

具有恐惧效应的随机捕食-食饵模型动力学

李江, 魏春金

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究具有恐惧效应的随机捕食-食饵模型。证明对于任意给定的初始值, 系统都存在唯一的全局正解; 应用随机微分方程的比较定理, 得到系统的平均持续生存与灭绝的充分条件; 证明系统存在唯一的平稳分布且具有遍历性。最后, 通过数值模拟来验证主要结果。

[关键词] 捕食-食饵模型; 恐惧效应; 全局正解的存在唯一性; 平稳分布; 持久; 灭绝

[中图分类号] O 175.13

Dynamics of a Stochastic Predator-Prey Model with Fear Factor

LI Jiang, WEI Chunjin

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the dynamics of a stochastic predator-prey model with fear factor were investigated. First of all, it was proved that there was a unique positive global solution starting from any given initial value. Then, sufficient conditions for extinction and persistence in mean were obtained by comparison theorem for stochastic differential equations. In addition, it was proved that there were unique stationary distribution and they are ergodic. Finally, some numerical simulations were introduced to verify the main results.

Keywords: predator-prey model; fear factor; existence and uniqueness of global positive solution; stationary distribution; persistence; extinction

0 引言

长期以来, 在种群动力系统中, 捕食与食饵模型是许多学者的一个重要研究方向, 这方面的研究也取得了大量丰富的成果^[1-7]。生态学研究主要关注的是捕食者与食饵之间的相互作用, 这种相互作用主要是由捕食者对食饵的直接消耗控制的。文献 [8] 提出了模型

$$\begin{cases} dx = [f_1(x(t)) - p(x(t), y(t))y(t)]dt, \\ dy = [f_2(y(t)) + cp(x(t), y(t))y(t)]dt. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 、 $y(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时刻的种群密度; c 为转化率; $f_1(x(t))$ 、 $f_2(y(t))$ 分别表示食饵和捕食者的增长率; $p(x(t), y(t))$ 为功能反应函数。然而, 最新的理论研究和实验结果表明, 除了直接捕食之外, 捕食者的间接效应也会显著改变整个生态系统的动力学^[9-11]。仅仅是捕食威胁就足以迫使食饵改变自身的生活习惯并表现出各种反捕食的行为, 如选择新的栖息地、改变觅食时间和寻找更安全的觅食地点等, 这也会使得食饵生长、生存和繁殖的能力下降^[12-15]。基于此, 文

[收稿日期] 2021-01-18

[基金项目] 国家自然科学基金项目 (11971405, 22072057); 福建省自然科学基金项目 (2018J01418)

[作者简介] 李江 (1995—), 男, 硕士生, 从事生物数学方向研究。通信作者: 魏春金 (1973—), 女, 教授, 硕导, 从事生物数学方向研究。E-mail: chunjinwei92@163.com

献 [16] 考虑捕食者引起的恐惧并建立了模型

$$\begin{cases} dx = [r_0 x f(k, y) - d_1 x - ax^2 - g(x)y] dt, \\ dy = [-d_2 y + cg(x)y] dt. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $f(k, y)$ 为恐惧函数; k 为迫使食饵做出反捕食行为的恐惧程度; r_0 为食饵的内禀增长率; a 为食饵种内竞争; c 为转化率; $g(x)$ 为功能反应函数; $d_i (i = 1, 2)$ 为自然死亡率。

事实上, 除了出生率, 食饵的反捕食行为还会影响捕食者的捕获率。此外, 现实世界中的随机干扰是处处存在的, 种群在环境中不可避免会受到各种随机干扰的影响^[17-19]。因此, 与确定性模型相比, 随机模型更具有真实性。受到文献 [20-21] 的启发, 本文在模型 (2) 的基础上对随机模型

$$\begin{cases} dx = x[r/(1 + c_2 ky) - d_1 - ax - py/((1 + qx)(1 + c_1 k))] dt + \sigma_1 x dB_1(t), \\ dy = y[cp x/((1 + c_1 k)(1 + qx)) - hy - d_2] dt + \sigma_2 y dB_2(t) \end{cases} \quad (3)$$

进行研究, 其中: c_1 、 c_2 分别表示出生率和捕食率在恐惧程度 k 下的下降速率; $\sigma_i^2 (i = 1, 2)$ 表示白噪声强度; $B_1(t)$ 、 $B_2(t)$ 是相互独立的标准布朗运动。

1 预备知识

令 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个带有滤子 $\{F_t\}$ 并且满足通常条件 ($\{F_t\}_{t \geq 0}$ 是右连续单调递增, 且 F_0 包含所有零测集) 的完备概率空间。为方便起见, 约定以下记号: 1) $\mathbf{R}_+ := \{x: x > 0\}$, $\mathbf{R}_+^n :=$

$\{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$, $|X(t)| := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$; 2) 如果 $f(t)$ 是可积的, 定义 $\langle f(t) \rangle_T =$

$(1/T) \int_0^T f(t) dt$; 3) 如果 $f(t)$ 是有界的, 定义 $\hat{f} = \sup_{t \in \mathbf{R}_+} f(t)$, $\check{f} = \inf_{t \in \mathbf{R}_+} f(t)$; 4) 对于一个在 $[0, \infty)$

的函数 $z(t)$, 定义 $\langle z(t) \rangle^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} (1/t) \int_0^t z(s) ds$, $\langle z(t) \rangle_* = \liminf_{t \rightarrow \infty} (1/t) \int_0^t z(s) ds$ 。

随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t) dt + g(x(t), t) dB(t) \quad (4)$$

的解记作 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) (t \geq 0)$ 。其中: $f \in L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$; $g \in L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}^{n \times m})$; $B(t)$ 是 n 维布朗运动。

定理 1^[22] (存在唯一性定理) 假设 $f(x(t), t)$ 和 $g(x(t), t)$ 关于 $x(t)$ 满足下列条件: 1) 局部 Lipschitz 条件, 存在 $c_k > 0 (k = 1, 2, \dots)$, 使得 $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$ 且 $|x| \vee |y| \leq k$, 有 $|f(x, t) - f(y, t)| \vee |g(x, t) - g(y, t)| \leq c_k |x - y|$; 2) 线性增长条件, 存在 $c > 0$, 使得 $|f(x, t)| \vee |g(x, t)| \leq c(1 + |x|)$, $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$, 则初始条件为 $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$ 的系统 (4) 存在唯一连续的局部解 $x(t) (t \in [0, \tau_e))$, τ_e 是爆破时间。

定理 2^[22] (Itô 公式) 设 $x(t) (t \geq 0)$ 是 Itô 过程, 其随机微分为 $dx(t) = f(t) dt + g(t) dB(t)$, 其中: $f \in L^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$; $g \in L^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^{n \times m})$ 。若 $V(x(t), t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, 则 $V(x(t), t)$ 仍然是 Itô 过程, 具有随机微分: $dV(x(t), t) = V_t(x(t), t) dt + V_x(x(t), t) dx(t) + (1/2) d\mathbf{x}^T(t) V_{xx}(x(t), t) dx(t)$ 。

定义 1^[23] 若 $x(t)$ 是系统 (3) 的任意解, 则: 1) 若 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} (1/t) \int_0^t x(s) ds > 0$, 则称种群 $x(t)$ 为平均持续生存的; 2) 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 则称种群 $x(t)$ 为灭绝的。

设 $X(t)$ 是 \mathbf{R}^d 中的自治 Markov 过程, 可表示为随机微分方程: $dX(t) = f(X(t)) dt + \sum_{r=1}^k g_r(X(t)) dB_r(t)$, 其扩散矩阵为: $A(X) = a_{ij}(X)$, $a_{ij}(X) = \sum_{r=1}^k g_r^i(X) g_r^j(X)$ 。

引理 1^[23-24] 对 Markov 过程 $X(t)$, 若具有正则边界的有界区域 $U \in \mathbf{R}^d$ 有如下性质: 1) 对任

意的 $x \in U$, 扩散矩阵 $A(X)$ 的最小特征值是非零的; 2) 存在非负 C^2 - 函数 V , 使得 LV 在 $\mathbf{R}^d \setminus U$ 上为负数, 则 Markov 过程 $X(t)$ 存在唯一的遍历平稳分布 $\mu(\cdot)$ 。

引理 2^[21] 令 $x(t) \in C[\Omega \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+]$, 1) 若存在正常数 α_0 、 T 和 $\alpha \geq 0$, 使得当 $t > T$ 时, $\ln x(t) \leq \alpha T - \alpha_0 \int_0^t x(s) ds + \sum_{i=1}^n \beta_i B_i(t)$, 其中 $\beta_i (1 \leq i \leq n)$ 为 \mathbf{R}_+ 上的有界连续函数, $B_i (1 \leq i \leq n)$ 为独立标准布朗运动, 则 $\langle x \rangle^* \leq \alpha/\alpha_0$ 是几乎确定的; 2) 若存在正常数 α_0 、 T 和 $\alpha \geq 0$, 使得当 $t > T$ 时, $\ln x(t) \geq \alpha T - \alpha_0 \int_0^t x(s) ds + \sum_{i=1}^n \beta_i B_i(t)$, 其中 $\beta_i (1 \leq i \leq n)$ 为 \mathbf{R}_+ 上的有界连续函数, $B_i (1 \leq i \leq n)$ 为独立标准布朗运动, 则 $\langle x \rangle^* \geq \alpha/\alpha_0$ 。

引理 3^[25] 对任意 $x > 0, y > 0, 0 < \theta < 1$, 不等式 $x(1-x) + 2x \leq 2\sqrt{x}$ 、 $(x+y)^\theta \leq x^\theta + y^\theta$ 成立。

2 全局正解的存在性

定理 3 对任意给定的初值 $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$, 系统 (3) 在 $t \in [0, \infty)$ 存在唯一正解 $(x(t), y(t))$, 并且以概率 1 存在于 \mathbf{R}_+^2 中。

证明 首先考虑方程

$$\begin{cases} du = [r/(1 + c_2 k e^v) - d_1 - a e^u - p e^v / ((1 + c_1 k)(1 + q e^u)) - \sigma_1^2/2] dt + \sigma_1 dB_1(t), \\ dv = [-d_2 - h e^v + c p e^u / ((1 + c_1 k)(1 + q e^u)) - \sigma_2^2/2] dt + \sigma_2 dB_2(t). \end{cases} \quad (5)$$

显然, 系统 (5) 满足局部 Lipschitz 条件, 则系统存在唯一的局部解 $(u(t), v(t)) \in \mathbf{R}_+^2, t \in [0, \tau_e)$, 其中 τ_e 是爆破时间。设 $(x(t), y(t)) = (e^{u(t)}, e^{v(t)})$ 是模型 (3) 满足初始条件 $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$ 的唯一局部解, 为了证明这个解是全局的, 只需证明 $\tau_e = +\infty$ 。

令 $k_0 > 0$ 足够大, 使得 $(x(t), y(t)) \in [1/k_0, k_0] \times [1/k_0, k_0]$, 对于任意的正数 $k \geq k_0$, 定义一个停时序列: $\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e): x(t) \not\subseteq (1/k, k) \text{ 或 } y(t) \not\subseteq (1/k, k)\}$ 。

定义 $\inf_{k \rightarrow +\infty} \Phi = +\infty$ (Φ 代表一个空集)。显然当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 是单调递增的, 且 $\tau_k < \tau_e$, 于是有 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k$, 其中 $\tau_\infty \leq \tau_e$ 。因此, 只需证明 $\tau_\infty \rightarrow \infty$ 。

假设 $\tau_\infty \not\rightarrow \infty$, 则存在常数 $T_1 \geq 0$ 、 $\epsilon \in (0, 1)$ 和一个正整数 $k_1 \geq k_0$, 使得 $P\{\tau_k \leq T_1\} \geq \epsilon, \forall k \geq k_1$ 。

定义一个 C_2 -函数 $V(x, y): \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $V(x, y) = (x - 1 - \ln x) + (y - 1 - \ln y)$ 。由 Itô 公式可得 $dV(x, y) = LV(x, y)dt + (x - 1)\sigma_1 dB_1 + (y - 1)\sigma_2 dB_2$,

$$\begin{aligned} LV &= x[r/(1 + c_2 k y) - d_1 - ax - py/((1 + qx)(1 + c_1 k))] - [r/(1 + c_2 k y) - d_1 - \\ &\quad ax - py/((1 + qx)(1 + c_1 k))] + y[cpx/((1 + c_1 k)(1 + qx)) - hy - d_2] - \\ &\quad [cpx/((1 + c_1 k)(1 + qx)) - hy - d_2] + \sigma_1^2/2 + \sigma_2^2/2 \leq -ax^2 + (r - d_1 + \\ &\quad a)x - hy^2 + [(1 + c)p/(1 + c_1 k) - d_2 + h]y + d_1 + d_2 + \sigma_1^2/2 + \sigma_2^2/2 \leq \\ &\quad (r - d_1 + a)^2/(4a) + [(1 + c)p/(1 + c_1 k) - d_2 + h]^2/(4h) + \\ &\quad d_1 + d_2 + \sigma_1^2/2 + \sigma_2^2/2 := K > 0. \end{aligned}$$

后续证明与文献 [26] 类似, 在此省略。

3 随机持久与灭绝

定理 4 设 $x(t)$ 、 $y(t)$ 是系统 (3) 满足初始条件 $x(0) > 0$ 、 $y(0) > 0$ 的任意解, 则对任意 $m \geq 1$, 有: $E(x^m(t)) \leq L(m)$, $L(m) = \max\{m(m/a)^m[(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(m + 1)]^{m+1}, x(0)^m\}$ 。同样, 对于 $n \geq 1$, 有: $E(y^n(t)) \leq M(n)$, $M(n) = \max\{n(n/h)^n[(1/n + cp/(1 + c_1 k) - d_2 + (n - 1)\sigma_2^2/2)/(n + 1)]^{n+1}, y(0)^n\}$ 。

证明 令 $Q(x, t) = e^t x^m$, 其中 $m \geq 1$ 。应用 Itô 公式得, $dQ = me^t x^m [1/m + r/(1 + c_2 ky) - d_1 - ax - py/((1 + qx)(1 + c_1 k)) + (m - 1)\sigma_1^2/2]dt + me^t x^m \sigma_1 dB_1$, 因此, $E(Q(x, t)) = x(0)^m + m \int_0^t e^s x^m [1/m + r/(1 + c_2 ky) - d_1 - ax - py/((1 + qx)(1 + c_1 k)) + (m - 1)\sigma_1^2/2]ds \leq x(0)^m + m \int_0^t e^s x^m [1/m + r - d_1 - ax + (m - 1)\sigma_1^2/2]ds$ 。记 $f_1(x) = x^m(1/m + r - d_1 - ax + (m - 1)\sigma_1^2/2)$ 。考虑到 $f_1'(x) = mx^{m-1}(1/m + r - d_1 - ax + (m - 1)\sigma_1^2/2) + x^m - a$, $f_1'(x) = 0$, $x^* = m(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(a(m + 1))$ 。又因为 $f_1(x)'' < 0$, 故 $f_1(x)_{\max} = f_1(x^*) = (m/a)^m [(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(m + 1)]^{m+1}$, 因此, $E(e^t x^m) \leq x(0)^m + m \int_0^t e^s (m/a)^m [(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(m + 1)]^{m+1} ds = x(0)^m + m(m/a)^m [(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(m + 1)]^{m+1} (e^t - 1)$, 于是 $E(x^m) \leq \{x(0)^m - m(m/a)^m [(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(m + 1)]^{m+1}\} e^{-t} + m(m/a)^m [(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(m + 1)]^{m+1}$ 。故当 $t = 0$ 时, $E(x^m) \leq x(0)^m$; 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $E(x^m) \leq m(m/a)^m [(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(m + 1)]^{m+1}$ 。令 $L(m) = \max\{m(m/a)^m [(1/m + r - d_1 + (m - 1)\sigma_1^2/2)/(m + 1)]^{m+1}, x(0)^m\}$, 则有: 对 $m \geq 1$, $E(x^m) \leq L(m)$ 。

同理可得, 令 $M(n) = \max\{n(n/h)^n [(1/n + cp/(1 + c_1 k) - d_2 + (n - 1)\sigma_2^2/2)/(n + 1)]^{n+1}, y(0)^n\}$, 则有: 对 $n \geq 1$, $E(y^n) \leq M(n)$ 。

定理 5 设 $x(t)$ 、 $y(t)$ 是系统 (3) 满足初始条件 $x(0) > 0$ 、 $y(0) > 0$ 的任意解, 则: 1) 若 $d_1 + \sigma_1^2/2 < r/(1 + c_2 kM(1)) - pM(1)/(1 + c_1 k)$, 则种群 $x(t)$ 平均持久; 2) 若 $d_1 + \sigma_1^2/2 < r/(1 + c_2 kM(1)) - pM(1)/(1 + c_1 k)$ 且 $d_2 + \sigma_2^2/2 < cp/((1 + c_1 k)q)$, 则种群 $y(t)$ 平均持久。

证明 首先由系统 (3) 第一个方程可得: $d(\ln x) = [r/(1 + c_2 ky) - d_1 - ax - py/((1 + qx)(1 + c_1 k)) - \sigma_1^2/2]dt + \sigma_1 dB_1$, 对其两边从 0 到 t 进行积分得: $(\ln x(t) - \ln x(0))/t = (1/t) \int_0^t r/(1 + c_2 ky) ds - (d_1 + \sigma_1^2/2) - (a/t) \int_0^t x(s) ds - [p/(1 + c_1 k)] \int_0^t [y(s) - qx(s)y(s)/(1 + qx(s))] ds + M_1(t)/t$, 其中 $M_1(t) = \int_0^t \sigma_1 dB_1(s)$ 为实局部鞅。由局部鞅强大数定理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} M_1(t)/t = 0$ 。注意到 $y \leq M(1)$, 于是有 $(\ln x(t) - \ln x(0))/t \geq [r/(1 + c_2 kM(1)) - pM(1)/(1 + c_1 k) - d_1 - \sigma_1^2/2] - (a/t) \int_0^t x(s) ds$ 。由引理 2 结论 2) 可得: $\langle x \rangle_* \geq [r/(1 + c_2 kM(1)) - pM(1)/(1 + c_1 k) - d_1 - \sigma_1^2/2]/a$ 是几乎确定的, 即当 $d_1 + \sigma_1^2/2 < r/(1 + c_2 kM(1)) - pM(1)/(1 + c_1 k)$ 时, $\langle x \rangle_* > 0$ 是几乎确定的。

接下来考虑捕食者的持久性。首先需要注意的是, 从生物学角度考虑, 食饵持久是捕食者持久的必要条件, 因此 $x(t)$ 存在最小值, 记为 X^* 。由系统 (3) 第二个方程可得: $d(\ln y) = [cp x/((1 + c_1 k)(1 + qx)) - hy - d_2 - \sigma_2^2/2]dt + \sigma_2 dB_2$ 。注意到 $cp x/[(1 + c_1 k)(1 + qx)] = [c/(1 + c_1 k)][(p/q - p/(q(1 + qx)))] \geq [c/(1 + c_1 k)][p/q - p/(q(1 + qX^*))]$, 因此 $d(\ln y) \geq [cp/(q(1 + c_1 k)) - d_2 - \sigma_2^2/2]dt - [h + cp/(q(1 + c_1 k)(1 + qX^*))]ydt + \sigma_2 dB_2$ 。对其两边从 0 到 t 进行积分得: $(\ln y(t) - \ln y(0))/t = [cp/(q(1 + c_1 k)) - d_2 - \sigma_2^2/2] - [h + cp/(q(1 + c_1 k)(1 + qX^*))] \int_0^t y(s) ds + M_2(t)/t$, 其中 $M_2(t) = \int_0^t \sigma_2 dB_2(s)$ 为实局部鞅。由局部鞅强大数定理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} M_2(t)/t = 0$ 。再结合引理 2 结论 2) 可得: $\langle y \rangle_* \geq [cp/(q(1 + c_1 k)) - d_2 - \sigma_2^2/2]/[h + cp/(q(1 + c_1 k)(1 + qX^*))]$ 是几乎确定的, 即当 $d_2 + \sigma_2^2/2 < cp/(q(1 + c_1 k))$ 时, $\langle y \rangle_* > 0$ 是几乎确定的。

定理 6 设 $x(t)$ 、 $y(t)$ 是系统 (3) 满足初始条件 $x(0) > 0$ 、 $y(0) > 0$ 的任意解, 则: 1) 若 $r \leq$

$d_1 + \sigma_1^2/2$, 则种群 $x(t)$ 灭绝; 2) 若 $cp/(q(1 + c_1k)) \leq d_2 + \sigma_1^2/2$, 则种群 $y(t)$ 灭绝。

证明 因为 $dx = x[r/(1 + c_2ky) - d_1 - ax - py/((1 + qx)(1 + c_1k))]dt + \sigma_1 x dB_1$, 所以 $d(\ln x) = [r/(1 + c_2ky) - d_1 - ax - py/((1 + qx)(1 + c_1k)) - \sigma_1^2/2]dt + \sigma_1 dB_1 \leq (r - d_1 - ax - \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dB_1$ 。记 $f_2(x) = r - d_1 - ax - \sigma_1^2/2$, 因为 $f_2'(x) = -a < 0$, 所以 $f_2(x)_{\max} = f_2(0) = r - d_1 - \sigma_1^2/2$ 。于是 $d(\ln x) \leq (r - d_1 - \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dB_1$, 即 $\ln x \leq \ln x(0) + (r - d_1 - \sigma_1^2/2)t + \sigma_1 B_1$ 。由局部鞅强大数定律可得: $\limsup_{t \rightarrow \infty} \ln x(t)/t \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} [\ln x(0)/t + (r - d_1 - \sigma_1^2/2) + \sigma_1 B_1/t] = r - d_1 - \sigma_1^2/2$, 所以当 $r \leq d_1 + \sigma_1^2/2$ 时, $\limsup_{t \rightarrow \infty} \ln x(t)/t \leq 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

由系统 (3) 第二个方程可知, $d(\ln y) = [cp/((1 + c_1k)(1 + qx)) - hy - d_2 - \sigma_2^2/2]dt + \sigma_2 dB_2 \leq [cp/(q(1 + c_1k)) - hy - d_2 - \sigma_2^2/2]dt + \sigma_2 dB_2$ 。同理可得, 当 $cp/(q(1 + c_1k)) \leq d_2 + \sigma_2^2/2$ 时, $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 。

注1 定理5和定理6表明, 当 $cp/(q(1 + c_1k)) \leq d_2 + \sigma_2^2/2$ 时, 种群 $y(t)$ 灭绝, 反之, 种群 $y(t)$ 平均持久。由此可见, 白噪声强度 σ_2 对种群 $y(t)$ 的生存有较大的影响。当 $r \leq d_1 + \sigma_1^2/2$ 时, 种群 $x(t)$ 灭绝。反之, 当 $c_2 = 0$ 时, 若 $r = r/(1 + c_2kM(1)) > d_1 + \sigma_1^2/2$, 则种群 $x(t)$ 平均持久; 当 $c_2 > 0$ 时, 若 $r/(1 + c_2kM(1)) < d_1 + \sigma_1^2/2 < r$, 种群 $x(t)$ 的持久与灭绝尚无法判断。由此可见, 白噪声强度 σ_1 和恐惧导致的出生率变化强度 c_2 对种群 $x(t)$ 的生存有较大的影响。

4 遍历平稳分布的存在性

定理7 若 $\lambda := cp(r - d_1 - \sigma_1^2/2)/(r(1 + c_1k)(a + qr)) - d_2 - \sigma_2^2/2 > 0$, 则系统 (3) 存在唯一的遍历平稳分布 $\mu(\cdot)$ 。

证明 为了证明定理7, 需要验证引理1中的条件1)、条件2)。系统 (3) 的扩散矩阵 $A = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 y^2 \end{pmatrix}$, 显然满足条件1)。下面验证条件2)。

由系统 (3), 有 $L(x) = -ax^2 - d_1x + rx/(1 + c_2ky) - pxy/((1 + c_1k)(1 + qx)) \leq rx - ax^2 \leq -r(1 + qx)/q + r(a + qr)/(qa)$, 其中第二个不等号由 $a(x - r/a)^2 \geq 0$ 得到。此外, $L(y) = -hy^2 - d_2y + pcxy/((1 + c_1k)(1 + qx)) \leq -hy^2 - d_2y + pcxy$, $L(-\ln x) = ax + d_1 + py/((1 + c_1k)(1 + qx)) - r/(1 + c_2ky) + \sigma_1^2/2 \leq ax + (rc_2k + p)y - r + d_1 + \sigma_1^2/2$, $L(-\ln y) = hy + d_2 - cp/((1 + c_1k)(1 + qx)) + \sigma_2^2/2$ 。

令 $V_1 = -\ln y + \psi_1 x$, 则 $LV_1 \leq hy + d_2 - cp/((1 + c_1k)(1 + qx)) + \sigma_2^2/2 - \psi_1 r(1 + qx)/q + \psi_1 r(a + qr)/(qa) \leq -2\sqrt{\psi_1 cpr/(q(1 + c_1k))}\sqrt{x} + hy + d_2 + \sigma_2^2/2 + \psi_1 r(a + qr)/(qa)$ 。

令 $V_2 = ax/(2r^2) - \ln x/r$, 则 $LV_2 \leq ax(1 - ax/r)/(2r) + ax/r + (rc_2k + p)y/r - (r - d_1 - \sigma_1^2/2)/r \leq \sqrt{a/r}\sqrt{x} + (rc_2k + p)y/r - (r - d_1 - \sigma_1^2/2)/r$, 其中第二个不等号由引理3得到。

令 $V_3 = V_1 + 2\sqrt{\psi_1 cpr^2/(qa(1 + c_1k))}V_2 + [h + 2(rc_2k + p)\sqrt{\psi_1 cpr^2/(qa(1 + c_1k))}/r]y/d_2$, 则 $LV_3 \leq -2\sqrt{\psi_1 cpr^2/(qa(1 + c_1k))}(r - d_1 - \sigma_1^2/2)/r + d_2 + \sigma_2^2/2 + \psi_1 r(a + qr)/(qa) + \psi_2 xy$, 其中 $\psi_2 = cp[h + 2(rc_2k + p)\sqrt{\psi_1 cpr^2/(qa(1 + c_1k))}/r]/d_2 > 0$ 。取 $\psi_1 = cpqa(r - d_1 - \sigma_1^2/2)/[(1 + c_1k)(a + qr)^2 r^2]$, 则 $LV_3 \leq -\lambda + \psi_2 xy$, 其中 $\lambda := cp(r - d_1 - \sigma_1^2/2)/(r(1 + c_1k)(a + qr)) - d_2 - \sigma_2^2/2 > 0$ 。

令 $V_4 = (cx + y)^{\theta+1}/(\theta + 1)$, 其中, $0 < \theta < 1$, 则 $LV_4 = c(cx + y)^\theta [-ax^2 - d_1x + rx/(1 + c_2ky) - pxy/((1 + c_1k)(1 + qx))] + (cx + y)^\theta (-hy^2 - d_2y + pcxy/((1 + c_1k)(1 + qx))) + c^2\theta(cx + y)^{\theta-1}\sigma_1^2 x^2/2 + \theta(cx + y)^{\theta-1}\sigma_2^2 y^2/2 \leq (cx + y)^\theta [-acx^2 + c(r - d_1)x - hy^2 - d_2y + c^2\theta\sigma_1^2 x^2/(2(cx + y)) + \theta\sigma_2^2 y^2/(2(cx + y))] \leq -ac^{1+\theta}x^{2+\theta} + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - hy^{2+\theta} - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^{1+\theta} + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2$ 。

取 $V = MV_3 + V_4$, 有 $LV \leq M(-\lambda + \psi_2 xy) - ac^{1+\theta}x^{2+\theta} + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - hy^{2+\theta} - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^\theta + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2 \leq -M\lambda/4 + M(-\lambda/4 + \psi_2 xy) - ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 + (-M\lambda/2) + \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^+} [-ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^\theta + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2]$, 其中, $M = (2/\lambda)\max\{2, \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2} [-ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^\theta + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2]\}$ 。定义开集 $D_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : \epsilon < x < 1/\epsilon, \epsilon < y < 1/\epsilon\}$, 其中 $0 < \epsilon < 1$ 为一个充分小的数且满足: $\epsilon < \lambda/(4\psi_2)$; $\epsilon < h/(2\psi_2 M)$; $\epsilon < ac^{1+\theta}/(2\psi_2 M)$; $-ac^{1+\theta}/(2\epsilon^{2+\theta}) + \psi_3 < -1$; $-h/(2\epsilon^{2+\theta}) + \psi_3 < -1$ 。

将 $D_\epsilon^c = \mathbf{R}_+^2 \setminus D_\epsilon$ 分为如下 4 个区域: $D_\epsilon^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : x < \epsilon\}$; $D_\epsilon^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : y < \epsilon\}$; $D_\epsilon^3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : x > 1/\epsilon\}$; $D_\epsilon^4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : y > 1/\epsilon\}$ 。

情形 1 在区域 D_ϵ^1 上, 有: $xy < \epsilon(1 + y^{2+\theta})$, $LV \leq -M\lambda/4 + M(-\lambda/4 + \psi_2 \epsilon) + (\psi_2 M \epsilon - h/2)y^{2+\theta} - ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 + (-M\lambda/2) + \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^+} [-ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^\theta + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2] \leq -M\lambda/4 - ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 \leq -1$ 。

情形 2 在区域 D_ϵ^2 上, 有: $xy < \epsilon(1 + x^{2+\theta})$, $LV \leq -M\lambda/4 + M(-\lambda/4 + \psi_2 \epsilon) + (\psi_2 M \epsilon - ac^{1+\theta}/2)x^{2+\theta} - hy^{2+\theta}/2 + (-M\lambda/2) + \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}^+} [-ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^\theta + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2] \leq -M\lambda/4 - hy^{2+\theta}/2 \leq -1$ 。

情形 3 在区域 D_ϵ^3 上, 有: $LV \leq -ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 + [M(-\lambda + \psi_2 xy) + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^\theta + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2] \leq -ac^{1+\theta}/(2\epsilon^{2+\theta}) + \psi_3 \leq -1$, 其中, $\psi_3 = \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2} \{M(-\lambda + \psi_2 xy) + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^\theta + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2\}$ 。

情形 4 在区域 D_ϵ^4 上, 有: $LV \leq -ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 + [M(-\lambda + \psi_2 xy) + c^{1+\theta}(r - d_1)x^{1+\theta} - ac^{1+\theta}x^{2+\theta}/2 - hy^{2+\theta}/2 - d_2y^{1+\theta} + c(r - d_1)xy^\theta + \theta(c^\theta x^\theta + y^\theta)(c\sigma_1^2 x + \sigma_2^2 y)/2] \leq hy^{2+\theta}/2 + \psi_3 \leq -1$ 。

综上所述, 对于任意的 $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \setminus D_\epsilon$, 有 $LV \leq -1$, 即引理 1 中条件 2) 成立。因此系统 (3) 存在唯一遍历平稳分布 $\mu(\cdot)$ 。

5 数值模拟结果

为了验证上述理论, 本文采用 Milstein 高阶方法^[27]对给定初始值和参数的随机模型 (3) 进行数值模拟。

对于随机系统 (3), 首先取初值 $x(0) = 1.2$ 、 $y(0) = 0.8$, 并选择适当参数: $r = 0.4$, $a = 0.01$, $h = 0.01$, $p = 0.3$, $q = 0.5$, $k = 8$, $d_1 = 0.02$, $d_2 = 0.02$, $c = 0.1$, $c_1 = 0.002$, $c_2 = 0.003$, $\sigma_1 = 0.02$, $\sigma_2 = 0.02$ 。通过计算可得: $r/(1 + c_2 k M(1)) = 0.248\ 2 > 0.020\ 2 = d_1 + \sigma_1^2/2$, $cp/(q(1 + c_1 k)) = 0.059\ 1 > 0.020\ 2 = d_2 + \sigma_2^2/2$, $\lambda = 0.113\ 3 > 0$, 满足定理 5 和定理 7 的条件, 因此, 系统 (3) 唯一遍历平稳分布且种群 $x(t)$ 、 $y(t)$ 均持久 (见图 1)。

取 $\sigma_2 = 0.5$, 其余参数与图 1 相同。此时 $r/(1 + c_2 k M(1)) = 0.248\ 2 > 0.020\ 2 = d_1 + \sigma_1^2/2$, $cp/(q(1 + c_1 k)) = 0.059\ 1 < 0.145 = d_2 + \sigma_2^2/2$, 满足定理 5 条件 1) 和定理 6 条件 2), 则种群 $x(t)$ 持久, $y(t)$ 灭绝 (见图 2)。结果表明, 白噪声强度对物种的生存有一定的影响, 即使确定型模型存在正解, 随机模型也可能因为白噪声强度过大而出现物种灭绝的情况。

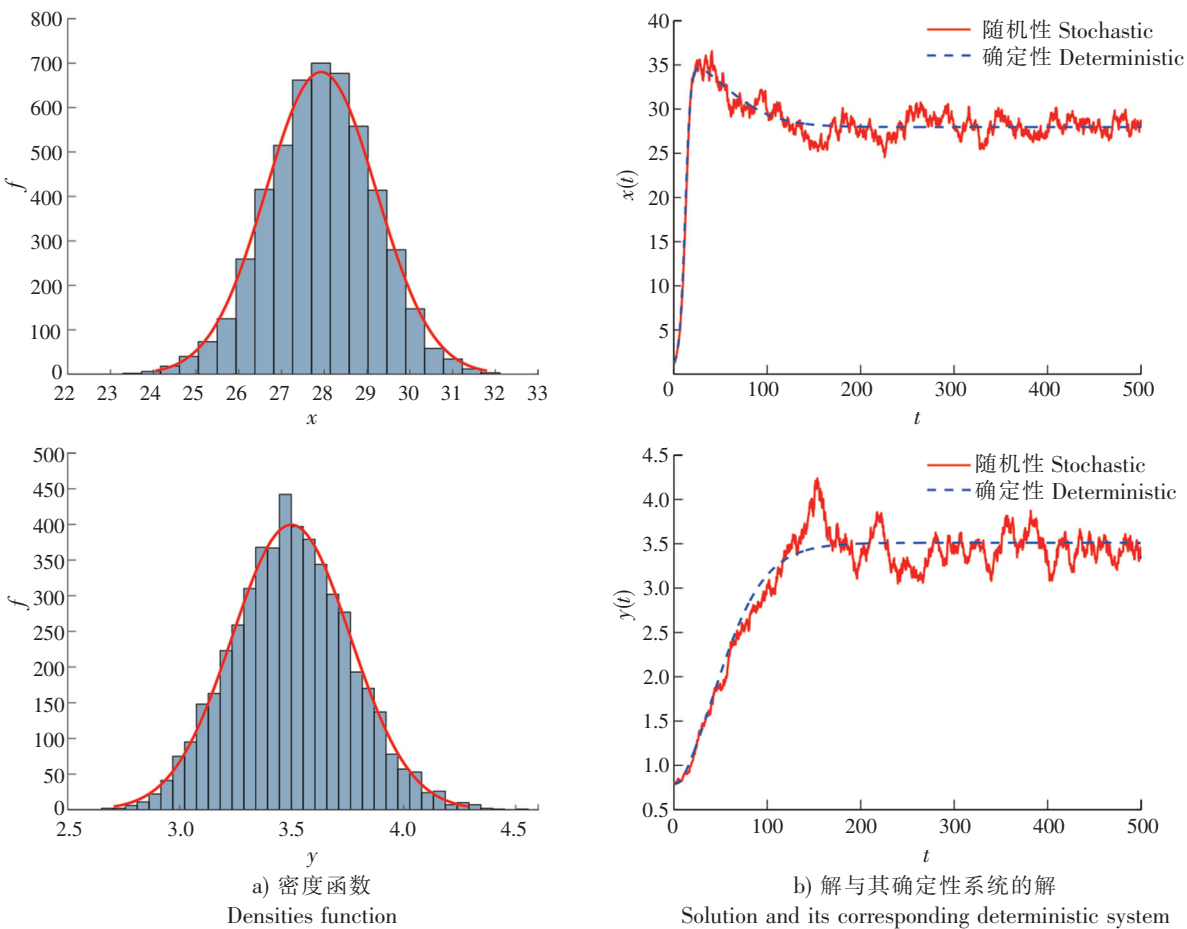


图1 系统 (3) 的密度函数及其解与其确定性系统的解

Fig.1 Densities function of system and the solution of system (3) and its corresponding deterministic system

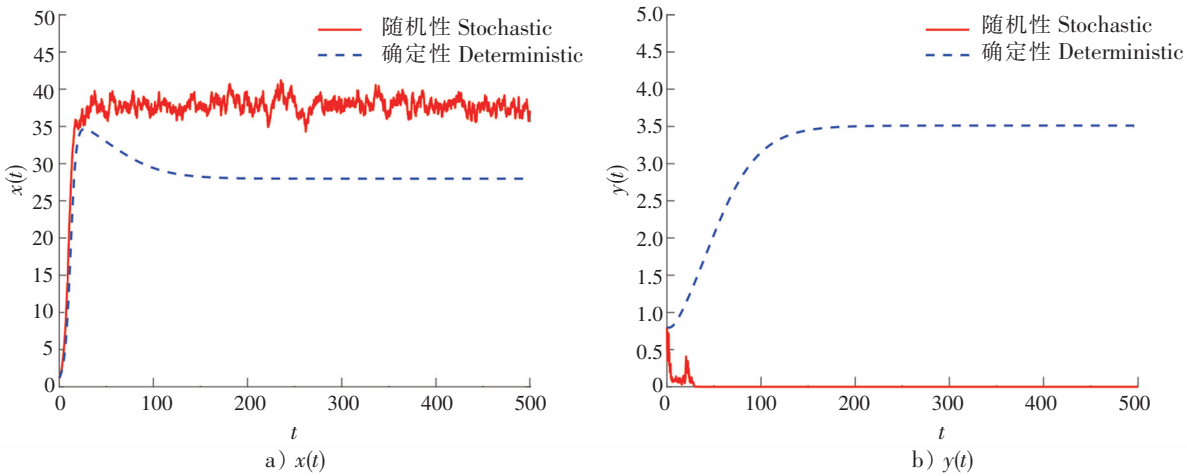


图2 系统 (3) 的解与其确定性系统的解 ($\sigma_2=0.5$)

Fig.2 The solution of system (3) and its corresponding deterministic system ($\sigma_2=0.5$)

取 $c_1=0.5$, 其余参数与图 1 相同。此时 $r/(1+c_2kM(1))=0.2526>0.0202=d_1+\sigma_1^2/2$, $cp/(q(1+c_1k))=0.012<0.0202=d_2+\sigma_2^2/2$, 满足定理 5 条件 1) 和定理 6 条件 2), 则种群 $x(t)$ 持久, 种群 $y(t)$ 灭绝 (见图 3)。当食饵的反捕食行为导致捕食率下降较快时, 尽管食饵持久, 捕食者依旧会灭绝。该结果表明, 较高的恐惧水平将提高食饵的反捕食能力, 有利于食饵的生存。

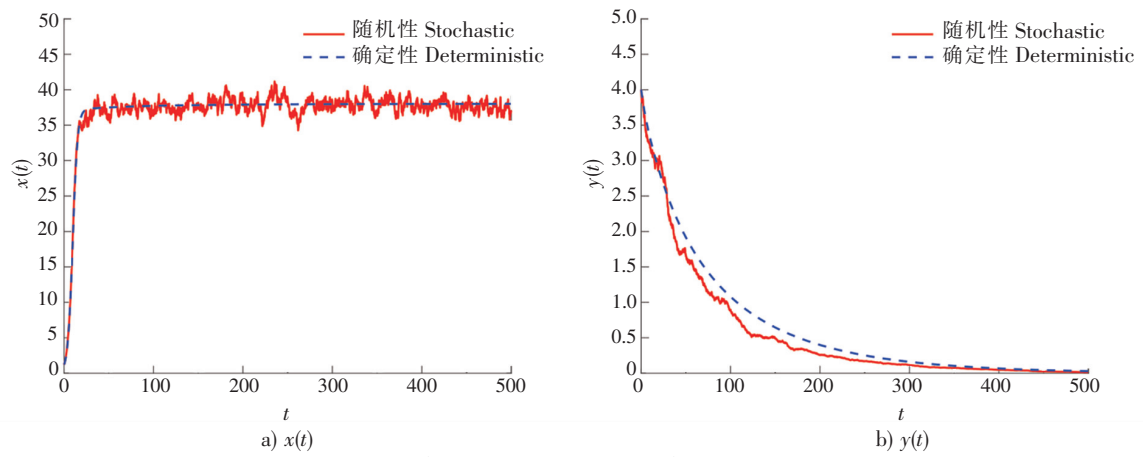


图 3 系统 (3) 的解与其确定性系统的解 ($c_1=0.5$)
Fig.3 The solution of system (3) and its corresponding deterministic system ($c_1=0.5$)

下面讨论白噪声强度 σ_1 和恐惧导致的出生率变化强度 c_2 对系统的影响。
分别取 $\sigma_1=0.7$ 和 $\sigma_1=0.8$ ，其余参数与图 1 相同。此时， $r/(1+c_2kM(1)) < d_1 + \sigma_1^2/2 < r$ 均成立，定理 5 条件 1) 和定理 6 条件 1) 均不满足。由数值模拟的结果可以看出，随着白噪声强度增大，种群 $x(t)$ 由持久（见图 4）变为灭绝（见图 5）。上述结果同样表明，白噪声强度对物种的生存有一定的影响，甚至会导致物种的灭绝。

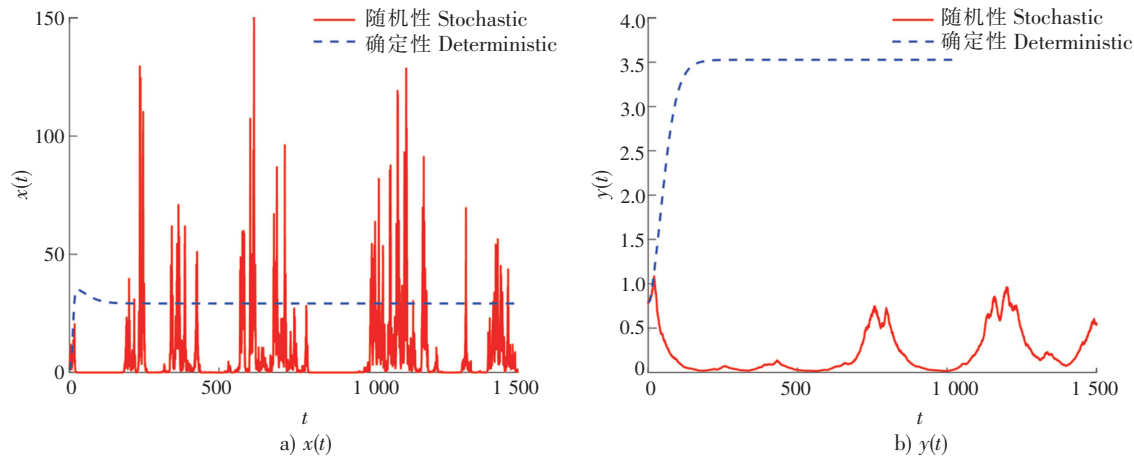


图 4 系统 (3) 的解与其确定性系统的解 ($\sigma_1=0.7$)
Fig.4 The solution of system (3) and its corresponding deterministic system ($\sigma_1=0.7$)

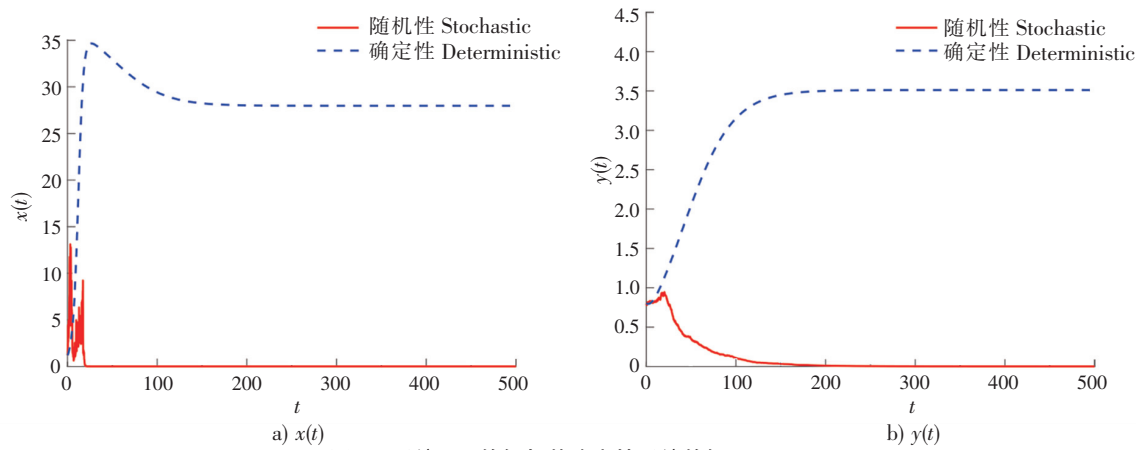


图 5 系统 (3) 的解与其确定性系统的解 ($\sigma_1=0.8$)
Fig.5 The solution of system (3) and its corresponding deterministic system ($\sigma_1=0.8$)

取 $c_2=0.5$, 其余参数与图 1 相同。此时 $r/(1+c_2kM(1))=0.0039<0.0202=d_1+\sigma_1^2/2<r=0.4$, $cp/(q(1+c_1k))=0.0591>0.0202=d_2+\sigma_2^2/2$, 定理 5 条件 1) 和定理 6 条件 1) 均不满足。由数值模拟的结果可以看出, 确定性系统存在极限环, 捕食者与食饵周期共存 (见图 6)。出现上述情况的可能原因之一是, 在较高的恐惧水平下, 食饵的出生率下降明显, 数量急剧减少, 捕食者数量将不可避免地减少。随着捕食者数量减少, 恐惧水平降低, 食饵出生率上升, 数量增多, 捕食者数量相应增加, 循环往复。

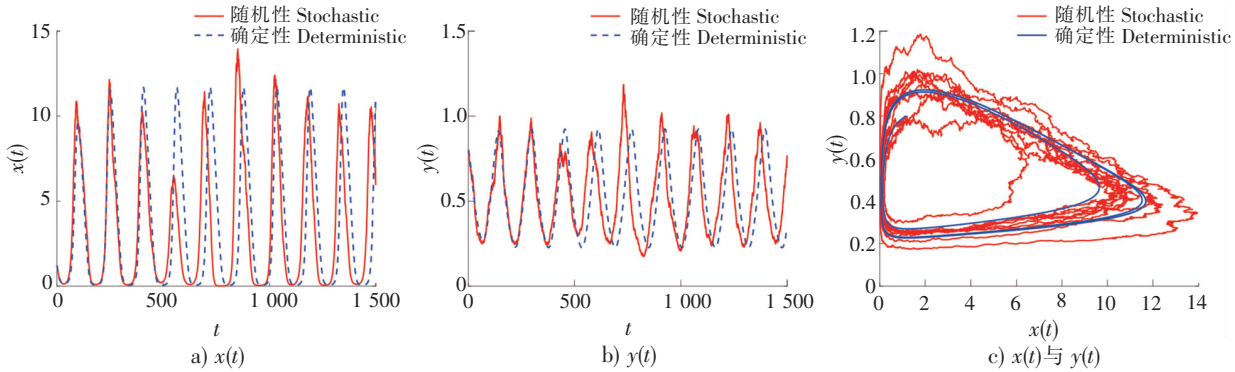


图 6 系统 (3) 的解与其确定性系统的解 ($c_2=0.5$)
Fig.6 The solution of system (3) and its corresponding deterministic system ($c_2=0.5$)

6 结论

本文研究了具有恐惧效应的随机捕食-食饵模型, 证明了对于任意给定的正初始值, 系统 (3) 存在唯一的全局正解; 得到了系统 (3) 的平均持续生存与灭绝的充分条件; 应用 Has'minskii 的平稳分布理论, 得到了系统 (3) 存在唯一遍历平稳分布的充分条件。此外, 数值模拟结果表明, 恐惧效应的存在极大地丰富了捕食食饵模型的动力学。出于对被捕食的恐惧, 食饵会表现出一系列反捕食行为, 这有利于食饵的生存, 并有可能导致捕食者最终灭绝。然而, 反捕食行为尤其是更换栖息地对食饵出生率有较大的影响, 这不利于食饵新生代的繁殖, 并将最终影响整个种群的生存, 因此, 在捕食食饵模型中考虑恐惧效应是有实际意义的。

[参考文献]

[1]MMANDAL P S, BANERJEE M. Stochastic persistence and stationary distribution in a Holling-Tanner type prey-predator model[J]. Physica A:Statistical Mechanics and Its Applications,2012,391(4):1216-1233.

[2]XIAO D M,RUAN S G. Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,2000,61(4):1445-1472.

[3]LIN Y G,JIANG D Q. Long-time behavior of a stochastic predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes[J]. International Journal of Biomathematics,2016,9(3):121-138.

[4]LAN G J,FU Y J,WEI C J,et al. Dynamical analysis of a ratio-dependent predator-prey model with Holling III type functional response and nonlinear harvesting in a random environment[J]. Advances in Difference Equations,2018,2018:198-222.

[5]DELGADO M, MONICA M B, ANTONIO S. Analysis of an age-structured predator-prey model with disease in the prey[J]. Nonlinear Analysis Real World Applications,2006,7(4):853-871.

[6]PRATAMA R A, RUSLAU M F V, SURYANI D R, et al. Optimal harvesting and stability of predator-prey model with Holling type II predation response function and stage-structure for predator[J]. Journal of Physics Conference Series,2020,1569:042067.

[7]蓝桂杰,付盈洁,魏春金,等. 具有非线性食饵收获的随机捕食-食饵模型[J]. 集美大学学报(自然科学版),2018,23(5):385-394.

[8]FREEDMAN I H. Deterministic mathematical models in population ecology[J]. Biometrics,1980,22(7):219-236.

- [9] PREISSER E L, BOLNICK D I. The many faces of fear: comparing the pathways and impacts of nonconsumptive predator effects on prey populations[J]. *PLoS One*, 2008, 3: 0002465.
- [10] PEACOR S D, PECKARSKY B L, TRUSSELL G C, et al. Costs of predator-induced phenotypic plasticity: a graphical model for predicting the contribution of nonconsumptive and consumptive effects of predators on prey[J]. *Oecologia*, 2013, 171: 1-10.
- [11] PETTORELLI N, COULSON T, DURANT S M, et al. Predation, individual variability and vertebrate population dynamics[J]. *Oecologia*, 2011, 167: 305-314.
- [12] PREISSER E, ORROCK J, SCHMITZ O. Predator hunting mode and habitat domain affect the strength of non-consumptive effects in predator-prey interactions[J]. *Ecology*, 2007, 88: 2744-2751.
- [13] SCHMITZ O. Effect of predator hunting mode on grassland ecosystem function[J]. *Science*, 2008, 319: 952-954.
- [14] CREEL S, CHRISTIANSON D. Relationships between direct predation and risk effects[J]. *Trends in Ecology Evolution*, 2008, 23: 194-201.
- [15] LIMA S L. Nonlethal effects in the ecology of predator-prey interactions[J]. *Bioscience*, 1998, 48: 25-34.
- [16] WANG X Y, ZOU X F. Modelling the fear effect in predator-prey interactions[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2016, 73(5): 1179-1204.
- [17] LIU M, MANDAL P S. Dynamical behavior of a one-prey two-predator model with random perturbations[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2015, 28(1/2/3): 123-137.
- [18] LI L, JIN Z. Pattern dynamics of a spatial predator-prey model with noise[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2011, 67(3): 1737-1744.
- [19] MAY R M. Stability and complexity in model ecosystems[J]. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, 1978, 8(10): 779.
- [20] WANG Y, ZOU X F. On a predator-prey system with digestion delay and anti-predation strategy[J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2020, 30(4): 1579-1605.
- [21] ROY J, BARMAN D, ALAM S. Role of fear in a predator-prey system with ratio-dependent functional response in deterministic and stochastic environment[J]. *Biosystems*, 2020, 197: 104176.
- [22] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [23] JI C, JIAND D, SHI N. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, 359(2): 482-498.
- [24] RAFAIL K. Stochastic stability of differential equations[M]. Groningen: Sijthoff Noordhoff, 1980.
- [25] LIU Q, JIANG D Q, SHI N Z. Dynamical behavior of a stochastic HBV infection model with logistic hepatocyte growth[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2017, 37(4): 927-940.
- [26] XU D S, LIU M, XU X F. Analysis of a stochastic predator-prey system with modified Leslie-Gower and Holling-type IV schemes[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 537: 122761.
- [27] HIGHAM, DESMOND J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. *SIAM Review*, 2001, 43(3): 525-546.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)