

时间尺度上具有PS控制器的动态网络指数型同步

刘捷, 宾红华, 黄振坤

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究具有PS(proportional-sup)控制协议的动态网络在时间尺度上的指数型同步问题。为了实现动态网络的指数型同步, 利用线性时滞动态方程在时间尺度上的指数型估计式和不等式, 导出动态网络在时间尺度上的指数型同步准则。数值例子验证了分析结果的有效性, 主要结果可应用到连续和离散情形。

[关键词] 动态网络; 指数型同步; 复杂网络; 时间尺度; PS控制器

[中图分类号] O 193

Exponential Synchronization of Dynamic Networks with PS Controllers on Time Scales

LIU Jie, BIN Honghua, HUANG Zhenkun

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The exponential synchronization of dynamical networks under proportional-sup(PS) control protocol on time scales was investigated. In order to achieve the exponential synchronization of dynamical networks, exponential estimations and inequalities concerning linear delay dynamic equations on time scales were used to derive the exponential synchronization criterion of dynamic networks. Numerical examples verified the validity of the results, which could be held for both continuous and discrete cases.

Keywords: dynamic networks; exponential synchronization; complex network; time scales; PS controller

0 引言

复杂网络^[1]广泛存在于人类社会和自然界, 现实生活中很多系统都可以被看作复杂网络, 如通信、电网、互联网、控制工程及系统科学等。在模型上, 复杂网络是由大量相互连接的单个节点组成, 每个节点可以看作是一个具有一定动态特征和信息存储能力的动力系统, 用边来表示节点之间相互作用。因此, 复杂网络在这些动力学节点及其耦合连接的整体拓扑下, 常常表现出非常复杂的运动特征。同步作为复杂动态网络中一种有趣而重要的集聚行为, 所有节点利用它们之间的信息交换来驱动到共同状态, 近年来得到了人们的广泛关注, 并且有着广泛的潜在应用, 如在机器人、飞行器和水下潜航器编队以及工业、电气、通信、生产等方面^[2-3]。因此, 一般动态网络的同步控制是一个值得深入研究的课题。

然而, 由目前的文献可知, 大部分关于连续时间^[4]和离散时间^[5]动态网络的同步工作是分开进

[收稿日期] 2020-10-07

[基金项目] 国家自然科学基金项目(61573005); 福建省自然科学基金项目(2019J01330, 2018J01417)

[作者简介] 刘捷(1997—), 女, 硕士生, 从事复杂网络分析与控制研究。通信作者: 宾红华(1966—), 女, 教授, 硕导, 从事复杂网络分析与控制研究。E-mail: hbin@jmu.edu.cn

行的。一方面,连续时间和离散时间复杂网络同步研究之间有许多重复的结果,因此在许多情况下,单独研究它们是多余的。另一方面,包含连续时间和离散时间的复杂网络同步更符合实际。例如,大脑中的一些神经元在白天是活跃的,在晚上是不活跃的,而它们在第二天会重新被激活,如此循环。此外,网络系统的时间域并不总是众所周知的连续时间间隔或离散时间域。因此,研究广义时间域上的复杂动态网络具有重要的意义^[6]。为此,时间尺度理论(时标微积分)^[7-8]提出了一种统一动态系统连续时间和离散时间的方法。如实数集 \mathbf{R} 和整数集 \mathbf{Z} 是 2 种特殊类型的时间尺度,基于时间尺度的复杂网络可以包含连续时间和离散时间,当选择实数集 \mathbf{R} 作为时间尺度,可得到连续时间网络系统,选择整数集 \mathbf{Z} 作为时间尺度,可得到离散时间网络系统。

目前,已有学者将时间尺度微积分理论引入复杂网络的同步研究,得到了很多很好的结果。如:文献[9]研究了在时间尺度上具有分布式牵制脉冲控制的动态网络的内外同步问题;文献[10]研究了复杂动态网络在时间尺度上的牵制同步;文献[11]研究了在时间尺度上的具有时变拓扑的复杂网络脉冲同步;文献[12]提出了在时间尺度上同时具有泄漏延迟和耦合延迟复杂动力系统的同步准则;文献[13]研究了非线性复杂网络的在时间尺度上的牵制间歇指数同步;文献[14]研究了在时间尺度上的基于事件的复杂网络的时间间隔牵制控制及应用;文献[15]导出了一类多智能体系统在时间尺度上的一致性准则;文献[16]引入时标型一致渐进稳定函数,并将改进的稳定性定理应用于多智能体系统,解决系统在时间尺度上的一致性问题。由此可以看出,在时间尺度上研究复杂网络的动力学可以简化和省去许多重复的工作。

众所周知,控制器在实现复杂网络同步过程中起着重要作用。复杂网络同步普遍的控制方法是在网络的每个节点上添加一个控制器。有代表性的控制方法包括激活反馈控制、线性分离控制、线性耦合控制、滑模控制等^[17]。有效的控制策略有间歇控制、自适应控制、脉冲控制、采样控制、切换控制、事件触发控制等^[18]。为了实现一般复杂动力系统在时间尺度上的同步,本文在文献[19]所提出的分布式 PI 控制的启发下,提出了 PS 控制器,解决了一般动态网络在时间尺度上的指数型同步问题,使复杂网络在包含连续时间和离散时间的广义时域上达到稳定状态。此外,本文在文献[20]模型的基础上,引用了文献[21]的定理,并在设计的 PS 控制器的作用下,实现复杂网络系统的指数同步,并将结果推广到更一般复杂时域的网络系统中。

1 预备知识和网络模型

本节给出了一些关于时间尺度的基本定义及相关概念。相关的理论背景可以参考文献[7-8]。

时间尺度 T 是实数集 \mathbf{R} 的任意一个非空闭子集,如 \mathbf{R} , \mathbf{Z} , \mathbf{N} 等,前跳算子 $\sigma: T \rightarrow T$ 定义为 $\sigma(t) := \inf\{s \in T: s > t\}$,并且当 $\sup T \in T$ 时, $\sigma(\sup T) = \sup T$ 。后跳算子 $\rho: T \rightarrow T$ 定义为 $\rho(t) := \sup\{s \in T: s < t\}$,并且当 $\inf T \in T$ 时, $\rho(\inf T) = \inf T$ 。集合 T^k 定义为:当 $\sup T < +\infty$ 时, $T^k := T \setminus (\rho(\sup T), \sup T]$,否则 $T^k := T$ 。距离函数 $\mu: T \rightarrow [0, +\infty)$ 定义为 $\mu(t) := \sigma(t) - t$,当 $\mu(t) > 0$ 时,称 t 为右扩散点;当 $\mu(t) = 0$ 时,称 t 为右稠密点。 C_{rd} 表示所有定义在 T 上的右稠密连续函数。若函数 $p(t) \in C_{rd}$ 并且满足:对任意的 $t \in T^k$,有 $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$,则记 $p(t) \in \mathbf{R}$ 。若函数 $p(t) \in C_{rd}$ 并且满足:对任意的 $t \in T^k$,有 $1 + \mu(t)p(t) > 0$,则记 $p(t) \in \mathbf{R}^+$ 。对任意 $p(t) \in \mathbf{R}$,记 $(\ominus p)(t) = -p(t)/(1 + \mu(t)p(t))$,向量 \mathbf{x} 的范数为 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ 。

现考虑由 N 个相同的耦合节点构成的一般复杂动态网络,每个节点的状态方程^[20]可以表述为

$$\mathbf{x}_i^\Delta(t) = f(\mathbf{x}_i(t)) + \sum_{j=1}^N (a_{ij}x_j(t)), \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_{i1}(t), \dots, \mathbf{x}_{in}(t))^T \in \mathbf{R}^n$; $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 表示每个节点的内在动力学方程。 $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是节点间耦合矩阵。如果节点 i 能收到来自节点 j 的信息,则 $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, 且 $a_{ii} = 0$ 。

设受控网络为:

$$y_i^\Delta(t) = f(y_i(t)) + \sum_{j=1}^N (a_{ij}y_j(t) + u_i), \tag{2}$$

其中 u_i 为控制器。则误差方程为:

$$e_i^\Delta(t) = f(y_i(t)) - f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N a_{ij}e_j(t) + u_i, \tag{3}$$

其中: $e_i(t) = (e_{i1}(t), \dots, e_{in}(t))^T = y_i(t) - x_i(t)$ 。

记 $e(t) = ((e_1(t))^T, \dots, (e_N(t))^T)^T \in \mathbf{R}^{nN}$, $F(x(t)) = (f(x_1(t))^T, \dots, f(x_N(t))^T)^T$, $F(y(t)) = (f(y_1(t))^T, \dots, f(y_N(t))^T)^T$, $U = (u_1^T, u_2^T, \dots, u_N^T)^T$ 。则系统 (3) 可以改写为:

$$e^\Delta(t) = F(y(t)) - F(x(t)) + (A \otimes I_n)e(t) + U, \tag{4}$$

其中: \otimes 表示 Kronecker 积; I_n 是一个 $n \times n$ 的单位矩阵。

定义 1 令 $f: T \rightarrow \mathbf{R}$, $t \in T^k$, 称 $f^\Delta(t)$ 为 f 在 t 处的 Δ -导数, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 t 的邻域 $U \subset T$, 有 $|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|, \forall s \in U$, 若 $f^\Delta(t)$ 在任意的 $t \in T^k$ 均存在, 则称 f 是 Δ -可微的。

引理 1^[7] 若 $f, g: T \rightarrow \mathbf{R}$ 在任意的 $t \in T^k$ 上是可微的, 则有 $f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t); (fg)^\Delta = f^\Delta g + f^\sigma g^\Delta = f^\Delta g^\sigma + fg^\Delta$ 。

引理 2^[8] 对任意给定的时间尺度 T 和函数 $p(t)$, 若 $p(t) \in \mathbf{R}$, 那么 $e_p(t, t_0)$ 是以下初值问题的唯一解。 $y^\Delta = p(t)y, y(t_0) = 1, t \in T$, 其中, $e_p(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta \tau\right), t_0, t \in T$ 。柱面变换 $\xi_h(z)$ 的表达式为 $\xi_h(z) = \begin{cases} \log(1 + zh)/h, & h \neq 0, \\ z, & h = 0, \end{cases}$ \log 表示主对数函数。

假设 1 设 F 满足 Lipschitz 条件 $\|F(y(t)) - F(x(t))\| \leq v \|e(t)\|$, 其中常数 $v > 0$ 。

引理 3^[22] 记 $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^n$, 则对任意 $l > 0$, 有 $x^T y + y^T x \leq l x^T x + l^{-1} y^T y$ 。

定义 2 对系统任意的初始条件 $\psi_i(s) \in C([- \tau, 0]_T, \mathbf{R}^n)$, 存在常数 $\varepsilon > 0, M > 0$ 以及一个足够大常数 $T > 0$, 使得 $\|y_i(t) - x_i(t)\| \leq M e_{\ominus \varepsilon}(t, 0), t > T, i = 1, 2, \dots, N$, 则称网络 (1) 和控制网络 (2) 可实现指数型同步。

引理 4^[21] 设 $V(t)$ 是一个定义在时间尺度 T 上的函数且满足:

$$V^\Delta(t) \leq -a(t)V(t) + b(t) \sup_{s \in [t-\tau^*, t]} V(s), t > t_0, \tag{5}$$

$$V(s) = |\varphi(s)|, s \in [t_0 - \tau^*, t_0]_T, \tag{6}$$

其中: $\varphi(s) \in C_{rd}; s \in (-\infty, t_0]_T$, 且 $\tau(t), a(t), b(t)$ 是定义在时间尺度 T 上的非负 rd-连续的有界函数。 $\sup_{t \in T} \tau(t) = \tau^*, \sup_{s \in (-\infty, t_0]_T} V(s) = M > 0$, 满足:

$$a(t) - b(t) \geq \varepsilon = \inf_{t \in T} (a(t) - b(t)) > 0, t \in T, \tag{7}$$

则存在一个正数 $\bar{\lambda}$, 使得:

$$V(t) \leq (\sup_{s \in [t_0 - \tau^*, t_0]} V(s)) e_{\ominus \bar{\lambda}}(t, t_0), t \in [t_0, \infty)_T. \tag{8}$$

注 1 当 $T = \mathbf{R}$ 时, $e_{-\bar{\lambda}}(t, t_0) = e^{-\bar{\lambda}(t-t_0)} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ 。当 $T = \mathbf{Z}$ 时, 由 $e_{\ominus \bar{\lambda}}(t, t_0)$ 是差分方程 $x(\sigma(t)) = x(t)/(1 + \bar{\lambda}), t \in \mathbf{Z}$ 的解, 易知 $e_{\ominus \bar{\lambda}}(t, t_0) = (1/(1 + \bar{\lambda}))^{t-t_0} \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ 。

注 2 若 $V(t) = e^T(t)e(t)$, 基于引理 4, 则 $V(t) = \|e(t)\|^2 \leq (\sup_{s \in [t_0 - \tau^*, t_0]_T} V(s)) e_{\ominus \bar{\lambda}}(t, t_0)$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\|^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{s \in [t_0 - \tau^*, t_0]_T} V(s) e_{\ominus \bar{\lambda}}(t, t_0) \rightarrow 0$, 即可得误差 $e(t)$ 是指数型同步。

2 动态网络的指数型同步

定理 1 在假设 1 的前提下, 如果存在定义在时间尺度 T 上的非负 rd-连续的有界函数 $a(t)$ 、 $b(t)$, 满足 $a(t) - b(t) \geq \varepsilon = \inf_{t \in T} (a(t) - b(t)) > 0$, 且 $[2 + \mu(t)(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p + l\sigma_s)](\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + a(t) + l\sigma_s < 0$, $b(t) = l^{-1}\sigma_s + l^{-1}\mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + \mu(t)\sigma_s^2$, 则动态网络 (1) 和 (2) 能在 PS 控制器为 $U = -\sigma_p \mathbf{e}(t) + \sigma_s \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s)$ 的情况下实现指数型同步, 其中 σ_p 、 σ_s 为正数。

证明 根据引理 4, 需要证明 $V^\Delta(t) + a(t)V(t) \leq b(t) \sup_{s \in [t-\tau, t]} V(s)$, 考虑非负函数 $V(t) = \mathbf{e}^T(t) \mathbf{e}(t)$, 则有 $V^\Delta(t) + a(t)V(t) = (\mathbf{e}^T(t))^\Delta \mathbf{e}(t) + (\mathbf{e}^T(t))^\sigma \mathbf{e}^\Delta(t) + a(t)\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t) = (\mathbf{e}^\Delta(t))^\top \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}^\Delta(t) + \mu(t)(\mathbf{e}^\Delta(t))^\top \mathbf{e}^\Delta(t) + a(t)\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t) = 2\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}^\Delta(t) + \mu(t)(\mathbf{e}^\Delta(t))^\top \mathbf{e}^\Delta(t) + a(t)\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t) = 2\mathbf{e}^T(t)(\mathbf{F}(y(t)) - \mathbf{F}(x(t)) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) + \mathbf{U}) + \mu(t)(\mathbf{F}(y(t)) - \mathbf{F}(x(t)) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) + \mathbf{U})^\top (\mathbf{F}(y(t)) - \mathbf{F}(x(t)) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) + \mathbf{U}) + a(t)\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t) \leq 2\mathbf{e}^T(t)[\mathbf{v}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) - \sigma_p \mathbf{e}(t) + \sigma_s \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s)] + \mu(t)[\mathbf{v}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) - \sigma_p \mathbf{e}(t) + \sigma_s \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s)]^\top \cdot [\mathbf{v}(\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) + (\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{e}(t) - \sigma_p \mathbf{e}(t) + \sigma_s \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s)] + \mu(t)[(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)\mathbf{e}(t) + \sigma_s \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s)] + \mu(t)[(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)\mathbf{e}(t) + \sigma_s \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s)]^\top [(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)\mathbf{e}(t) + \sigma_s \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s)] + a(t)\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t) = [2(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + \mu(t)(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)^2 + a(t)]\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t) + 2[\sigma_s + \mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)]\mathbf{e}^T(t) \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s) + \mu(t)\sigma_s^2 \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}^T(s)\mathbf{e}(s)。$

因此, 对任意的 $l > 0$, 由引理 3 得,

$$\begin{aligned} & 2[\sigma_s + \mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)]\mathbf{e}^T(t) \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}(s) \leq \\ & [\sigma_s + \mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)][l\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t) + l^{-1} \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}^T(s)\mathbf{e}(s)]。 \end{aligned} \quad (9)$$

由式 (9) 可得

$$\begin{aligned} V^\Delta(t) + a(t)V(t) & \leq [2(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + \mu(t)(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)^2 + \\ & a(t) + l\sigma_s + l\mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)]\mathbf{e}^T(t)\mathbf{e}(t) + \\ & [l^{-1}\sigma_s + l^{-1}\mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + \mu(t)\sigma_s^2] \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}^T(s)\mathbf{e}(s)。 \end{aligned} \quad (10)$$

设计合适的 σ_p 和 σ_s , 使

$$\begin{aligned} & 2(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + \mu(t)(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p)^2 + a(t) + l\sigma_s + \\ & l\mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) < 0, \end{aligned} \quad (11)$$

即

$$[2 + \mu(t)(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p + l\sigma_s)](\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + a(t) + l\sigma_s < 0, \quad (12)$$

从而

$$V^\Delta(t) + a(t)V(t) \leq [l^{-1}\sigma_s + l^{-1}\mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + \mu(t)\sigma_s^2] \sup_{s \in [t-\tau, t]} \mathbf{e}^T(s)\mathbf{e}(s)。 \quad (13)$$

可令

$$b(t) = l^{-1}\sigma_s + l^{-1}\mu(t)\sigma_s(\mathbf{v} + \lambda_{\max}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}_n) - \sigma_p) + \mu(t)\sigma_s^2, \quad (14)$$

易知 $b(t)$ 为一个有界的函数, 且有 $V^\Delta(t) + a(t)V(t) \leq b(t) \sup_{s \in [t-\tau, t]} V(s)$, 应用引理 4 和注 2 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\|^2 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{s \in [t_0 - \tau^*, t_0]_T} V(s) e_{\ominus \lambda}(t, t_0) \rightarrow 0。$$

注 3 当 $T \in \mathbf{R}$ 且 $\sigma_s = 0$ 时, 本文包含了文献 [23] 的部分内容, 当 $T \in \mathbf{Z}$ 且 t 为整数时, 由系统

$$(3) \text{ 和控制器 } \begin{cases} \mathbf{e}_i(n+1) = \mathbf{e}_i(n) + \mathbf{f}(y_i(n)) - \mathbf{f}(x_i(n)) + \sum_{j=1}^N (a_{ij}e_j(n)) + \mu_i \\ U = -\sigma_p \mathbf{e}(n) + \sigma_s \sup_{s \in [n-\tau, n]} \mathbf{e}(n) \end{cases} \text{ 以及定理 1 可知,}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e(n)\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in [n-\tau, n]} e^T(n) e(n) e_{\ominus \lambda}(n, n_0) \rightarrow 0$, 可见本文的结果包含连续和离散的情形。

3 数值模拟

考虑以下时间尺度 $T = \cap_{k=0}^{+\infty} [0.2k, 0.2k + 0.1]$, 对所有的 $0.2k + 0.1$, 有 $\mu(t) = 0.1, \tau = 0.1$,

系统模型为
$$\begin{cases} x_i^\Delta(t) = f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N (a_{ij}x_j(t)), \\ y_i^\Delta(t) = f(y_i(t)) + \sum_{j=1}^N (a_{ij}y_j(t)) + \mu_i, \\ e_i^\Delta(t) = f(y_i(t)) - f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N (a_{ij}e_j(t)) + \mu_i. \end{cases}$$

考虑一维系统情况下, 其中 $i=1,2,3$,

取 $f(x_i) = 8\sin x_i$, 其中 $\|f(y_i) - f(x_i)\| = 8 \|\sin y_i - \sin x_i\| \leq 8 \|y_i - x_i\|$, 满足假设 1, 取 $v = 8, A = \sum_{i=1}^N a_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_{\max}(A \otimes I_n) = 1.4142$ 。

假设所有节点的初值在 $[-5, 5]$ 之间选取, 基于定理 1, 可取 $\sigma_p = 10, \sigma_s = 1, l = 1, a(t) < 14.8941$, 所以可取 $a(t) = 10, b(t) = 1.0414$ 。节点和误差的运动轨迹见图 1 ~ 图 3。

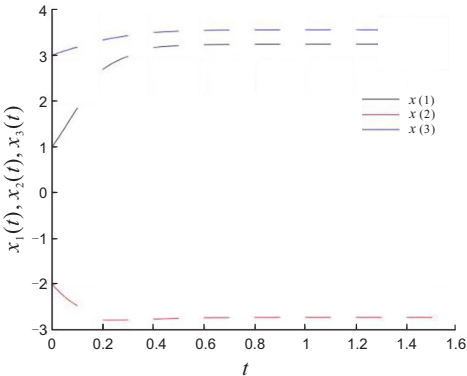


图1 网络节点的运动轨迹
Fig.1 The trajectory of network nodes

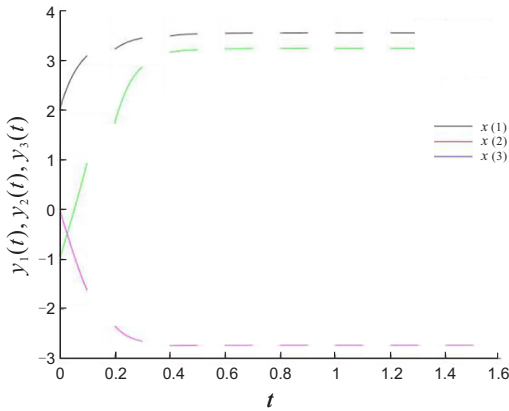


图2 控制网络节点的运动轨迹

Fig.2 Control the motion track of network nodes

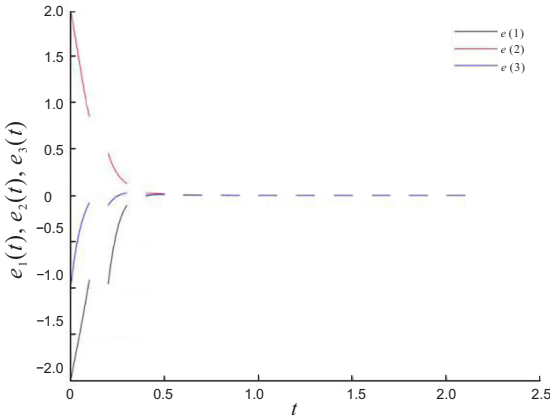


图3 误差系统在时标T上达到指数型同步

Fig.3 The error system achieves exponential synchronization on time scales T

4 结论

本文研究了具有 PS 控制器的一般动态网络在时间尺度下的指数型同步问题。根据提出的 PS 控制协议, 利用线性时滞动态方程及相应的不等式, 得到了在时间尺度下动态网络指数型同步。推广了文献 [20] 和文献 [21] 的相关研究, 使得动态网络同步的研究应用到更一般复杂时域的网络系统中。在今后的研究中, 将继续推进在时间尺度下动态网络同步的研究, 具体研究动态网络在时间尺度下不同控制策略的同步问题, 如时间尺度下的牵制控制、脉冲控制以及切换控制等。

[参考文献]

- [1] BOCCALETTI S, LATORA V, MORENO Y, et al. Complex networks: structure and dynamics [J]. Physics Reports, 2006, 424:175-308. DOI:10.1016/j.physrep.2005.10.009.
- [2] MATA-MZCHUCA J L, AGUILAR-LOPEZ R. Adaptive synchronization in multi-output fractional-order complex dynamical networks and secure communications [J]. The European Physical Journal Plus, 2018, 133:14.
- [3] TANG Y, QIAN F, GAO H J, et al. Synchronization in complex networks and its application: a survey of recent advances and challenges [J]. Annual Reviews in Control, 2014, 38(2):184-198.
- [4] LI H J. New criteria for synchronization stability of continuous complex dynamical networks with non-delayed and delayed coupling [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, 16:1027-1043.
- [5] CHENG R R, PENG M S, YU J C, et al. Synchronization for discrete-time complex networks with probabilistic time delays [J]. Physica A, 2019, 525:1088-1101. DOI:10.1016/j.physa.2019.04.012.
- [6] YUE D, LI H J. Synchronization stability of continuous/discrete complex dynamical networks with interval time-varying delays [J]. Neurocomputing, 2010, 73:809-819. DOI:10.1016/j.neucom.2009.10.008.
- [7] BOHNER M, PETERSON A. Advances in dynamic equations on time scales [M]. Boston: Birkh Wausser, 2001.
- [8] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales: an introduction with applications [M]. Boston: Birkh Wausser, 2001.
- [9] LU X D, LI H T. Distributed pinning impulsive control for inner-outer synchronization of dynamical networks on time scales [J]. Neural Processing Letters, 2020, 51:2481-2495. DOI:10.1007/s11063-020-10204-z.
- [10] KONG F D, SUN J P. Pinning synchronization of complex dynamical networks on time scales [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2021, 19:1-11. DOI:10.1007/s12555-020-0041-5.
- [11] PEI Y, BOHNER M, PI D C. Impulsive synchronization of time-scales complex networks with time-varying topology [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 80:1-10.
- [12] SYED ALI M, YOGAMBIGAI J. Synchronization criterion of complex dynamical networks with both leakage delay and coupling delay on time scales [J]. Neural Process Lett, 2019, 49:453-466. DOI:10.1007/s11063-018-9821-9.
- [13] WANG B Y, ZHANG Y J, ZHANG B Y. Exponential synchronization of nonlinear complex networks via intermittent pinning control on time scales [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2020, 37:100903.
- [14] XIAO Q, LEWIS F L, ZENG Z G. Event-based time-interval pinning control for complex networks on time scales and applications [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018, 65(11):8797-8808.
- [15] SHEN J, CAO J D. Consensus of multi-agent systems on time scales [J]. IMA Journal of Mathematical Control & Information, 2012, 29(4):507. DOI:10.1093/imamci/dns006.
- [16] LU X D, LI H T. An improved stability theorem for nonlinear systems on time scales with application to multi-agent systems [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2020, 67(12):3277-3281.
- [17] WANG X Y, SONG J M. Synchronization of the fractional order hyperchaos Lorenz systems with activation feedback control [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14:3351-3357. DOI:10.1016/j.cnsns.2009.01.010.
- [18] 石宇静, 李强. 复杂动态网络自适应有限时间同步控制 [J]. 控制理论与应用, 2020(1):147-154.
- [19] LV Y Z, LI Z K, DUAN Z S. Distributed PI control for consensus of heterogeneous multiagent systems over directed graphs [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2020, 50(4):1602-1609.
- [20] XU Y H, LU Y J, YAN W X, et al. Bounded synchronization of the general complex dynamical network with delay feedback controller [J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 84(2):661-667. DOI:10.1007/s11071-015-2514-2.
- [21] OU B Q, JIA B G, ERBE L. A generalized Halanay-type inequality on time scales [J]. Dynamic Systems and Applications, 2015, 24(6):389-398.
- [22] HUANG C X, CAO J D. On pth moment exponential stability of stochastic Cohen-Grossberg neural networks with time varying delays [J]. Neurocomputing, 2010, 72:986-990. DOI:10.1016/j.neucom.2009.08.019.
- [23] 陈刚, 王信, 肖伸平, 等. 复杂动态网络指数采样同步控制 [J]. 中南大学学报 (自然科学版), 2018, 49(12):2993-3001.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)