

广义 Korteweg-de Vries 方程的高精度差分格式

邓雅清, 王晓峰, 王小利, 何育宇

(闽南师范大学数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

[摘要] 对广义 Korteweg-de Vries (generalized Korteweg-de Vries, GKdV) 方程的初边值问题进行数值研究, 提出一个 2 层非线性守恒差分格式, 该格式的收敛阶为 $O(\tau^2 + h^4)$ 。证明该格式在离散意义下保持原问题质量守恒和能量守恒, 分别运用离散能量法和 Von Neumann 分析法证明该格式的可解性和绝对稳定性。数值实验结果表明, 本文格式在时间和空间方向上分别具有 2 阶和 4 阶精度, 且是质量和能量守恒的。

[关键词] 广义 Korteweg-de Vries 方程; 高精度; 守恒性; 稳定性; Von Neumann 分析法

[中图分类号] O 241

High-order Finite Difference Scheme for the Generalized Korteweg-de Vries Equation

DENG Yaqing, WANG Xiaofeng, WANG Xiaoli, HE Yuyu

(School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: The initial-boundary value problem for the generalized Korteweg-de Vries (GKdV) equation was numerically studied, and a two-level nonlinear conservative difference scheme was proposed, whose convergence order was $O(\tau^2 + h^4)$. It was proved that the scheme maintained the mass conservation and energy conservation of the original problem in a discrete sense. The discrete energy method and the Von Neumann analysis method were used to prove the solvability and absolute stability of the scheme. Numerical experimental results showed that the scheme had second and fourth-order accuracy in time and space directions, respectively, and was conserved in mass and energy.

Keywords: GKdV equation; high-order accuracy; convergence; stability; Von Neumann analysis

0 引言

非线性波是应用研究的重要领域之一, 目前, 已有很多研究者建立了数学模型来研究非线性波动现象。Korteweg 等^[1]于 1895 年发现的 KdV 方程便是非线性波现象的数学模型之一。自发现 KdV 方程以来, 人们便对这个方程及其变化形式进行了大量研究: 李家永等^[2]对定界的 KdV 方程提出一个 2 阶 3 层线性差分格式; Anjian^[3]研究了具有幂律非线性和时变系数的 KdV 方程的孤波解; 盛秀兰^[4]基于 Crank-Nicolson 方法对 KdV 方程周期边界问题提出一个 2 层线性化隐式差分格式, 其收敛阶数为 $O(\tau + h^2)$; 郭瑞等^[5]用 Crank-Nicolson 差分法求解 KdV 浅水波方程的定解问题, 并用数值模拟出孤立波这一物理现象, 该法具有二阶收敛性; 胡越等^[6]在一定条件下证明了一类广义 KdV 方程行波解

[收稿日期] 2020-06-16

[基金项目] 福建省中青年骨干教师教育科研项目 (JAT190368)

[作者简介] 邓雅清 (1995—), 女, 硕士生, 从事微分方程数值解研究。通信作者: 王晓峰 (1977—), 男, 教授, 硕导, 从事微分方程数值解研究。E-mail: wxfmeng@mnnu.edu.cn

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

的存在性, 但没有给出求解的方法。

本文考虑一维 3 阶的非线性广义 KdV 方程

$$u_t + \alpha u_{xxx} + \gamma (u^p)_x = 0, (x, t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, T], \quad (1)$$

初值条件和边界条件分别为:

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in (-\infty, +\infty), \quad (2)$$

$$u(-\infty, t) = u(+\infty, t) = 0, u_x(-\infty, t) = u_x(+\infty, t) = 0, t \in [0, T], \quad (3)$$

其中: α 和 γ 是任意实数; p 是大于 1 的正整数; $u_0(x)$ 是已知的光滑函数。

非线性 KdV 方程 (1) ~ (3) 有 2 个守恒量, 分别是质量 Q 和能量 E , 即:

$$Q(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) dx = Q(0),$$

$$E(t) = \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = \|u_0(x)\|_{L^2}^2 = E(0), t > 0.$$

1 高精度差分格式

为了建立高精度差分格式, 考虑有界计算区域 $[x_L, x_R]$ 。对区域 $[x_L, x_R] \times [0, T]$ 做网格剖分, 取正整数 J, N , 令空间步长 $h = (x_R - x_L)/J$, 时间步长 $\tau = T/N$ 。记 $x_j = x_L + jh$, $0 \leq j \leq J$, $t_n = n\tau$, $0 \leq n \leq N$, $U_j^n \approx u(x_j, t_n)$ 。定义 $Z_h^0 = \{U = (U_j) | U_{-2} = U_{-1} = U_0 = U_1 = U_{J-1} = U_J = U_{J+1} = U_{J+2} = 0, -2 \leq j \leq J+2\}$ 。

对任意 $U^n, V^n \in Z_h^0$, 定义如下差分算子、内积和范数: $(U_j^n)_x = (U_{j+1}^n - U_j^n)/h$, $(U_j^n)_{\bar{x}} = (U_j^n - U_{j-1}^n)/h$, $(U_j^n)_{\hat{x}} = (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)/(2h)$, $(U_j^n)_{\ddot{x}} = (U_{j+2}^n - U_{j-2}^n)/(4h)$, $(U_j^n)_t = (U_j^{n+1} - U_j^n)/\tau$, $U_j^{n+1/2} = (U_j^{n+1} + U_j^n)/2$, $\langle U^n, V^n \rangle = h \sum_{j=1}^J (U_j^n V_j^n)$, $\|U^n\|^2 = \langle U^n, U^n \rangle$, $\|U^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J-1} |U_j^n|$ 。

引入 4 阶差分算子^[8-9]: $(4/3)U_{\bar{x}} - (1/3)U_{\ddot{x}} = dU/dx + O(h^4)$, $(3/2)U_{\hat{x}} - (1/2)U_{\ddot{x}} = d^3U/dx^3 + O(h^4)$ 。于是可以对方程 (1) ~ (3) 建立在空间上 4 阶精度、在时间上 2 阶精度的 Crank-Nicolson 型有限差分格式:

$$\begin{aligned} (U_j^n)_t + (3\alpha/2)(U_j^{n+1/2})_{\ddot{x}} - (\alpha/2)(U_j^{n+1/2})_{\ddot{x}} + (4\gamma/3)\varphi_1(U_j^{n+1/2}, U_j^{n+1/2}) - \\ (\gamma/3)\varphi_2(U_j^{n+1/2}, U_j^{n+1/2}) = 0, j = 1, \dots, J; n = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$U_j^0 = u_0(x_j), j = 1, \dots, J, \quad (5)$$

$$U_0^n = U_J^n = 0, (U_0^n)_{\hat{x}} = (U_J^n)_{\hat{x}} = 0, n = 0, \dots, N, \quad (6)$$

其中: $\varphi_1(U_j^{n+1/2}, U_j^{n+1/2}) = [p/(p+1)] \{ (U_j^{n+1/2})^{p-1} (U_j^{n+1/2})_{\hat{x}} + [(U_j^{n+1/2})^p]_{\hat{x}} \}$; $\varphi_2(U_j^{n+1/2}, U_j^{n+1/2}) = [p/(p+1)] \{ (U_j^{n+1/2})^{p-1} (U_j^{n+1/2})_{\ddot{x}} + [(U_j^{n+1/2})^p]_{\ddot{x}} \}$ 。

为了证明格式的稳定性, 需要引理 1 和引理 2。

引理 1^[10-11] 对于任意 2 个网格函数 $U^n, V^n \in Z_h^0$, 有: $\langle U_{xxx}^n, U^n \rangle = 0$, $\langle U_{xxx}^n, U^n \rangle = 0$, $\langle U_t^n, 2U^{n+1/2} \rangle = \|U^n\|_t^2$ 。

引理 2^[12-13] 对于任意网格函数 $U^n \in Z_h^0$, 有: $\langle \varphi_1(U^n, U^n), U^n \rangle = 0$, $\langle \varphi_2(U^n, U^n), U^n \rangle = 0$ 。

2 差分格式的守恒律

定理 1 差分格式满足下列守恒性质

$$Q^n = h \sum_{j=1}^J U_j^n = Q^{n-1} = \dots = Q^0, \quad (7)$$

$$E^n = \|U^n\|^2 = E^{n-1} = \dots = E^0, n = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

则分别称为质量守恒和能量守恒。

证明 将差分格式 (4) 乘以 h , 作 $j = 1$ 到 J 的累加, 由边界条件可得

$$h \sum_{j=1}^J (U_j^{n+1} - U_j^n) = 0, \quad (9)$$

从而质量守恒式 (7) 得证。

将式 (4) 与 $2U^{n+1/2}$ 作内积, 再由初边值条件及引理 1, 可得: $\|U^n\|_t^2 + 3\alpha \langle U_{xxx}^{n+1/2}, U^{n+1/2} \rangle - \alpha \langle U_{xxx}^{n+1/2}, U^{n+1/2} \rangle + (8\gamma/3) \langle \varphi_1(U^{n+1/2}, U^{n+1/2}), U^{n+1/2} \rangle - (2\gamma/3) \langle \varphi_2(U^{n+1/2}, U^{n+1/2}), U^{n+1/2} \rangle = 0$ 。由引理 1 及引理 2 得 $\|U^n\|_t^2 = 0$, 从而能量守恒式 (8) 得证。

3 差分格式的可解性

为了证明差分格式 (4) ~ (6) 的近似解 U^1, U^2, \dots, U^N 的存在性, 本文将使用以下 Brouwer 不动点定理。

引理 3^[12,14] 设 $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是一个有限维内积空间, $\|\cdot\|$ 是范数, 假设 $g: H \rightarrow H$ 连续且对所有 $x \in H$, 存在 $\|x\| = \alpha, \alpha > 0$, 使得 $\langle g(x), x \rangle > 0$, 则存在 $x^* \in H$, 使得 $g(x^*) = 0$ 且 $\|x^*\| \leq \alpha$ 。

定理 2 差分格式 (4) ~ (6) 的近似解 U^n 是存在的。

证明 用数学归纳法证明。假设 $U^0, U^1, \dots, U^n, n \leq N-1$ 满足差分格式 (4) ~ (6), 下面证明, 存在 U^{n+1} 满足差分格式 (4) ~ (6)。在 Z_h^0 上定义算子 g :

$$g(V) = 2(V - U^n) + (\alpha\tau/2)(3V_{xxx} - V_{xxx}) + (\gamma\tau/3)[4\varphi_1(V, V) - \varphi_2(V, V)]。 \quad (10)$$

映射 g 在有限维空间中, 其分量在 V (h 是固定的) 中是二次的, 所以 g 是连续的。将式 (10) 与 V 作内积, 由引理 1 和引理 2, 可得: $\langle g(V), V \rangle = 2\langle V, V \rangle - 2\langle U^n, V \rangle \geq 2\|V\|^2 - (\|V\|^2 + \|U^n\|^2) = \|V\|^2 - \|U^n\|^2$, 令 $\|V\|^2 = \|U^n\|^2 + 1$, 则 $\langle g(V), V \rangle > 0$ 。由引理 3 可得, $V = U^{n+1/2}$ 存在, 进而 $U^{n+1} = 2U^{n+1/2} - U^n$ 也存在。定理得证。

4 差分格式的稳定性

定理 3 差分格式 (4) ~ (6) 是无条件稳定的。

证明 利用 Von Neumann 稳定性分析法。令 $u_j^n = \varepsilon^n e^{ij\theta}$, 其中 $i^2 = -1$, θ 为波数, 则有:

$$(u_j^n)_t = (u_j^{n+1} - u_j^n)/\tau = \varepsilon^n e^{ij\theta} (\varepsilon - 1)/\tau, \quad (11)$$

$$(3\alpha/2)(U_j^{n+1/2})_{xxx} = [3\alpha i/(4h^3)] \varepsilon^n e^{ij\theta} (\sin(2\theta) - 2\sin\theta)(\varepsilon + 1), \quad (12)$$

$$(\alpha/2)(U_j^{n+1/2})_{xxx} = [\alpha i/(8h^3)] \varepsilon^n e^{ij\theta} (\sin(3\theta) - 2\sin(2\theta) + \sin\theta)(\varepsilon + 1), \quad (13)$$

$$(4\gamma/3)\varphi_1(U_j^{n+1/2}, U_j^{n+1/2}) = [4\gamma i/(9h)] \varepsilon^n e^{ij\theta} [(U_j^{n+1/2})^{p-1} + (U_j^{n+1/2})_x^{p-1}] \sin\theta(\varepsilon + 1), \quad (14)$$

$$(\gamma/3)\varphi_2(U_j^{n+1/2}, U_j^{n+1/2}) = [\gamma i/(18h)] \varepsilon^n e^{ij\theta} [(U_j^{n+1/2})^{p-1} + (U_j^{n+1/2})_x^{p-1}] \sin(2\theta)(\varepsilon + 1)。 \quad (15)$$

将式 (11) ~ 式 (15) 代入式 (4) 得 $\varepsilon = (1 - iB)/(1 + iB)$, 其中: $B = \tau \{ [3\alpha/(4h^3)](\sin(2\theta) - 2\sin\theta) - [\alpha/(8h^3)](\sin(3\theta) - 2\sin(2\theta) + \sin\theta) + [4\gamma/(9h)][(U_j^{n+1/2})^{p-1} + (U_j^{n+1/2})_x^{p-1}] \sin\theta - [\gamma/(18h)][(U_j^{n+1/2})^{p-1} + (U_j^{n+1/2})_x^{p-1}] \sin(2\theta) \}$, 可得 $|\varepsilon| = 1$, 从而差分格式 (4) ~ (6) 是无条件稳定的。

5 数值算例

差分格式 (4) ~ (6) 可以采用以下的迭代法逐层求解: $2(U_j^{(n+1/2)(s+1)} - U_j^{(n+1/2)s})/\tau + (3\alpha/2)(U_j^{(n+1/2)(s+1)})_{xxx} - (\alpha/2)(U_j^{(n+1/2)(s+1)})_{xxx} + (4\gamma/3)[p/(p+1)]\{(U_j^{(n+1/2)s})^{p-1}(U_j^{(n+1/2)(s+1)})_x + [(U_j^{(n+1/2)s})^{p-1}U_j^{(n+1/2)(s+1)}]_x\} - (\gamma/3)[p/(p+1)]\{(U_j^{(n+1/2)s})^{p-1}(U_j^{(n+1/2)(s+1)})_x + [(U_j^{(n+1/2)s})^{p-1}U_j^{(n+1/2)(s+1)}]_x\} = 0$, s 为迭代次数, 取迭代初值为: $U_j^{(n+1/2)(0)} = \begin{cases} U_j^n, & n = 0, \\ 3U_j^n/2 - U_j^{n-1}/2, & n \geq 1. \end{cases}$ 当

$\|U_j^{(n+1/2)(s+1)} - U_j^{(n+1/2)s}\|_\infty < \varepsilon$ 时停止迭代, 本文取 $\varepsilon = 10^{-10}$ 。

算例 1 取 $\alpha = 1, \gamma = 3, p = 2$, 经典 KdV 方程^[15]: $u_t + u_{xxx} + 3(u^2)_x = 0, (x, t) \in [x_L, x_R] \times [0, T]$, 设方程初值条件为: $u_0(x) = 0.5\text{sech}^2(0.5x)$, 则该方程的精确解为: $u(x, t) = 0.5\text{sech}^2[0.5(x - t)]$ 。

设 $\|e\|_\infty = \|U^n - u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J-1} |U_j^n - u_j^n|$, 其中 $u_j^n = u(x_j, t_n)$ 为精确解, U_j^n 为格式 (4) ~ (6) 的解。定义空间和时间的收敛阶为: $\text{Order } 1 = \log_2(\|e(\tau, h)\|_\infty / \|e(\tau/4, h/2)\|_\infty)$, $\text{Order } 2 = \log_2(\|e(\tau, h)\|_\infty / \|e(\tau/2, h)\|_\infty)$ 。取 $x_L = -20$, $x_R = 60, h = 0.5, \tau = h^2$, 对数值格式 (4) ~ (6) 进行计算, 不同时刻数值解见图 1。

图 1 表明, 差分格式 (4) ~ (6) 的数值解与精确解具有很好的吻合。为了验证差分格式的质量和能量守恒, 表 1 给出了 $x_L = -20, x_R = 60$ 和不同 h, T 时 Q^n, E^n 的值。

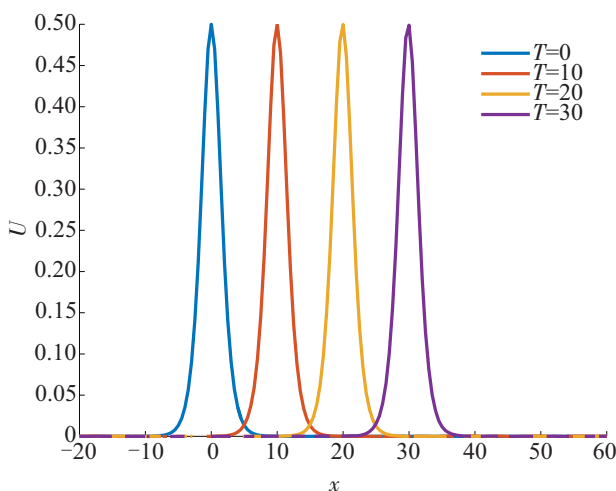


图 1 不同时刻的数值解

Fig.1 Numerical solutions at different time

表 1 守恒量式(7)和式(8)的数值模拟

Tab.1 Numerical simulations of conservative quantities formula (7) and (8)

时间 Time	$h = 0.25$		$h = 0.125$	
	E^n	Q^n	E^n	Q^n
0	0.250 000 000	2.000 000 000	0.250 000 000	2.000 000 000
10	0.250 046 403	2.000 017 002	0.250 003 287	2.000 002 185
20	0.250 059 148	1.999 983 036	0.250 005 246	1.999 998 333
30	0.250 056 031	2.000 016 106	0.250 004 055	1.999 996 912

表 1 验证了差分格式的质量和能量的守恒性。为了验证差分格式的收敛精度, 表 2 给出了 $x_L = -40, x_R = 100, T = 60$ 时不同 h, τ 下的误差和空间收敛阶, 表 3 给出了 $x_L = -20, x_R = 60, T = 10, h = 1/100$ 时不同 τ 下的误差和时间收敛阶。

表 2 不同步长下的误差和空间收敛阶

Tab.2 Errors and convergence orders in space with different step sizes

项目 Item	(h, τ)	$\ e\ _\infty$	Order 1
格式(4) ~ (6) Scheme(4) ~ (6)	(1/2, 1/4)	$4.755 4 \times 10^{-2}$	—
	(1/4, 1/16)	$3.000 1 \times 10^{-3}$	3.986 4
	(1/8, 1/64)	$1.937 1 \times 10^{-4}$	3.953 0
文献[9] Literature[9]	(1/2, 1/4)	$8.640 0 \times 10^{-2}$	—
	(1/4, 1/16)	$5.331 5 \times 10^{-3}$	4.018 4
	(1/8, 1/64)	$3.330 7 \times 10^{-4}$	4.000 6

表 3 不同 τ 下的误差和时间收敛阶

Tab.3 Errors and convergence orders in time with different τ sizes

τ	$\ e\ _\infty$	Order 2
1/10	$1.221 8 \times 10^{-3}$	—
1/20	$3.081 7 \times 10^{-4}$	1.987 2
1/40	$7.760 3 \times 10^{-5}$	1.989 5

表 2 验证了差分格式在空间上具有 4 阶, 表 3 验证了差分格式在时间上具有 2 阶的收敛精度。该结果与前面的理论推导部分结果一致。

文献 [15] 中格式 (19) 是一个 4 阶 3 层线性差分格式, 由表 2 可以看出, 差分格式 (4) 的误差比文献 [15] 中格式 (19) 的误差更小。

算例 2 取 $\alpha = 1, \gamma = 1/p$, 则广义 KdV 方程 (1) 孤波解^[16]为: $u(x, t) = A \operatorname{sech}^{2/(p-1)} [K(x - x_0) - \omega t]$, 其中: $K = (p-1) \sqrt{[A^{p-1}/(2\alpha p(p+1))]}$; $\omega = K[2A^{p-1}/(p(p-1))]$ 。

取 $A = 0.8, x_0 = 10$, 固定 $X_L = -20, X_R = 60, h = 0.5, \tau = h^2, p$ 取不同值时在不同时刻的数值模拟波形图见图 2, 数值模拟网格图见图 3。

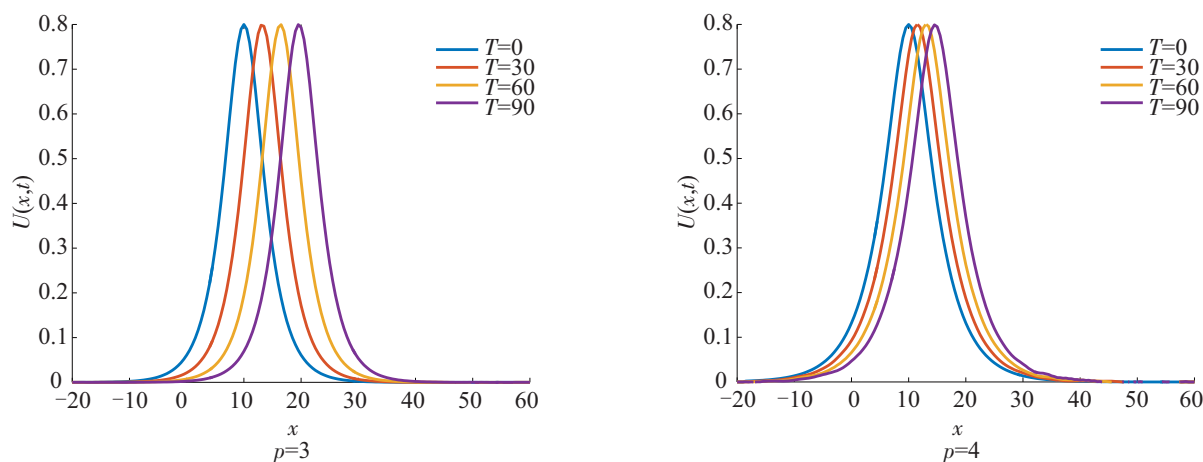


图 2 不同时刻的数值模拟波形图 ($p=3, 4$)

Fig.2 The numerical simulation waveform at different time ($p=3, 4$)

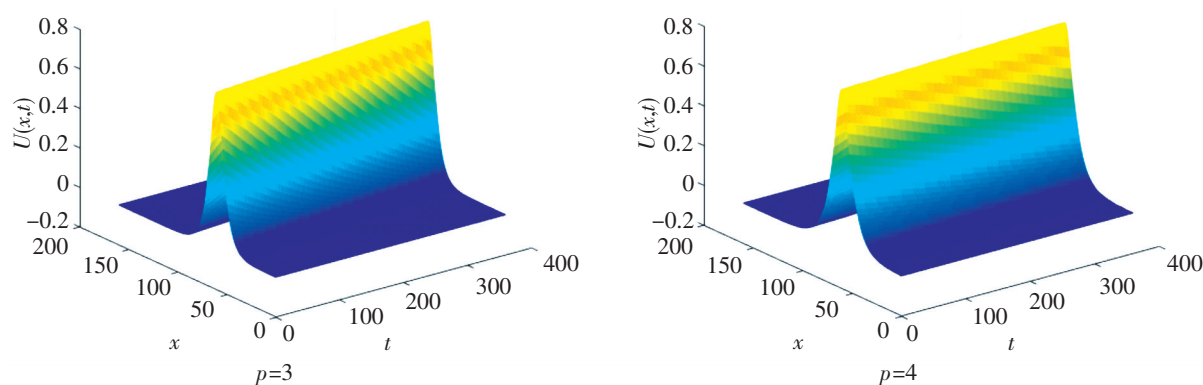


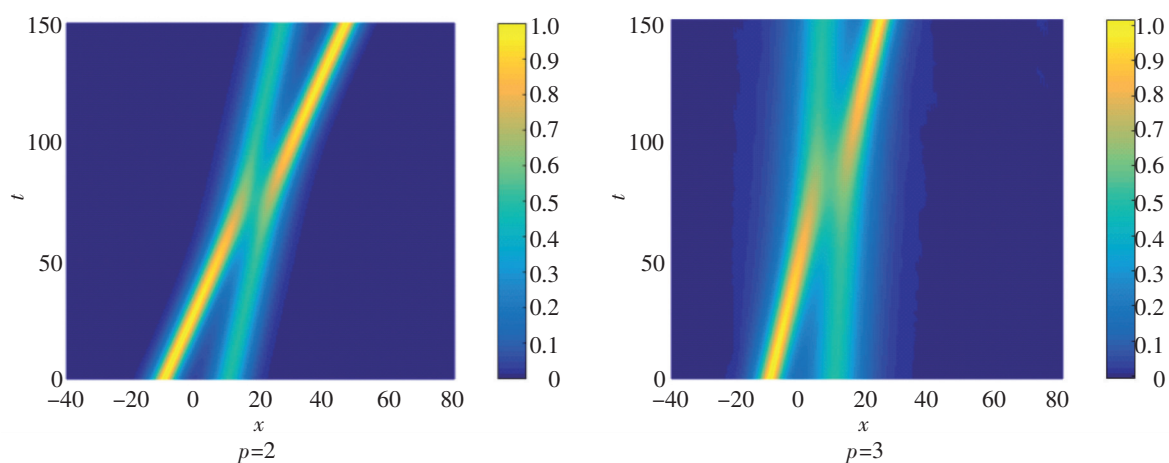
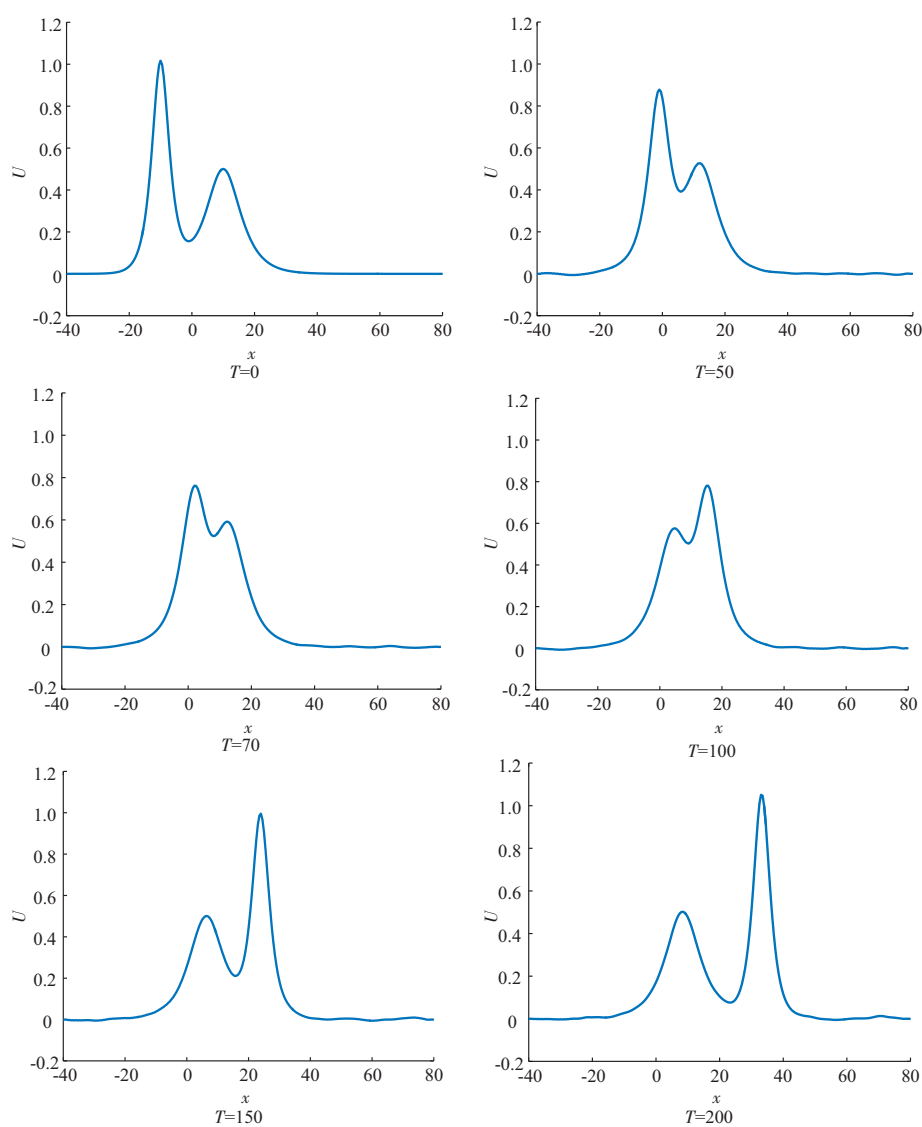
图 3 $T=90$ 时的数值模拟网格图

Fig.3 Numerical simulation of grid diagram when $T=90$

由算例 1 和算例 2 可以看出, 本文针对初边值问题 (1) ~ (3) 所提的差分格式 (4) ~ (6) 是有效的。

算例 3 取 $\alpha = \gamma = 1/p$, 且取初始条件为 $u(x, 0) = A_1 \operatorname{sech}^{2/(p-1)} [K_1(x + x_0)] + A_2 \operatorname{sech}^{2/(p-1)} [K_2(x - x_0)]$, 其中: $K_i = (p-1) \sqrt{[A_i^{p-1}/(2\alpha p(p+1))]}$; $\omega = 2K_1 A_1^{p-1}/[p(p-1)]$, $i = 1, 2$ 。取 $A_1 = 1, A_2 = 0.5, x_0 = 10$, 固定 $X_L = -40, X_R = 80, h = 0.5, \tau = h^2$ 。

图 4 给出了 $p = 2$ 和 $p = 3$ 的 2 个数值孤立波碰撞的俯视图。图 5 模拟了 $p = 3$ 的 2 个数值孤立波在 $T = 0 \sim 200$ 区间内的碰撞。可见, 碰撞前高的波追赶小的波, 碰撞后两个波能很好地分离, 随后两个波均保持形状不变地向前运动。

图4 2个数值孤立波的碰撞 ($p=2,3$)Fig.4 Collision of two numerical solitary waves ($p=2,3$)图5 不同时刻下的双波碰撞 ($p=3$)Fig.5 Collision of two numerical solitary waves at different time ($p=3$)

[参考文献]

- [1] KORTEWEG D J, DE VRIES G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves [J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1895, 39(240): 422-443. DOI:10.1080/14786449508620739.
- [2] 李家永, 阿不都热西提·阿不都外力. 解 KdV 方程的一个二阶三层差分格式 [J]. 工程数学学报, 2007, 24(6): 1137-1140.
- [3] ANJIAN B. Solitary wave solution for KdV equation with power-law nonlinearity and time-dependent coefficients [J]. Nonlinear Dynam, 2009, 58(1/2): 345-348. DOI:10.1007/s11071-009-9480-5.
- [4] 盛秀兰. KdV 方程的 Crank-Nicolson 差分格式 [J]. 聊城大学学报 (自然科学版), 2012, 25(4): 23-26.
- [5] 郭瑞, 王周峰, 王振华. KdV 浅水波方程的 Crank-Nicolson 差分格式 [J]. 河南科技大学学报 (自然科学版), 2012, 33(2): 70-74.
- [6] 胡越, 孙建设. 一类广义 KdV 方程 [J]. 吉首大学学报 (自然科学版), 2007, 28(3): 6-9.
- [7] 邓雅清, 王晓峰, 何育宇, 等. RLW-KdV 方程的高阶紧致有限差分格式 [J]. 数学进展, 2022, 51(2): 360-374.
- [8] ROUATBI A, ACHOURI T, OMRANI K. High-order conservative difference scheme for a model of nonlinear dispersive equations [J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37: 4169-4195. DOI:10.1007/s40314-017-0567-1.
- [9] GHILOUFI A, RAHMENI M, OMRANI K. Convergence of two conservative high-order accurate difference schemes for the generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation [J]. Engineering with Computers, 2020, 36(2): 1-16. DOI: 10.1007/s00366-019-00719-y.
- [10] WANG X F, DAI W Z. A conservative fourth-order stable finite difference scheme for the generalized Rosenau-KdV equation in both 1D and 2D [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 55: 310-331. DOI: 10.1016/j.cam.2019.01.041.
- [11] BAYARASSOU K, ROUATBI A, OMRANI K. Uniform error estimates of fourth-order conservative linearized difference scheme for a mathematical model for long wave [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2020, 97(8): 1678-1703. DOI:10.1080/00207160.2019.1652738.
- [12] AHLEM G, KHALED O. New conservative difference schemes with fourth-order accuracy for some model equation for nonlinear dispersive waves [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2017, 34(2): 451-500. DOI: 10.1002/num.22208.
- [13] 黄矜彤, 胡劲松, 贾其涛. 求解 BBM 方程的高精度非线性 CN 差分格式 [J]. 四川大学学报 (自然科学版), 2019, 56(3): 387-391.
- [14] BISWAS A, TRIKI H, LABIDI M. Bright and dark solitons of the Rosenau-Kawahara equation with power law nonlinearity [J]. Physics of Wave Phenomena, 2011, 19(1): 24-29. DOI:10.3103/S1541308X11010067.
- [15] KANYUTA P, BEN W, THONGCHAI D. Efficiency of high-order accurate difference schemes for the Korteweg-de Vries equation [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014(3): 1-8. DOI:10.1155/2014/862403.
- [16] BONA J L, DOUGALIS V A, KARAKASHIAN O A, et al. Conservative, high-order numerical schemes for the generalized Korteweg-de Vries equation [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London (Series A): Physical and Engineering Sciences, 1995, 351(1695): 107-164. DOI:10.1098/rsta.1995.0027.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)