第26卷　第3期　集美大学学报（自然科学版）　Vol. 26　No. 3
2021年5月　Journal of Jimei University (Natural Science)　May 2021

［文章编号］1007－7405(2021)03－0265－06　DOI:10.19715/j.jmuzr.2021.03.12

多边形面积坐标约束条件的构造方法

储理才，吴端恭

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］提出一般多边形面积坐标约束条件的构造方法，即根据基多边形选取合适的形状特征参数，然后用形状特征参数表示出一组特定的点的面积坐标，由此得出多边形面积坐标的约束条件。最后就四边形、五边形情形，给出多组等价的面积坐标约束条件，利用面积坐标约束条件解决面积坐标分量相等的点的存在性问题。

［关键词］多边形单元；特征参数；面积坐标；独立分量；约束条件

［中图分类号］O 242.21

Constructions of Restrained Conditions for Polygon Area-Coordinate

CHU Licai, WU Duangong

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: A method to construct general polygon area-coordinate constraints was presented. Firstly, according to the base polygon, the appropriate shape feature parameters were selected, and then the area-coordinates of a specific set of points were expressed by the shape feature parameters, from which the constraints of polygon area-coordinates were obtained. In the case of quadrilateral and pentagon, several equivalent constraints of area-coordinates were given. Finally, the existence of points with equal area-coordinate components was solved by using area coordinate constraints.

Keywords: polygon element; characteristic parameter; area-coordinate; independent components; restrained conditions

0　引言

在构造三角形单元时，三角形面积坐标的应用取得了成功。采用三角形面积坐标有如下优点：1）面积坐标是自然坐标，具有不变性；2）单元边线方程易于表述；3）直角坐标与面积坐标之间互为线性关系；4）采用面积坐标时，易于求得三角形单元刚度矩阵的积分显式。另一方面，采用等参坐标构造四边形单元时，最主要的问题是等参坐标与直角坐标之间不是线性变换关系。因此，文献［1－4］将三角形面积坐标理论推广到四边形情形，并应用于构造四边形单元。面积坐标既有等参坐标的优点，也弥补了等参坐标的不足，用面积坐标构造的四边形单元普遍表现出精度高、抗网格畸变性能好的优点[5-13]。

龙驭球等提出的四边形面积坐标[2]采用与三角形面积坐标相类似的定义方式，每个点都具有4个

［收稿日期］2020－05－29
［基金项目］国家自然科学基金项目（11461044）
［作者简介］储理才（1969—），男，副教授，博士，从事计算几何研究。E-mail:chulc@jmu.edu.cn

坐标分量，其中只有两个分量相互独立，这种四边形面积坐标称为 QAC-Ⅰ。文献［14－15］提出了只含两个分量的四边形面积坐标，方法是取四边形对边的中点并连线，计算单元内的点与这两条连线形成的两个三角形的面积与整个四边形面积的比值，这两个比值组成该点的面积坐标，这种四边形面积坐标称为 QAC-Ⅱ。龙驭球等[16]提出了另外一种形式的也只含两个分量的四边形面积坐标，方法是将文献［14］中两组对边中点的连线换成两条对角线，称这种四边形面积坐标为 QAC-Ⅲ。综合运用这 3 种面积坐标构造的四边形单元具有诸多优点，如对网格畸变不敏感、推导过程简洁等[17－19]。

3 种四边形面积坐标各有优势和不足：QAC-Ⅰ含有 4 个分量，其中只有 2 个分量是独立的，4 个分量遵守某种约束条件，而 QAC-Ⅱ和 QAC-Ⅲ只含 2 个独立分量，与平面上点的自由度是一致的。QAC-Ⅰ是三角形面积坐标的自然推广，此种定义方式可以很容易推广到任意多边形情形，而后两种四边形面积坐标定义则很难推广到一般多边形上。

沿着 QAC-Ⅰ的思路，将三角形面积坐标推广到多边形面积坐标，则坐标分量个数与多边形的边数相等。首先要解决的问题是坐标分量间的约束问题。设在平面上给定一个凸 n 边形，平面上的点的面积坐标是一个 n 元有序数组；反之，给定一个 n 元有序数组，它就不一定是平面上某个点的面积坐标。以三角形情形为例，三角形面积坐标有一个约束条件，即三分量之和必为 1，如果一个三元有序数组不满足这个约束条件，它就不是平面上某个点的面积坐标。对于一般多边形面积坐标，分量之和为 1 是必然要满足的约束条件，本文研究了除此之外的约束条件以及如何建立这些约束条件。

1　多边形面积坐标约束条件的建立

本节讨论一般多边形面积坐标约束条件的构造方法。首先将三角形面积坐标的定义推广到一般多边形的面积坐标。

1.1　多边形面积坐标定义

如图 1，给定平面上凸 n 边形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$，对平面上任意一点 P，连接 $PA_1, PA_2, \cdots, PA_n$。设 S 表示 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积，$S_1, S_2, \cdots, S_n$ 分别表示 $\triangle PA_1A_2$，$\triangle PA_2A_3$，…，$\triangle PA_nA_1$ 的有向面积。令 $\mu_i = S_i/S, i = 1, \cdots, n$，则称 n 元有序数组（μ_1，μ_2，…，μ_n）为点 P 的面积坐标，多边形的边 A_iA_{i+1} 称为坐标分量 μ_i 所对应的边。

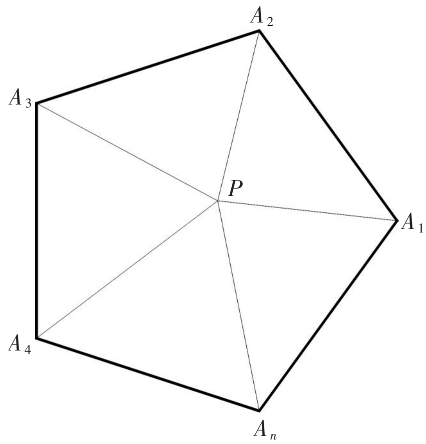

图 1　多边形面积坐标
Fig.1　Polygon area-coordinates

由多边形面积坐标的定义可知，各坐标分量一定满足如下的约束条件

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n = 1。\tag{1}$$

1.2　面积坐标中的独立分量

平面上点的自由度为 2，由此可知，面积坐标（μ_1，μ_2，…，μ_n）的 n 个分量中，只有两个分量是独立的，其他分量受这两个分量约束，并不是任意两个分量都可选作独立分量。如图 2 所示，假设四边形的边 A_2A_3 平行于对边 A_4A_1，当点 P 沿着与这两条边平行的方向（图中虚线）变化时，μ_2、μ_4 恒为常数，而 μ_1、μ_3 却在变化，显然 μ_2、μ_4 不能表示 μ_1、μ_3；与之相反，考虑分量 μ_1、μ_3，如果 A_1A_2 与对边 A_3A_4 不平行，则不存在这样的方向，当平面上的点 P 沿该方向变化时，μ_1、μ_3 恒为常数，因此 μ_1、μ_3 是相互独立的。

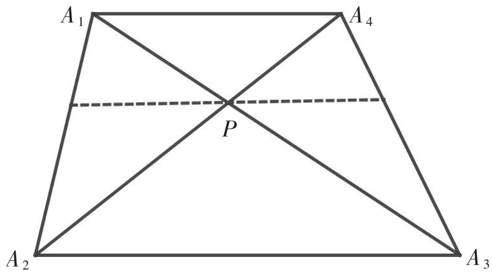

图 2　四边形面积坐标
Fig.2　Quadrilateral area coordinate

据此，本文提出如下的独立分量选取原则：

1）独立分量选取原则　面积坐标分量中，只要面积坐标的两个分量所对应的多边形的边不平

行，则这两个分量是独立变化的。

2）据此原则　相邻两个分量（例如：μ_1、μ_2）一定可以作为独立分量，不失一般性，下文中皆选定 μ_1、μ_2 作为独立分量。

1.3　面积坐标中非独立分量的线性函数表示形式

熟知，假设 $\triangle PAB$ 的 3 个顶点的直角坐标分别为 $P(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$，则 $\triangle PAB$ 的有向面积可用 $\boldsymbol{S} = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} y \right)/2$ 的行列式形式表示。由此可知，根据面积坐标的定义，某点的面积坐标分量可以表示成该点的直角坐标分量的线性函数形式。反之，选定面积坐标的两个独立变元，则直角坐标也可表示为两个独立的面积坐标分量的线性函数。进而可知，面积坐标的非独立分量必可表示成两独立分量的线性函数形式。一般地，对 n 边形面积坐标，选择 μ_1、μ_2 作为独立的分量，则余下的 $n-2$ 个分量必可表示成

$$\begin{cases} \mu_3 = a_3\mu_1 + b_3\mu_2 + c_3, \\ \mu_4 = a_4\mu_1 + b_4\mu_2 + c_4, \\ \qquad \vdots \\ \mu_n = a_n\mu_1 + b_n\mu_2 + c_n 。\end{cases} \tag{2}$$

其中，$a_i, b_i, c_i (i = 3,4,\cdots,n)$ 为表示系数，这样一组表示式就构成了多边形面积坐标的约束条件。

1.4　表示系数的确定

如节 1.3 所述，选定多边形面积坐标中两个独立变化的分量，其余分量必可表示成两个独立分量的线性函数形式，这些线性函数一旦确定，即构成了多边形面积坐标的一组完整约束条件。确定这些线性函数的方法是：根据多边形的具体情况，适当选定一组形状特征参数，用特征参数表示出至少 3 个互异点的面积坐标；然后根据这 3 个点的面积坐标，代入式（2），建立线性方程组。该线性方程组必有唯一解，求其解，便得到表示系数。一组完整的非独立分量的表示式即构成了一组完整的多边形面积坐标约束条件。

下面就四边形、五边形情形给出具体的面积坐标约束条件，以此检验此方法的有效性。

2　四边形面积坐标的约束条件

2.1　面积特征参数法

特征参数的取法同文献［2］，如图 2 所示，平面上给定四边形 $A_1A_2A_3A_4$，S 表示四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的面积，S_1、S_2 分别表示 $\triangle A_1A_2A_4$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的有向面积，用 $g_1 = S_1/S$、$g_2 = S_2/S$ 定义四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 的特征参数，称这种参数为面积特征参数。则四边形的 4 个顶点的面积坐标可以由面积特征参数表示为：$A_1(0,g_2,1-g_2,0), A_2(0,0,1-g_1,g_1), A_3(g_2,0,0,1-g_2), A_4(g_1,1-g_1,0,0)$。

从 4 个顶点中任选 3 个，代入式（2），可得

$$\begin{cases} \mu_3 = \mu_1(g_1-1)/g_2 + \mu_2(g_1-g_2)/g_2 + 1 - g_1, \\ \mu_4 = \mu_1(1-g_1-g_2)/g_2 - \mu_2 g_1/g_2 + g_1 。\end{cases} \tag{3}$$

即四边形面积坐标的一组约束条件。

2.2　对角线比例特征参数法

设基四边形如图 2 所示，P 是对角线 A_1A_3 与 A_2A_4 的交点，设

$$k_1 = A_1P/PA_3,\ k_2 = A_2P/PA_4, \tag{4}$$

称 k_1, k_2 为四边形的对角线比例特征参数。

由初等几何知识，四边形的 4 个顶点的面积坐标可以由对角线比例特征参数表示为 $A_1(0,k_2/(1+$

$k_2),1/(1+k_2),0)$, $A_2(0,0,1/(1+k_1),k_1/(1+k_1))$, $A_3(k_2/(1+k_2),0,0,1/(1+k_2))$, $A_4(k_1/(1+k_1),1/(1+k_1),0,0)$。从 4 个顶点中任选 3 个，代入式（2），可得另外一组等价的约束条件

$$\begin{cases}\mu_3=-\mu_1(1+k_2)/(k_2+k_1k_2)+\mu_2(k_1-k_2)/(k_2+k_1k_2)+1/(1+k_1),\\ \mu_4=\mu_1(1-k_1k_2)/(k_2+k_1k_2)-\mu_2(k_1+k_1k_2)/(k_2+k_1k_2)+k_1/(1+k_1)。\end{cases} \tag{5}$$

式（3）或式（5）中的两个等式相加，都可导出

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1。 \tag{6}$$

因此，用式（6）替换式（3）或式（5）中任意一个等式，又可得到不同的等价约束条件。

3　五边形面积坐标的约束条件

3.1　五边形的特征参数的选取

如图 3，给定平面上凸五边形 $ABCDE$，S 表示五边形 $ABCDE$ 的面积，S_1、S_2、S_3、S_4、S_5 分别表示 $\triangle ABC$、$\triangle BCD$、$\triangle CDE$、$\triangle DEA$、$\triangle EAB$ 的有向面积，用式（7）定义五边形 $ABCDE$ 的特征参数

$$g_i=S_i/S, i=1,\cdots,5。 \tag{7}$$

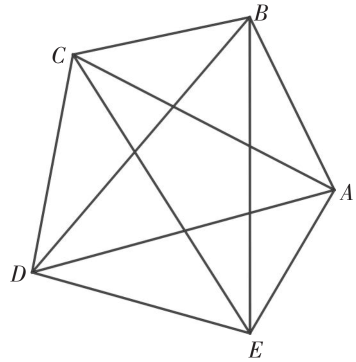

图 3　五边形的特征参数

Fig.3　Characteristic parameters of pentagon

3.2　五边形顶点的面积坐标的特征参数表示

给定五边形 $ABCDE$，则各顶点的面积坐标可由特征参数表示如下：$A(0,g_1,1-g_1-g_4,g_4,0)$, $B(0,0,g_2,1-g_2-g_5,g_5)$, $C(g_1,0,0,g_3,1-g_3-g_1)$, $D(1-g_4-g_2,g_2,0,0,g_4)$, $E(g_5,1-g_5-g_3,g_3,0,0)$。

3.3　非独立分量的表示公式

从五边形顶点中任意选择 3 个，将其面积坐标代入式（2），可以解得具体的表示系数，从而得到面积坐标非独立分量用独立分量表示的公式。

选取的点不同，表示形式也会不同。例如：选择顶点 A，B，C，得到如下形式的五边形面积坐标的约束条件

$$\mu_3=-\mu_1g_2/g_1+\mu_2(1-g_1-g_2-g_4)/g_1+g_2, \tag{8}$$

$$\mu_4=\mu_1(g_2+g_3+g_5-1)/g_1+\mu_2(g_2+g_4+g_5-1)/g_1+1-g_2-g_5, \tag{9}$$

$$\mu_5=\mu_1(1-g_1-g_3-g_5)/g_1-\mu_2g_5/g_1+g_5。 \tag{10}$$

选择顶点 A，B，D，则得到另外一组不同的约束条件

$$\mu_3=-\mu_1g_2/g_1+\mu_2(1-g_1-g_2-g_4)/g_1+g_2, \tag{11}$$

$$\mu_4=\mu_1[g_1(1-g_2-g_5)+g_2(g_2+g_4+g_5-1)]/[g_1(g_2+g_4-1)]+\mu_2(g_2+g_4+g_5-1)/g_1+1-g_2-g_5, \tag{12}$$

$$\mu_5=\mu_1(g_1g_5-g_2g_5-g_1g_4)/[g_1(g_2+g_4-1)]-\mu_2g_5/g_1+g_5。 \tag{13}$$

比较两组约束条件，式（8）与式（11）完全相同，式（9）与式（12）、式（10）与式（13）都只有 μ_1 的系数不同。根据上面的分析，这两组约束条件是等价的，因此，对应项系数必然相等，$(g_2+g_3+g_5-1)/g_1=[g_1(1-g_2-g_5)+g_2(g_2+g_4+g_5-1)]/g_1(g_2+g_4-1)$, $(1-g_1-g_3-g_5)/g_1=(g_1g_5-g_2g_5-g_1g_4)/[g_1(g_2+g_4-1)]$，这两个等式都导出了同一个恒等式，如式（14）所示：

$$g_1+g_2+g_3+g_4+g_5-g_1g_2-g_2g_3-g_3g_4-g_4g_5-g_5g_1=1。 \tag{14}$$

定理 1　给定平面上任意凸五边形 $ABCDE$，特征参数 g_1,g_2,g_3,g_4,g_5 如式（6）定义，则特征参数必满足式（14）的恒等式。

上面得出这个恒等式的过程即可视为这个恒等式的证明，这里再给出这个恒等式的一个初等几何证明。

如图4，设对角线 BD、CE 交于点 P，CE、DA 交于点 R，DA，EB 交于点 T。将式（14）改写为 $(1-g_1)(1-g_2-g_5)=g_3(1-g_2-g_4)+g_4(1-g_5)$。由特征参数的几何意义，结合图4，即需证明 $S_{\square ACDE}\cdot S_{\triangle BDE}=S_{\triangle CDE}\cdot S_{\triangle ABD}+S_{\triangle DEA}\cdot S_{\square BCDE}$。将上式改写为：

$S_{\triangle CDE}/S_{\square BCDE}\cdot S_{\triangle ABD}/S_{\square ACDE}=S_{\triangle BDE}/S_{\square BCDE}-S_{\triangle DEA}/S_{\square ACDE}$。（15）

在四边形 $BCDE$ 中，$S_{\triangle CDE}/S_{\square BCDE}=DP/DB$。类似地，可知 $S_{\triangle ABD}/S_{\square ACDE}=BT/BE\cdot S_{\square ABDE}/S_{\square ACDE}=BT/BE\cdot S_{\square ABDE}/S_{\triangle ADE}\cdot S_{\triangle ADE}/S_{\square ACDE}=BT/BE\cdot BE/TE\cdot RE/CE=BT/TE\cdot RE/CE$。又 $S_{\triangle BDE}/S_{\square BCDE}-S_{\triangle DEA}/S_{\square ACDE}=PE/CE-RE/CE=PR/CE$，于是式（15）变为 $DP/DB\cdot BT/TE\cdot RE/CE=PR/CE$，即：为证明定理1，只需证明

$$DP/DB\cdot BT/TE\cdot RE/PR=1。\qquad(16)$$

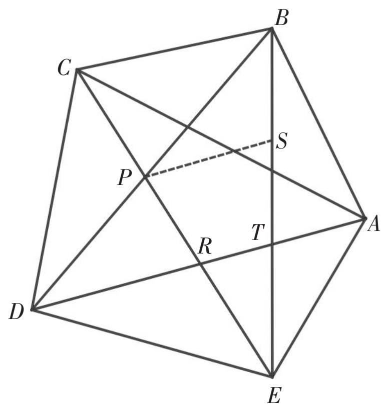

图4　五边形特征参数恒等式的证明

Fig.4　Proof of identities of pentagonal characteristic parameters

为证明式（16），在图4中，过点 P 作 PS 平行于 AD 交对角线 BE 于点 S，则 $DP/DB=TS/BT$，$RE/PR=TE/TS$，代入式（16）左边，则知式（16）成立。至此，定理1证毕。

4　分量相等的面积坐标对应的点的存在性

熟知，分量相等的三角形面积坐标为 $(1/3,1/3,1/3)$，它所表示的点是三角形的重心。那么 n 边形面积坐标是 $(1/n,\cdots,1/n)$ 的点是否存在？当基多边形是正多边形时，这样的点显然是存在的，就是正多边形的中心。如果基多边形不是正多边形呢？这类问题可以根据面积坐标的约束条件得到解答。关于四边形情形，有定理2。

定理2　当基四边形的两对角线交点至少平分其中一条对角线时，则存在面积坐标为 $(1/4,1/4,1/4,1/4)$ 的点，反之亦然。

证明　四边形对角线比例特征 k_1,k_2 如式（4）定义，当基四边形的两对角线交点至少平分其中一条对角线时，则 $k_1=1$ 或 $k_2=1$。

1）如果 $k_1=1$ 且 $k_2=1$，即四边形两对角线互相平分，则此四边形为平行四边形，两对角线的交点的面积坐标为 $(1/4,1/4,1/4,1/4)$。

2）如果 k_1、k_2 只有一个为1，不妨设 $k_1=1,k_2\neq1$，此时对角线的交点 P 是 A_1A_3 的中点，而不是 A_2A_4 的中点。取 A_2A_4 的中点 O，容易证明 O 点的面积坐标恰为 $(1/4,1/4,1/4,1/4)$。反之，设某点的面积坐标为 $(1/4,1/4,1/4,1/4)$，在对角线比例特征参数表示的约束条件式（5）中任取一个等式，将 $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=1/4$ 代入，例如代入（5）中第一个等式，得 $1/4=-(1+k_1)/(1+k_2)/4-(1-k_1k_2)/(1+k_2)/4+1/(1+k_2)$，化简得 $(1-k_1)(1-k_2)=0$，此式即表明基四边形的两对角线交点至少平分其中一条对角线。

5　结论

本文将三角形面积坐标定义自然推广到任意多边形情形，提出了建立多边形面积坐标分量间的约束条件的一般方法，并就四边形和五边形情形，使用该方法建立了多组等价的约束条件。结果表明，该方法是有效的。

[参考文献]

[1] 龙驭球，龙志飞，岑松. 新型有限元论［M］. 北京：清华大学出版社，2004.

[2] 龙驭球，李聚轩，龙志飞，等. 四边形单元面积坐标理论［J］. 工程力学，1997，14(3)：1-11.

[3] LONG Y Q, LI J X, LONG Z F. Area coordinates used in quadrilateral elements [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1999, 15(8): 533-545.

[4] LONG Z F, LI J X, CEN S, et al. Some basic formulae for area coordinates used in quadrilateral elements [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1999, 15(12): 841-852. DOI. 10. 1002/(sici)1099-0887(199912)15:12〈841::aid-cnm290〉3. 0. co;2-a.

[5] 陈晓明，龙驭球，须寅. 面积坐标法构造含转角自由度的四结点膜元 [J]. 工程力学，2003, 20(6): 6-11.

[6] CHEN X M, CEN S, LONG Y Q, et al. Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method [J]. Computers & Structures, 2004, 82(1): 35-54.

[7] 龙志飞，李聚轩，岑松，等. 采用面积坐标的四边形板弯曲单元 [J]. 工程力学，1997, 14(4): 1-10.

[8] 岑松，龙驭球. 采用面积坐标的四边形厚薄板通用单元 [J]. 工程力学，1999, 16(2): 1-15.

[9] CARDOSO R P R, YOON J W, VALENTE R A F. A new approach to reduce membrane and transverse shear locking for one-point quadrature shell elements: linear formulation [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(2): 214-249.

[10] CEN S, DU Y, CHEN X M, et al. The analytical element stiffness matrix of a recent 4-node membrane element formulated by the quadrilateral area coordinate method [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2007, 23(12): 1095-1110. DOI:10. 1002/cnm. 953.

[11] SOH A K, LONG Y Q, CEN S. Development of eight-node quadrilateral membrane elements using the area coordinates method [J]. Computational Mechanics, 2000, 25(4): 376-384. DOI:10. 1007/S004660050484.

[12] CEN S, LONG Y Q, YAO Z H, et al. Application of the quadrilateral area coordinate method: a new element for Mindlin-Reissner plate [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006, 66(1): 1-45. DOI:10. 1002/nme. 1533.

[13] CEN S, FU X R, LONG Y Q, et al. Application of the quadrilateral area coordinate method: a new element for laminated composite plate bending problems [J]. Acta Mechanica Sinica, 2007, 23(5): 561-575. DOI:CNKI:SUN:AMSI. 0. 2007-05-009.

[14] 陈晓明，岑松，龙驭球，等. 含两个分量的四边形单元面积坐标理论 [J]. 工程力学，2007,24(增刊1): 32-35.

[15] CHEN X M, CEN S, FU X R, et al. A new quadrilateral area coordinate method (QAC-Ⅱ) for developing quadrilateral finite element models [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 73(13): 1911-1941. DOI:10. 1002/nme. 2159.

[16] 龙驭球，龙志飞，王丽. 四边形单元第三类面积坐标系统 [J]. 工程力学，2009, 26(2):1-4,15 .

[17] 王丽，龙志飞，龙驭球. 混合应用三类四边形面积坐标构造八结点四边形膜元 [J]. 工程力学，2010, 27(2): 1-6.

[18] 王丽，赵玉明，龙志飞，等. 基于面积坐标和解析试函数的薄板元 [J]. 计算机辅助工程，2014, 23(3): 65-68,77 .

[19] 博宇，陈章华. 基于应变梯度理论和面积坐标有限元的管线钢微观组织尺寸效应研究 [J]. 机械工程学报，2017, 53(2): 74-83.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）