

铅球运行的再认识——基于动力学方程

张伟

(北京体育大学研究生院, 北京 100084)

摘要:以理论力学和高等数学为指导,运用动力学中质点运动的微分方程,将铅球视为一质点,在对铅球进行全面受力分析和重力受力分析的基础上,分析了铅球出手后的运行轨迹,演算出铅球运行过程的轨迹方程,并根据实际比赛中测得的数据,计算出两种不同受力情况下铅球的水平位移,并运用SPSS进行相关性和差异性检验,从而进一步分析空气阻力和浮力对铅球运行过程的影响。得出的结论是:两种受力分析求出的结果具有高度相关性($P=0.943$),同时差异性不显著($P>0.05$),不具有统计学意义,因此铅球运行过程中可以忽略空气阻力和浮力。

关键词:理论力学;动力学;质点;微分方程

中图分类号:G824.1

文献标识码:A

文章编号:1007-7413(2015)06-0028-06

Recognition of Shot Put: Based on the Dynamics Equations

ZHANG Wei

(Graduate school, Beijing Sport University, Beijing 100084, China)

Abstract: With the direction of theoretical mechanics and higher mathematics, this paper uses the differential equations of particle motion to analyze the trajectory after shot. Calculating equations of two different energy and finding out their horizontal shift in order to analyze the influence of air resistance and buoyancy. The result is that the influence of air resistance and buoyancy can be ignored.

Key words: theoretical mechanics; dynamics; particle; differential equations

以中国知网期刊为检索数据源,检索主题为力学,并含铅球,精确匹配2004-2014年发表于核心期刊的论文,见附录1。从中可以发现,有20篇论文主要是通过生物力学的方法进行了研究,对铅球出手前的各项身体参数进行了详细地分析,大致有两个目的:使读者了解优秀运动员的生物力学特征;探出手角度和初速度的最佳组合方式;有2篇论文是运用了质点动力学和数学相结合的方法,但解释的是出手角度和初速度的关系,不是针对铅球出手后的受力进行分析。因此,本文从一个新的视角——动力学的角度分析铅球的运行轨迹,从理论的角度全面论述其受力过程。

1 研究对象与方法

本文以铅球出手到落地的整个运行过程为研究对象,并将运行过程分为两个阶段,从出手到最高点为第一阶段,铅球位于最高点时其垂直方向的速度为

零;第二阶段为从最高点到落地。本文主要运用动力学定律、质点的运动微分方程和数学方程对铅球的整个运行过程进行分析,其公式的基本表达形式为: $d/dt(mV) = F$ 。运用质点运动学的方法,根据实际比赛中测得的数据,代入质点运动的微分方程,求得两种不同受力情况下铅球的水平位移,并运用SPSS进行相关性和差异性检验,为最后得出结论提供依据。本文主要分析的问题:

- 1) 考虑铅球所有受力和只受重力两种不同的情况下,从出手到落地的运行轨迹方程;
- 2) 根据实际比赛中测得的出手初速度和角度分析空气阻力和浮力对掷铅球的影响。

2 结果与分析

2.1 全面受力分析下的铅球运行轨迹

在牛顿的经典力学体系中,物体的质量是恒量,时间与空间也是不变的。然而人们通过对近代物理

的学习已经认识到,任何物体的质量、时间和空间都是随着物体速度的变化而变动的,但当物体运行的速度远小于光速时,物体速度的变化对其质量、时间和空间的影响是可以忽略不计的(见图1、图2、图3、表1、表2、表3)。由于铅球运行时其速度($V_t \ll V_{\text{光速}}$)远远小于光速,物理表达式 $|V_t \pm V_{\text{光速}}|/V_{\text{光速}} \approx 1$ 。因此本文不考虑铅球速度变化对其产生的影响。

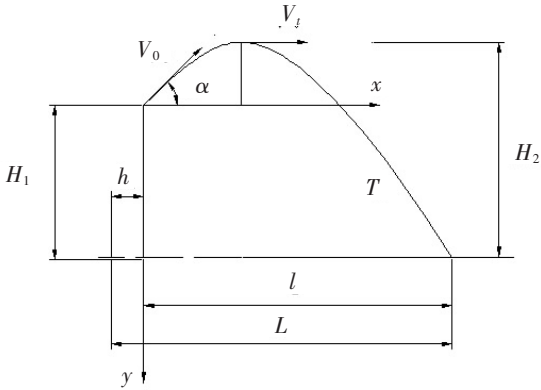


图1 铅球在空中的运动轨迹

当一个质点受到几个力(F_1, F_2, \dots, F_n)的共同作用时,根据质点动力学第二定律,可以得出 $ma = \sum Fi$, 矢量形式的微分方程是 $md^2x/dt^2 = \sum Fi$ [2]。把整个空间看做一个三维整体,铅球在 xoy 平面内运行,因此可以得出铅球所受力在 x 轴上的投影为 $m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{ix}$, 在 y 轴上的投影为 $md^2y/dt^2 = \sum F_{iy}$ 。根据图2便可得出, x 轴方向 $md^2x/dt^2 = f_2$, y 轴方向 $md^2y/dt^2 = f_1 + G - F$ (上升阶段), $md^2y/dt^2 = G - f_1 - F$ (下降阶段)。 $f_2 = fsina$, 取 $f = -\mu V$, 即阻力与速度方向相反, μ 为粘滞阻尼系数。左图为上升阶段的受力情况,右图为下降阶段的受力情况。

表1 图1中各符号属性

符号	属性	符号	属性
V_0	铅球出手初速度	H_2	铅球最高点高度
α	铅球出手角度	h	出手点与投掷圈抵趾板水平距离
V_t	铅球在任一时刻的速度	H_1	铅球出手高度
l	出手点到落地点水平距离	T	铅球在空中的运行轨迹

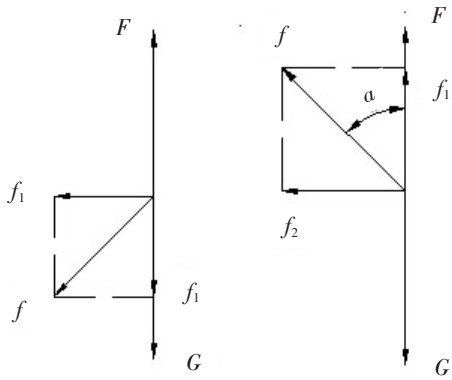


图2 铅球运行过程中的受力

表2 图2中各符号属性

符号	属性	符号	属性
F	空气浮力	G	铅球重力
f_1	空气阻力垂直分力	f_2	空气阻力水平分力
f	空气阻力	a	空气阻力与 y 轴夹角

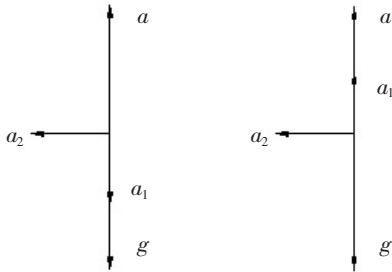


图3 铅球运行过程中的加速度

水平方向, $a_2 = f_2/m$; 垂直方向 $a_1 = f_1/m$, $a = \rho Vg/m$, V 表示铅球体积($V = \frac{3}{4}\pi r^3$),左图为上升段,右图为下降段。以出手位置为原点, y 轴向下为正,如图1所示。上升阶段,铅球的运动微分方程为: $m \frac{d^2x}{dt^2} = f_2 = -fsina = -V_x$, $m \frac{d^2y}{dt^2} = f_1 + G - F = fcosa + mg - \rho Vg = -V_y + mg - \rho Vg$, 当 $t = 0$ 时, $V_x = V_0cos\alpha$, $V_y = -V_0sin\alpha$, 对上述两式定积分可得:

表3 图3中各符号属性

符号	属性	符号	属性
g	重力加速度	a	空气浮力加速度
a_1	阻力水平加速度	a_2	阻力垂直加速度

$$\int_{V_0}^{V_x} \frac{1}{V_x} dV_x = - \int_0^t \frac{\mu}{m} dt,$$

$$\int_{V_0}^{V_y} \frac{1}{-V_y + mg - \rho Vg/\mu} dV_y = - \int_0^t \frac{\mu}{m} dt,$$

求得铅球速度随时间变化的规律为:

$$V_x = e^{-(\mu/m)} V_0 \cos \alpha, \quad (1)$$

$$V_y = \left(\frac{mg - \rho Vg}{\mu} \right) (1 - e^{-\mu/m}) - e^{-\mu/m} V_0 \sin \alpha, \quad (2)$$

$t = 0$ 时, $x = 0, y = 0$, 在 x, y 轴方向上做铅球速度随时间变化的定积分得:

$$\int_0^x dx = \int_0^t e^{-(\mu/m)} V_0 \cos \alpha dt, \int_0^y dy = \int_0^t \left[\left(\frac{mg - \rho Vg}{\mu} \right) (1 - e^{-(\mu/m)}) - e^{-(\mu/m)} V_0 \sin \alpha \right] dt,$$

求得铅球在 x, y 轴方向的运行轨迹分别为:

$$x = V_0 \frac{m}{\mu} (1 - e^{-\mu/m}) \cos \alpha, \quad (3)$$

$$y = \left(\frac{mg - \rho Vg}{\mu} \right) t + \frac{m}{\mu} \left(\frac{mg - \rho Vg}{\mu} + V_0 \sin \alpha \right) e^{-\mu/m} - \frac{m}{\mu} \left(\frac{mg - \rho Vg}{\mu} + V_0 \sin \alpha \right) \quad (4)$$

即铅球在 xoy 平面内上升阶段的运行轨迹。下降阶段, 铅球在 x 轴方向上的受力没有变化, 因此铅球在 x 轴的运行轨迹不变, 在 y 轴方向, 阻力垂直分量 f_1 方向虽然发生改变, 但是始终与速度方向相反, 因此铅球在 y 轴的微分方程同样为:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = G - f_1 - F = mg - f \cos \alpha - \rho Vg = mg -$$

$\mu V_y - \rho Vg$, 把铅球下降过程看做一个从静止开始的落体运动, 取铅球最高点为 xoy 轴坐标原点, 如图 4 所示, 则当 $t' = 0$ 时, $V_y' = 0$, 对上式定积分可得:

$$\int_{V_0}^{V_y'} \frac{1}{V_0 - V_y' + (mg - \rho Vg)/\mu} dV_y' = \int_0^{t'} \frac{\mu}{m} dt', \text{ 求得铅球速度随时间变化的规律为:}$$

$$V_y' = \left(\frac{mg - \rho Vg}{\mu} \right) (1 - e^{-\mu t'/m}), \quad (5)$$

$t' = 0$ 时, $V_y' = 0$, 在 y 轴方向做铅球速度随时间变化的定积分得:

$$\int_0^{y'} dy' = \int_0^{t'} \left(\frac{mg - \rho Vg}{\mu} \right) (1 - e^{-\mu t'/m}) dt', \text{ 求得}$$

铅球在 y 轴方向的运行轨迹为:

$$y' = \frac{mg - \rho Vg}{\mu} t' + \frac{m}{\mu^2} (mg - \rho Vg) (-1 + e^{-\mu t'/m}). \quad (6)$$

2.2 重力作用下的铅球运行轨迹

根据 2.1 的计算过程, 将铅球的运行过程分为上升和下降两个阶段, 分别建立两个不同坐标, 仅考虑重力的影响, 水平方向不受力的影响, 垂直方向受重力影响 (见图 4)。上升阶段铅球速度随时间变化的规律为:

$$\begin{aligned} V_x &= V_0 \cos \alpha, \\ V_y &= -V_0 \sin \alpha + gt, \end{aligned} \quad (7)$$

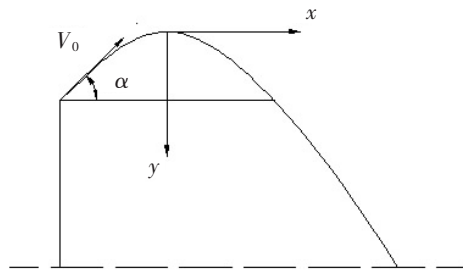


图 4 铅球下降方程坐标示意图

可求得铅球的轨迹方程为:

$$x = V_0 t \cos \alpha, \quad (8)$$

$$y = -V_0 t \sin \alpha + \frac{1}{2} g t^2, \quad (9)$$

下降阶段铅球速度随时间变化的规律为:

$$V_x' = V_0 \cos \alpha, \quad (10)$$

$$V_y' = gt', \quad (11)$$

可求得铅球的轨迹方程为:

$$x' = V_0 t' \cos \alpha, \quad (12)$$

$$y' = \frac{1}{2} g t'^2. \quad (13)$$

2.3 铅球运行轨迹分析

由铅球在 x 轴方向的轨迹方程可发现, 铅球的投掷距离与铅球出手的初速度 (V_0) 和出手角度 α 的大小呈正相关, 并随着时间 t 的变化而改变。

当铅球位于最高点时, 取垂直方向的速度为零。下面以第 11 届全运会女子铅球前八名为例来分析空气阻力与浮力对投掷距离的影响。

2.3.1 全面受力分析

考虑所有受力的情况下, 当上升阶段 $V_y = 0$ 时, 根据 (2) 式可求出铅球到达最高点的时间 T , 将时间 T 分别代入 (3) (4) 中, 可以算出上升阶段水平方向和垂直方向的位移, 如表 6 所示。根据 $H_2 = H_1 + y$, 将 H_2 代入 (6) 中, 可求得下降阶段的时间 T' , 将 T'

代入(3)中,可求得下降阶段的水平位移,从而求得总位移 S_1 ,见表 5。

表 4 第 11 届全运会女子铅球前八名的出手速度与角度^[1]

名次	姓名	成绩/m	出手初速度/ ms^{-1}	出手角度/ $(^\circ)$	出手高度/m
1	巩立姣	20.35	13.84	33.89	2.06
2	李梅菊	19.38	13.31	35.48	1.98
3	李玲	18.97	12.69	38.49	2.09
4	刘湘蓉	18.41	13.09	29.72	2.10
5	张蔷	17.67	12.38	38.15	2.06
6	孟倩倩	17.52	12.56	31.85	2.00
7	马乔	17.30	12.48	34.13	1.95
8	崔爽	17.07	12.22	36.83	2.02

表 5 上升阶段数据

上升阶段水平 位移/m	上升阶段用时 /s	上升阶段垂直 位移/m
9.043 597	0.787 085	3.038 146
8.531 992	0.787 085	3.038 146
8.006 031	0.805 437	3.181 457
7.511 723	0.660 662	2.140 563
7.586 757	0.778 929	2.975 463
7.212 437	0.675 955	2.240 783
7.379 426	0.713 678	2.497 863
7.298 84	0.746 304	2.731 445

由表 4 可以看出,运动员的出手角度都低于 45° ,因此铅球出手后的速度 $V_x > V_y$,垂直方向的加速度远大于水平加速度,这使得铅球水平方向的位移大于垂直方向,如表 5 和表 7 所示。不论是全面受力分析下还是重力分析下,无论是上升阶段还是下降阶段,从巩立姣到崔爽,水平位移都呈现出减小的趋势,这与实际的投掷距离相符,个别数据波动比较大,这是由于实际测得的初速度和出手角度以及计算过程都存在着一定的误差。

2.3.2 重力计算

考虑只受重力的情况下,当上升阶段 $V_y = 0$ 时,根据(7)式可求出铅球到达最高点的时间 T ,见表 8。将数据 T 分别代入(8)(9)中,可以算出上升阶段水平方向和垂直方向的移动距离,如表 8 所示。根据 $H_2 = H_1 + y$,将 H_2 代入(13)中,可求得下降阶段的时间 T' ,将 T' 代入(12)中,可求得下降阶段的水平

位移,从而计算得总位移 S_2 ,计算得各项数据如表 7 和表 8 所示。

表 6 下降阶段数据

下降阶段水平 位移/m	下降阶段用时 /s	下降阶段垂直 位移/m	水平总位移 S_1 /m
11.489 927	1.000 000	5.098 146	20.533 524
10.839 931	1.000 000	5.098 146	19.371 923
9.939 937	1.000 000	5.271 457	17.945 968
11.369 936	1.000 000	4.240 563	18.881 659
9.739 939	1.000 000	5.035 463	17.326 696
10.669 938	1.000 000	4.240 783	17.882 375
10.339 938	1.000 000	4.447 863	17.719 364
9.779 941	1.000 000	4.751 445	17.078 781

表 7 上升阶段数据

上升阶段水平 位移/m	上升阶段用时 /s	上升阶段垂直 位移/m
9.042 079	0.786 952	3.037 635
8.530 560	0.786 952	3.037 635
8.004 689	0.805 300	3.180 937
7.510 458	0.660 550	2.140 183
7.585 484	0.778 797	2.975 005
7.211 223	0.675 840	2.240 412
7.378 185	0.713 557	2.497 451
7.297 614	0.746 177	2.731 009

表 8 下降阶段数据

下降阶段水平 位移/m	下降阶段用时 /s	下降阶段垂直 位移/m	水平总位移 S ₂ /m
11. 713 451	1. 019 447	5. 097 635	20. 755 531
10. 963 754	1. 011 416	5. 017 635	19. 494 315
10. 304 118	1. 036 631	5. 270 937	18. 308 807
10. 571 418	0. 929 764	4. 240 183	18. 081 877
9. 868 233	1. 013 165	5. 035 005	17. 453 717
9. 920 852	0. 929 789	4. 240 412	17. 132 075
9. 845 927	0. 952 217	4. 447 451	17. 224 113
9. 625 255	0. 984 177	4. 751 009	16. 922 870

根据 2. 3. 1 与 2. 3. 2 计算的结果,可求出全面受力分析与重力分析下差的绝对值

$|\Delta S| = |S_1 - S_2|$, 以及绝对值与实际投掷距离的比值,见表 9。

由表 10 可以看出,水平位移差绝对值 $|\Delta S|$ 在 $(0.12 \sim 0.80) m$ 的范围内,水平位移差绝对值与实际投掷距离的比值 $0.63 \frac{0}{0} \leq \frac{|\Delta S|}{L} \leq 4.34 \frac{0}{0}$,不同运动员的 $|\Delta S|$ 与 $\frac{|\Delta S|}{L}$ 有差异,这与运动员的出手初速度和出手角度有关。如果仅求水平位移的差值 ΔS ,便会发现差值 ΔS 的方向不同,这是由于在全面受力作用下,不同运动员出手初速度和出手角度的组合不同,以及受到阻力和浮力的影响,使得求得的总时间与重力作用的总时间差值正负不同,从而使得不同运动员的 ΔS 方向各异。因此,不同运动员掷铅球时,空气阻力和浮力可能产生正影响,也可能产生负影响(见表 10、表 11)。

表 9 两种不同受力作用下水平位移差值

姓名	$ \Delta S = S_1 - S_2 / m$	$ \Delta S / L / \%$
巩立姣	0. 222 007	1. 01
李梅菊	0. 122 392	0. 63
李玲	0. 362 839	1. 91
刘湘蓉	0. 799 782	4. 34
张蔷	0. 127 021	0. 72
孟倩倩	0. 750 300	4. 28
马乔	0. 495 251	2. 86
崔爽	0. 155 911	0. 91

表 10 Wilcoxon 符号秩检验

	Z	N	渐近显著性.(双侧)
S2 - S1	. 840 ^a	8	. 401

a. 基于正秩。

表 11 成对样本 t 检验

	均值	标准差	均值的标准误差	Sig. (双侧)
S1 - S2	0. 17	0. 46	0. 16	. 324

对两组数据 S_1 与 S_2 进行 Wilcoxon 符号秩检验和成对样本 t 检验,如表 11 和表 12 所示。从表 11 可知, $P = 0.401$;在表 12 中, $P = 0.319$,两种检验都显示出两组数据的差异不显著,不具有统计学意义。

3 结论

- 1) 根据铅球的质点动力学方程可知,铅球的水平速度与出手角度和初速度有关,在全面受力分析下,水平速度随着时间逐渐减小,重力分析下铅球的水平速度是恒量。
- 2) 铅球的水平位移与出手角度和初速度有关,在全面受力分析下,由于出手角度和初速度的组合不同,空气阻力和浮力对投掷距离的影响可能是积极的,也可能是消极的。
- 3) 全面受力分析下与重力分析下的绝对值与实际投掷距离比值波动比较大,这是因为出手角度和初速度以及整个计算过程中都存着一定的误差。
- 4) 由表 11 和表 12 可知, S_1 和 S_2 的差异性不具有统计学意义,因此可以忽略空气阻力和浮力的影响。

附录 1 文献分布情况

年限	序号	题目	期刊
2004	No1	程晓燕背向滑步推铅球技术的生物力学分析	西安体育学院学报
	No2	论青少年女子铅球运动员的合理滑步速度	西安体育学院学报
	No3	基于遗传算法的铅球投掷过程分析	力学与实践
	No4	铅球的飞行距离与其影响因素的力学分析	北京体育大学学报
2005	No5	我国优秀女子铅球运动员于鑫、程小燕背向滑步推铅球技术动作的速度节奏研究	北京体育大学学报
	No6	对两名不同水平男子铅球选手投掷技术的生物力学分析	北京体育大学学报
	No7	我国优秀女子铅球运动员最后用力技术的运动学分析	山东体育学院学报
2007	No8	推铅球最后用力新论	山东体育学院学报
	No9	李梅菊背向滑步推铅球技术动作的速度节奏分析	山东体育学院学报
	No10	李玲背向滑步推铅球技术的生物力学分析	山东体育学院学报
	No11	对女子铅球运动员背向滑步推铅球技术的生物力学分析	山东体育学院学报
2008	No12	铅球运动的出手角度对运动成绩的影响	安徽师范大学学报(自然科学版)
	No13	对我国优秀铅球运动员过渡阶段主要技术特征的研究	北京体育大学学报
	No14	铅球技术训练模型设计及其应用研究	山东体育学院学报
2009	No15	小肌群训练对铅球运动员技术影响的实验研究	北京体育大学学报
	No16	我国女子优秀铅球运动员最后用力阶段技术的生物力学特征研究	北京体育大学学报
2010	No17	背向滑步推铅球最后用力时躯干运动的生物力学分析	首都体育学院学报
	No18	女子铅球巩立娇 20.35 米技术运动学特征研究	山东体育学院学报
	No19	我国女子铅球全运会前 3 名运动员技术运动学特征	首都体育学院学报
	No20	世界优秀男子铅球运动员投掷技术的生物力学分析	沈阳体育学院学报
2012	No21	不同级别运动员背向滑步推铅球最后用力技术的运动学及肌肉表面肌电活动特征的分析	西安体育学院学报
2013	No22	我国优秀男子铅球运动员投掷技术的运动学研究	天津体育学院学报

参考文献

[1]苑延刚,郑富强,李爱东,李汀.第 11 届全运会女子铅球项目前 8 名运动员关键运动技术参数三维录像分析[J].课题成果,2013,21(4):3-9.

[2]哈尔滨工业大学理论力学教研室.理论力学(I) [M].北京:高等教育出版社,2009:234-238.

[3]同济大学数学系.高等数学(上册)[M].北京:高等教育出版社,2007.

[4]苗文科,吴新元,杨选民.铅球投掷出手后的数学力学分析[J].成都体育学院学报,1984(1):57-66.

[5]钱波,郭宁,施智雄.铅球飞行距离与其影响因素的力学分析[J].大学物理,2007(8):15-19.

[6]刘新光,张效良.铅球运动的出手角度对运动成绩的影响[J].安徽师范大学学报(自然科学版),2008(2):190-193.

[7]单信海.铅球飞行轨迹动态模拟软件的编制[J].体育科学,2004(3):24-26.

[8]杨瑞鹏,陈小龙,李金刚.我国女子优秀铅球运动员最后用力阶段技术的生物力学特征研究[J].北京体育大学学报,2010(9):121-124.

[9]白光斌,龚锐.我国优秀女子铅球运动员于鑫、程小燕背向滑步推铅球技术动作的速度节奏研究[J].北京体育大学学报,2005(1):134-136.

[10]闫之朴,孙泊,陈雪梅,黄玉新.推铅球最后用力新论[J].山东体育学院学报,2007,02:106-107+111.

[11]李厚林,苑廷刚,李爱东,李汀.女子铅球巩立娇 20.35 米技术运动学特征研究[J].山东体育学院学报,2010(8):56-62.

[责任编辑 魏 宁]