q > 1$ , 则有  $\sum_{i=1}^N w_i^p \geq (\sum_{i=1}^N w_i)^p, \sum_{i=1}^N w_i^q \geq N^{1-q} (\sum_{i=1}^N w_i)^q$ 。

**引理 3**<sup>[18]</sup> 对于给定的无向拓扑图  $G$ , 如果存在一个函数  $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ , 满足  $g(x_i, x_j) = -g(x_j, x_i)$ ,  $\forall i, j \in I, i \neq j$ , 则存在数列  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 使得  $\sum_{i=1}^n \sum_{j \in N_i} (a_{ij} y_i g(x_i, x_j)) = - \sum_{(v_i, v_j) \in E} [a_{ij} (y_j - y_i) g(x_j, x_i)]/2$ 。

**引理 4**<sup>[19]</sup> 如果  $V(x(t)): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  是连续函数,  $x(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$  在  $[0, +\infty)$  是  $C$ -正则的,  $x(t): [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$  在  $[0, +\infty)$  的任意紧区间是完全连续的。如果存在一个连续函数  $H: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , 当  $\zeta \in (0, +\infty)$  时,  $H(\zeta) > 0$ , 使得右上导数  $DV(t) \leq -H(V(t))$ 。令  $H(V) = \alpha V^p + \beta V^q$ , 则: 1) 如果  $0 \leq p, q < 1$ , 则  $V(t)$  会在有限时间内达到 0, 且收敛时间  $T$  满足  $T \leq \min \{ V^{1-p}(0)/(\alpha(1-p)), V^{1-q}(0)/(\beta(1-q)) \}$ ; 2) 如果  $p > 1, 0 \leq q < 1$ , 则  $V(t)$  会在固定时间达到 0, 且该时间  $T$  估计为  $T \leq T_{\max} = 1/(\alpha(p-1)) + 1/(\beta(1-q))$ 。

## 2 问题描述

考虑一个具有  $n$  个智能体的多智能体系统, 智能体  $i$  的动力学方程可写为:

$$\dot{x}_i(t) = u_i(t), i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

其中:  $x_i(t) \in \mathbf{R}$  表示智能体  $i$  的状态变量;  $u_i(t) \in \mathbf{R}$  表示系统的控制输入。

设计如下的控制协议:

$$u_i(t) = \alpha \cdot \sum_{j \in N_i} [a_{ij} \text{sig}[(x_j - x_i)]^\gamma] + \beta \cdot \sum_{j \in N_i} [a_{ij} \text{sign}(x_j - x_i)], \quad (2)$$

其中:  $\alpha > 0, \beta > 0$  表示控制增益; 参数  $\gamma > 0$ ;  $\text{sig}[m]^k = \text{sign}(m) \cdot |m|^k$ ,  $\text{sign}(\cdot)$  为符号函数。

**定理 1** 在非连续控制协议 (2) 下, 如果  $0 < \gamma < 1$ , 则多智能体系统 (1) 在任意初始条件下达到有限时间比例一致性; 如果  $\gamma > 1$ , 则多智能体系统 (1) 在任意初始条件下达到固定时间比例一致性。

**证明** 因为  $\dot{x}_i(t) = \alpha \cdot \sum_{j \in N_i} [a_{ij} \text{sig}[(x_j - x_i)]^\gamma] + \beta \cdot \sum_{j \in N_i} [a_{ij} \text{sign}(x_j - x_i)]$  是右端非连续的, 所有由集值映射和微分包含理论可得  $\dot{x}_i(t) \in \alpha \cdot \sum_{j \in N_i} [a_{ij} \text{sig}[(x_j - x_i)]^\gamma] + \beta \cdot \sum_{j \in N_i} [a_{ij} \text{SIGN}(x_j - x_i)]$ , 其

$$\text{中, } \text{SIGN}(m) = \begin{cases} -1, & m < 0 \\ [-1, 1], & m = 0 \\ 1, & m > 0 \end{cases}$$

定义状态误差  $\bar{x}_i(t) = x_i(t) - \sum_{i=1}^n x_i(t)/n$ , 则有

$$\dot{\bar{x}}_i(t) \in \alpha \cdot \sum_{j \in N_i} [a_{ij} \text{sig}[(\bar{x}_j - \bar{x}_i)]^\gamma] + \beta \cdot \sum_{j \in N_i} [a_{ij} \text{SIGN}(\bar{x}_j - \bar{x}_i)]. \quad (3)$$

选取 Lyapunov 函数为:

$$V(t) = \mathbf{x}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{x} / 2, \quad (4)$$

其中  $\mathbf{S} = \text{diag}(s_i \cdot \text{sign}(s_i))$ 。

结合引理 1, 则有:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\in \sum_{i=1}^n \{ s_i \bar{x}_i \cdot \{ \alpha \cdot \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sig}[(s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)]^\gamma + \beta \cdot \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{SIGN}(s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i) \} \} \in \alpha \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [s_i \bar{x}_i \cdot \\ &a_{ij} \text{sig}[(s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)]^\gamma] + \beta \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [s_i \bar{x}_i \cdot a_{ij} \text{SIGN}(s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)] \in -\alpha \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij} (s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i) \cdot \text{sig}[(s_j \bar{x}_j - \\ &s_i \bar{x}_i)]^\gamma / 2] - \beta \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij} (s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i) \text{SIGN}(s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)] / 2 = -\alpha \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij} \cdot |s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i|^{1+\gamma}] / 2 - \\ &\beta \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij} \cdot |s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i|] / 2 = -\alpha \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij}^{2/(1+\gamma)} \cdot (s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)^2]^{(1+\gamma)/2} / 2 - \beta \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij}^2 \cdot \end{aligned}$$

$$(s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)^2]^{1/2}/2。$$

记  $\hat{A} = (a_{ij}^{2/(1+\gamma)})_{n \times n}$ ,  $\tilde{A} = (a_{ij}^2)_{n \times n}$ , 则: 当  $0 < \gamma < 1$  时, 由引理 2 及引理 3 可知,  $\dot{V}(t) \leq -\alpha \cdot [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}^{2/(1+\gamma)} \cdot (s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)^2)]^{(1+\gamma)/2}/2 - \beta \cdot [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}^2 \cdot (s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)^2)]^{1/2}/2 \leq -\alpha \cdot \{2\lambda_2[L(\hat{A})]\}^{(1+\gamma)/2} \cdot [V(t)]^{(1+\gamma)/2}/2 - \beta \cdot \{2\lambda_2[L(\tilde{A})]\}^{1/2} \cdot [V(t)]^{1/2}/2$ , 从而由引理 4 可知, 系统 (1) 达到有限时间比例一致性, 且收敛时间满足:

$$T \leq \min\{4V^{(1-\gamma)/2}(0)/\{\alpha \cdot (1-\gamma)\{2\lambda_2[L(\hat{A})]\}^{(1+\gamma)/2}\}, 4V^{1/2}(0)/\{\beta \cdot \{2\lambda_2[L(\tilde{A})]\}^{1/2}\}\}。 (5)$$

当  $\gamma > 1$  时, 由引理 2 及引理 3 可知,

$$\dot{V}(t) \leq -n^{1-\gamma} \cdot \alpha \cdot [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij}^{2/(1+\gamma)} \cdot (s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)^2]]^{(1+\gamma)/2}/2 - \beta \cdot [\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [a_{ij}^2 \cdot (s_j \bar{x}_j - s_i \bar{x}_i)^2]]^{1/2}/2 \leq -n^{1-\gamma} \cdot \alpha \cdot \{2\lambda_2[L(\hat{A})]\}^{(1+\gamma)/2} \cdot [V(t)]^{(1+\gamma)/2}/2 - \beta \cdot \{2\lambda_2[L(\tilde{A})]\}^{1/2} \cdot [V(t)]^{1/2}/2。$$

从而由引理 4 可知, 系统 (1) 达到固定时间比例一致性, 且收敛时间满足

$$T \leq T_{\max} = 4/\{\alpha \cdot (\gamma - 1) \cdot n^{1-\gamma} \cdot \{2\lambda_2[L(\hat{A})]\}^{(1+\gamma)/2}\} + 4/\{\beta \cdot \{2\lambda_2[L(\tilde{A})]\}^{1/2}\}。 (6)$$

**注 1** 多智能体系统 (1) 的固定时间一致性和有限时间一致性可以通过同一个控制器 (2) 来获得, 而当控制器中的参数  $\gamma$  在不同范围取值时, 可以决定系统是达到固定时间一致还是有限时间一致。另外, 由于引入了比例系数, 使得多智能体不再收敛于同一状态, 而是按照既定的比例收敛到不同的状态。当比例系数等于 1 时, 就是普通的一致性, 显然比例一致性比普通的一致性更有实际意义。

### 3 实例验证

考虑由 6 个智能体组成的多智能体系统, 6 个智能体的连通拓扑图如图 1 所示。

由通信拓扑图可得 Laplacian 矩阵为:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

假设智能体的初始状态为  $[-0.5, 0.3, 0.2, -0.1, 0.4, 0.3]$ , 控制增益分别为:  $\alpha = 1, \beta =$

1.2, 比例系数为:  $s_1 = -1.3, s_2 = -1.3, s_3 = 0.3, s_4 = 0.3, s_5 = 1, s_6 = 1$ , 则可求得  $\lambda_2[L(\hat{A})] = 1, \lambda_2[L(\tilde{A})] = 1$ 。当  $\gamma = 0.3$  时, 满足式 (5), 由定理 1 可知, 多智能体将在有限时间内达到一致; 当  $\gamma = 2$  时, 由式 (6) 不难得出  $T_{\max} = 10.84$ , 由定理 1 可知, 多智能体将在固定时间达到一致。

### [ 参考文献 ]

- [1] REN W, BEARD R W. Consensus seeking in multi-agent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661. DOI:10.1109/TAC.2005.846556.
- [2] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533. DOI:10.1109/TAC.2004.834113.

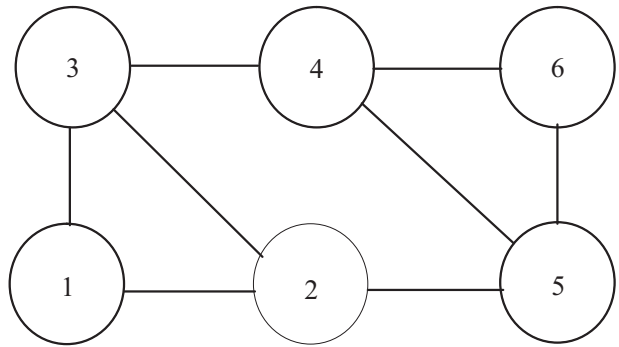


图 1 多智能体通信拓扑结构  
Fig.1 Topologies of multi-agent system communication

- [3] ZHANG T, YU H. Average consensus for directed networks of multi-agent with time-varying delay [M]. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [4] ZHAO H, PARK J H. Group consensus of discrete-time multi-agent systems with fixed and stochastic switching topologies [J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(4): 1297-1307. DOI:10.1007/s11071-014-1379-0.
- [5] SONG L, HUANG D, NGUANG S K, et al. Mean square consensus of multi-agent systems with multiplicative noises and time delays under directed fixed topologies [J]. International Journal of Control Automation and Systems, 2016, 14(1): 69-77. DOI:10.1007/s12555-015-2010-y.
- [6] WANG L, XIAO F. Finite-time consensus problems for networks of dynamics agents [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 950-955. DOI:10.1109/TAC.2010.2041610.
- [7] ZHANG H P, YUE D, YIN X X, et al. Finite-time distributed event-triggered consensus control for multi-agent systems [J]. Information Sciences, 2016, 339: 132-142. DOI:10.1016/j.ins.2015.12.031.
- [8] LI S H, DU H B, LIN X Z. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics [J]. Automatica, 2013, 47(8): 1706-1712. DOI:10.1016/j.automatica.2011.02.045.
- [9] HUANG Y, JIA Y M. Fixed-time consensus tracking control of second-order multi-agent systems with inherent nonlinear dynamics via output feedback [J]. Nonlinear Dynamics, 2018, 91(2): 1289-1306. DOI:10.1007/s11071-017-3945-8.
- [10] NING B D, JIN J, ZHENG J C, et al. Finite-time and fixed-time leader-following consensus for multi-agent systems with discontinuous inherent dynamics [J]. International Journal of Control, 2017, 91(6): 1259-1270. DOI:10.1080/00207179.2017.1313453.
- [11] DEFOORT M, POLYAKOV A, DEMESURE G, et al. Leader-follower fixed-time consensus for multi-agent systems with unknown nonlinear inherent dynamics [J]. IET Control Theory and Applications, 2015, 9(14): 2165-2170. DOI:10.1049/iet-cta.2014.1301.
- [12] WANG Q, WANG Y, SUN C. Fixed-time consensus of multi-agent systems with directed and intermittent communications [J]. Asian Journal of Control, 2016, 19(1): 95-105. DOI:10.1002/asjc.1329.
- [13] CHEN S M, SHAO S. Distributed event-triggered fixed-time consensus control for multi-agent systems with nonlinear uncertainties [J]. IET Control Theory and Applications, 2019, 36(10): 1606-1614. DOI:10.7641/CTA.2019.80742.
- [14] FILIPPOV A F. Differential equations with discontinuous right-hand side [J]. Matematicheskii Sbornik, 1960, 93(1): 99-128. DOI:10.1007/978-94-015-7793-9.
- [15] YU J, SHI Y. Scaled group consensus in multiagent systems with first/second-order continuous dynamics [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(8): 2259-2271. DOI:10.1109/TCYB.2017.2731601.
- [16] OLFATISABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533. DOI:10.1109/TAC.2004.834113.
- [17] ZOU Z Y, TIE L. A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems [J]. International Journal of Control, 2014, 87(2): 363-370. DOI:10.1080/00207179.2013.834484.
- [18] SHANG Y L. Finite-time consensus for multi-agent systems with fixed topologies [J]. International Journal of Systems Science, 2012, 43(3): 499-506. DOI:10.1080/00207721.2010.517857.
- [19] LIU X Y, HO D W C, SONG Q, et al. Finite-/fixed-time robust stabilization of switched discontinuous systems with disturbances [J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(2): 2057-2068. DOI:10.1007/s11071-017-3782-9.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)