

[文章编号] 1007-7405(2016)05-0383-05

具有最小匹配能量的广义仙人掌图

洪成蹊, 晏卫根

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 为了研究具有最小匹配能量的广义仙人掌图的结构, 利用一些图形变换对图的匹配能量产生影响的相关方法, 得到了具有最小匹配能量的广义仙人掌图的结构: 在所有顶点数、边数、块为圈的数目和块为双圈图的数目都固定的广义仙人掌图中, $G^*(n, m, r, s)$ 是匹配能量最小的图; 在所有顶点数和边数都固定的广义仙人掌图中, $G^*(n, m, 1, (m-n)/2)$ 或 $G^*(n, m, 0, (m-n+1)/2)$ 是匹配能量最小的图。

[关键词] 匹配能量; 广义仙人掌图; 双圈图

[中图分类号] O 157.5

On the Minimum Matching Energy of Generalized Cacti Graphs

HONG Cheng-xi, YAN Wei-gen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: Some methods of graph-transformation which have effect on matching energy were used to discuss the generalized cacti graph with the minimum matching energy was determined. In this paper, the generalized cacti graph with the minimum matching energy was determined: $G^*(n, m, r, s)$ has minimum matching energy in the set of generalized cacti graphs with the fixed numbers of vertices, edges, the blocks each of which is a cycle and the blocks each of which is a bicyclic graph; $G^*(n, m, 1, (m-n)/2)$ or $G^*(n, m, 0, (m-n+1)/2)$ has the minimum matching energy in the set of generalized cacti graphs with the fixed numbers of vertices and edges.

Keywords: matching energy; generalized cacti graph; bicyclic graph

0 引言

设 $G = (V(G), E(G), \varphi(G))$ 是一个简单图, 其中 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为顶点集, $E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集。设 M 是图 G 的边集 $E(G)$ 的一个子集, 如果 M 中任意两条边均不相邻, 则称 M 是 G 的一个匹配。如果 $|M| = k$, M 称为 G 的一个 k -匹配, 记 $m(G, k)$ 为 G 的所有 k -匹配的数目, 并且约定: $m(G, 0) = 1$; 当 $k < 0$ 或 $k > \lfloor n/2 \rfloor$ 时, $m(G, k) = 0$, 其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 表示取整函数。

定义 1^[1-2] 设 G 是一个 n 个顶点的简单图, 则 G 的匹配多项式为

$$\alpha(G, x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k m(G, k) x^{n-2k}. \quad (1)$$

定义 2 设 G 和 H 为两个简单图, $m(G, k)$ 和 $m(H, k)$ 分别为 G 和 H 的 k -匹配数目, 定义: 对所有的非负整数 k , 都有 $m(G, k) \geq m(H, k) \Leftrightarrow G \geq H$ 。若 $G \geq H$, 并且存在一些 k , 使得 $m(G, k) >$

[收稿日期] 2015-10-26

[修回日期] 2016-02-29

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目 (11171134, 11571139)

[作者简介] 洪成蹊 (1990—), 男, 硕士生, 从事图论、组合数学研究。通信作者: 晏卫根 (1967—), 男, 教授, 博士, 从事图论、组合数学研究, E-mail: weigenyan@263.net。

$m(H, k)$, 则记为 $G > H$ 。

定义 3^[3] 设 G 为一个简单图, $m(G, k)$ 为 G 的 k -匹配数目, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, 图 G 的匹配能量定义为:

$$\text{ME}(G) = 2 \int_0^{\infty} x^{-2} \ln \left[\sum_{k \geq 0} m(G, k) x^{2k} \right] dx / \pi^2. \quad (2)$$

Gutman 和 Wagner 也给出了以下结果。

定理 1^[3] 设 G 是一个 n 个顶点的简单图, u_1, u_2, \dots, u_n 为其匹配多项式的根, 则 $\text{ME}(G) =$

$$\sum_{i=1}^n |u_i|.$$

由式 (2) 可以看出, 匹配能量的大小由匹配数 $m(G, k)$ 决定。根据匹配能量的定义, 明显地, 若 $G \geq H$, 则 $\text{ME}(G) \geq \text{ME}(H)$ 。若 $G \geq H$, 并且存在一些 k 使得 $G > H$, 则 $\text{ME}(G) > \text{ME}(H)$ 。

在 20 世纪 80 年代, Gutman 分别刻画了单圈图^[4]、双圈图^[5]、三圈图^[6]中具有最大匹配数 (匹配能量) 的图的结构。文献 [3] 证明了 S_n^+ 是单圈图中匹配能量最小的图, 其中 S_n^+ 是星图 S_n 连接两个悬挂点后得到的图。文献 [7] 分别刻画了给定连通度与色数的连通图具有最大匹配能量的图的结构。

记 C_n 是 n 个顶点的圈。设 P_{p+1} , P_{q+1} 和 P_{l+1} 分别表示顶点数为 $p+1$, $q+1$ 和 $l+1$ 的路。把 P_{p+1} , P_{q+1} 和 P_{l+1} 的三个起点和三个终点分别粘合在一起, 得到一个顶点数为 $p+q+l-1$ 的双圈图, 记为 $\theta(p, q, l)$, 其中 $p \geq l \geq 2$, $q \geq 1$ 。定义广义仙人掌图是一个连通图, 它的块是边, 或者是圈图, 或者是双圈图。设 n, m, r, s 是固定的非负整数, 且 $m - n + 1 = r + 2s$ 。把所有具有 n 个顶点、 m 条边且块是圈的数目为 r 、块是双圈图的数目为 s 的广义仙人掌图的集合记为 $G(n, m, r, s)$; 把所有具有 n 个顶点与 m 条边的广义仙人掌图的集合记为 $G'(n, m)$ 。显然, $G(n, m, r, s) \subseteq G'(n, m)$, 且 $\bigcup_{r \geq 0, s \geq 0} G(n, m, r, s) = G'(n, m)$ 。

本文分别刻画了 $G(n, m, r, s)$ 和 $G'(n, m)$ 中具有最小匹配能量的图的结构。

1 相关引理及方法

设 G 为一个简单图, $d_G(u)$ 表示顶点 u 在图 G 中的顶点度, $N_G(u)$ 表示图 G 中与 u 相邻的顶点集。为了证明本文的主要结论, 先介绍以下一些引理。

引理 1^[8] 设图 G 是一个简单图, 若 H 是 G 的子图, 则 $G \geq H$; 若 H 是 G 的真子图, 则 $G > H$ 。

引理 2^[9] 设图 G 是一个连通图, $uv \in E(G)$ 。 G' 是由图 G 中收缩边 uv 再添加一条悬挂边后得到的图。若 $d_G(u), d_G(v) \geq 2$, 并且 $N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset$, 则 $G > G'$ 。

引理 3^[9] 设 G, H', H'' 是三个顶点不交的连通图, 其中 $u, v \in V(G)$, $u' \in V(H')$, $v' \in V(H'')$, $|V(H')|, |V(H'')| \geq 2$ 。 $G_{u,v}, G_u$ 和 G_v 由 G, H' 和 H'' 按以下规则得到: i) $G_{u,v}$ 是由粘合 u 和 u' , 粘合 v 和 v' 后得到的图; ii) G_u 是由顶点 u', v' 和 u 粘合后得到的图; iii) G_v 是由顶点 u', v' 和 v 粘合后得到的图。

若 $G - u \cong G - v$, 则 $G_u \cong G_v$ 且 $G_{u,v} > G_u$ 。

在下文中, 假设 G^* 是 $G(n, m, r, s)$ 中具有最小匹配能量的一个广义仙人掌图, 且 G^* 是一个简单图。

引理 4 若 $C_a = v_1 v_2 \dots v_a v_1$ 是 G^* 的一个块, 则 $a = 3$ 。特别地, 在 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 中至少有两个顶点度为 2。

证明 假设 $a \geq 4$, 对 C_a 中的一条边作引理 2 中的处理, 可以得到一个新图 G_1 , 且含有一个圈 C_{a-1} 作为它的块。明显地, $G_1 \in G(n, m, r, s)$, 且 $G^* > G_1$ 。这和 G^* 的匹配能量是最小的性质矛盾。因此 $a = 3$ 。

若 $d_{G^*}(v_1) \geq 3, d_{G^*}(v_2) \geq 3$, 则 G^* 有形如图 1a 的结构, 其中 $|V(H_1)| \geq 2, |V(H_2)| \geq 2$ 。设 G' 是形如图 1b 的图。显然地, $G' \in G(n, m, r, s)$ 。由引理 3 可知, $G^* > G'$ 。这又和 G^* 的匹配能量是最小的性质矛盾。因此, 在 $\{v_1, v_2, v_3\}$ 中至多有一个顶点的度超过 2。定理得证。

引理 5 若 G^* 的一个块是一个双圈图 $\theta(p, q, l)$, 其顶点集为 $\{v_1, v_2, \dots, v_{p+q+l-1}\}$, 则 $p=2, q=1, l=2$ 。特别地, 在 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 中存在两个顶点的度为 2, 并且最多只有一个顶点的度超过 3。

证明 对 G^* 中任意一个为双圈图 $\theta(p, q, l)$ 的块, 若 $p+q+l-1 > 4$, 那么重复使用引理 2, 得到一个含有双圈图 $\theta(2, 1, 2)$ 作为块的新图 G_2 。显然, $G_2 \in G(n, m, r, s)$ 并且 $G^* > G_2$ 。这和 G^* 的匹配能量是最小的性质相矛盾。由 $p+q+l-1 \geq 4$, 可以得到 $p+q+l-1 = 4$, 再由 $p \geq l \geq 2, q \geq 1$ 可知, $p=2, q=1, l=2$ 。

选择 G^* 中任意一个为 $\theta(2, 1, 2)$ 的块, 其中它的顶点集为 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 。假设在 $\theta(2, 1, 2)$ 中, v_1 和 v_3 是两个顶点度为 3 的顶点, v_2 和 v_4 是两个顶点度为 2 的顶点。若 $d_{G^*}(v_1) \geq 4, d_{G^*}(v_3) \geq 4, d_{G^*}(v_2) \geq 3, d_{G^*}(v_4) \geq 3$, 则 G^* 就有了形如图 2a 的结构, 其中 $|V(H_1)| \geq 2, |V(H_2)| \geq 2, |V(H_3)| \geq 2, |V(H_4)| \geq 2$ 。

设 G' 是形如图 2b 的图。显然, $G' \in G(n, m, r, s)$ 。由引理 3, 可以得到 $G^* > G'$, 这和 G^* 的匹配能量是最小的性质相矛盾。因此, 在 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 中至少一个顶点度为 2, 一个顶点度为 3, 分别记 $d_{G^*}(v_4) = 2, d_{G^*}(v_3) = 3$ 。

将 $H_1 \cup H_3$ 记为 H' , $H_2 \cup H_4$ 记为 H'' , 其中 $|V(H')| \geq 2, |V(H'')| \geq 2$ 。设 G'_1 和 G'_2 分别是形如图 2(c) 和图 2(d) 的图。

G'_1, G'_2 和 G 的 k -匹配集可以关于是否含有边 v_1v_3 被分成两部分。先证明以下的结论。

结论 1 $G' > G'_1$ 。

一方面, 由引理 3, 可以得到 $G' - v_1v_3 > G'_1 - v_1v_3$ 。另一方面, $G'_1 - v_1 - v_3$ 可以看成是 $G' - v_1 - v_3$ 的一个真子图。因此, 再通过引理 1, 可以知道 $G' - v_1 - v_3 > G'_1 - v_1 - v_3$ 。 G'_1, G'_2 和 G 的 k -匹配数分别可以表示为 $m(G', k) = m(G' - v_1v_3, k) + m(G' - v_1 - v_3, k - 1)$ 和 $m(G'_1, k) = m(G'_1 - v_1v_3, k) + m(G'_1 - v_1 - v_3, k - 1)$, 其中 $k \geq 1$ 。因此, 结论 1 得证。

结论 2 $G'_2 > G'_1$ 。

同理可以发现, $G'_2 - v_1v_3 \cong G' - v_1v_3, G'_1 - v_1 - v_3$ 可以看成是 $G'_2 - v_1 - v_3$ 的一个真子图。同结论 1 的证明方法, $G'_2 > G'_1$ 。

综上, G'_1 是上述 4 种图类中匹配能量最小的。换言之, G^* 和 G'_1 (如图 2(c)) 具有相同的结构, 可以看出对于 G^* 中的任意一个双圈图 $\theta(2, 1, 2)$, 在它的 4 个顶点中存在两个顶点的度为 2, 并且最多只有一个顶点的度超过 3。引理得证。

引理 6 设 \tilde{G}, \tilde{G}' 分别是形如图 3 的结构, 则 $\tilde{G} > \tilde{G}'$ 。

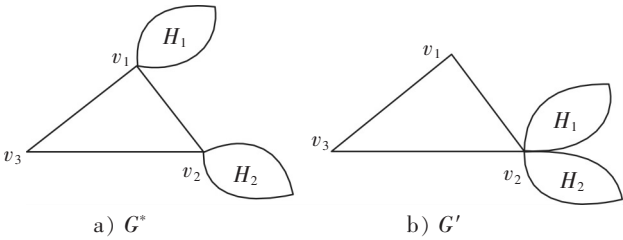


图 1 G^* 和 G'
Fig.1 Graphs G^* and G'

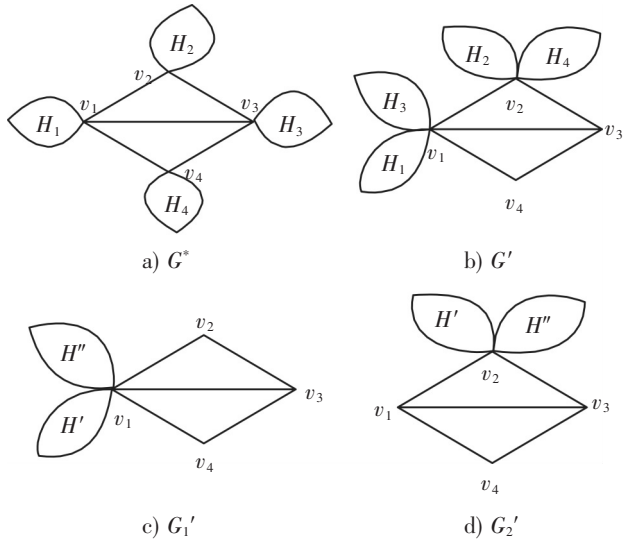


图 2 G', G', G'_1 和 G'_2
Fig.2 Graphs G', G', G'_1 and G'_2

证明 \tilde{G} 和 \tilde{G}' 的 k -匹配集可以关于是否含有边 $w_1 w_2$ 被分成两个部分。可以发现 $\tilde{G} - w_1 w_2 \cong \tilde{G}' - w_1 w_2$, 并且 $\tilde{G}' - w_1 - w_2$ 可以被看成 $\tilde{G} - w_1 - w_2$ 的一个真子图。因此, 对所有的 $k > 0$, 都有 $m(\tilde{G} - w_1 w_2, k) = m(\tilde{G}' - w_1 w_2, k)$ 。再由引理 1 , 可以得到 $\tilde{G} - w_1 - w_2 > \tilde{G}' - w_1 - w_2$, 那么根据定义, 就存在一些 k , 使得 $m(\tilde{G} - w_1 - w_2, k) > m(\tilde{G}' - w_1 - w_2, k)$ 。因此, $\tilde{G} > \tilde{G}'$ 。引理得证。

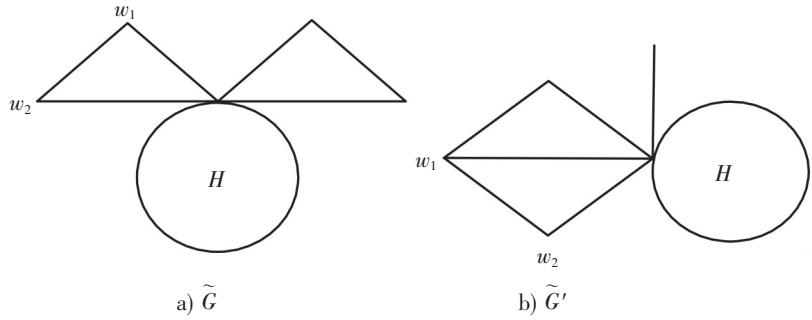


图 3 \tilde{G} 和 \tilde{G}'

Fig.3 Graphs \tilde{G} and \tilde{G}'

2 主要结论

设 S_{n+1} 是 $n+1$ 个顶点的星图, 其中 u 是 S_{n+1} 中最大度的顶点。把 S_{n+1} 中的每一条边由三角形 C_3 替换后得到的图记为 $S_{n+1}(C_3)$; 把 S_{n+1} 中的每一条边由 $\theta(2,1,2)$ 替换, 并且每一个 $\theta(2,1,2)$ 的顶点度为 3 的顶点和 u 粘合形成的图记为 $S_{n+1}(\theta(2,1,2))$ 。设 $G^*(n,m,r,s)$ 是由 $S_{r+1}(C_3)$, $S_{s+1}(\theta(2,1,2))$ 和 $S_{n-2r-3s}$ 经由它们各自的最大度的顶点和一个公共顶点 v 相粘合后形成的图 (如图 4a) 。因此, $G^*(n,m,1,(m-n)/2)$ ($m-n$ 是偶数) 和 $G^*(n,m,0,(m-n+1)/2)$ ($m-n$ 是奇数) 分别形如图 4b 和图 4c。显然, $G^*(n,m,r,s) \in G(n,m,r,s)$ 。

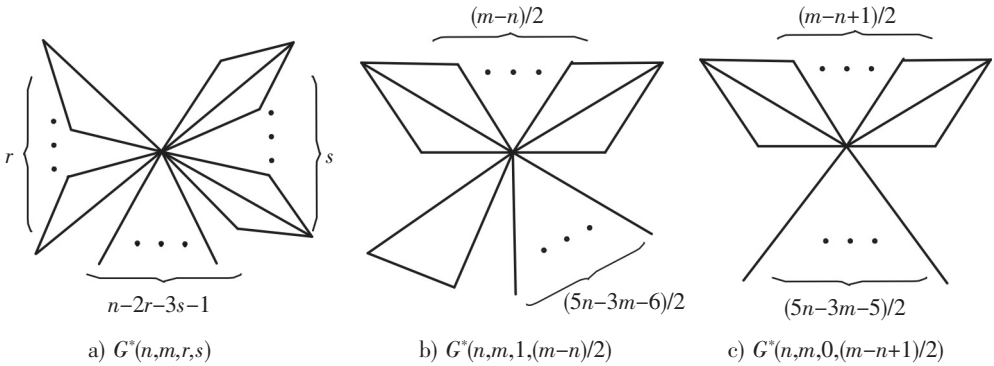


图 4 $G^*(n,m,r,s), G^*(n,m,1,(m-n)/2)$ 和 $G^*(n,m,0,(m-n+1)/2)$

Fig.4 $G^*(n,m,r,s), G^*(n,m,1,(m-n)/2)$ and $G^*(n,m,0,(m-n+1)/2)$

定理 2 设对任意的图 $G \in G(n,m,r,s)$, 且 $n \geq 2$, $m \geq 1$, $m \geq n-1$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, 则 $G \geq G^*(n,m,r,s)$, 等号成立当且仅当 $G \cong G^*(n,m,r,s)$ 。

证明 由引理 2 , 可以将图 G 变换成由 r 个 C_3 、 s 个 $\theta(2,1,2)$ 和一些悬挂边组成的图。再应用引理 4 和引理 5 可知, $G \geq G^*(n,m,r,s)$, 等号成立当且仅当 $G^* \cong G$ 。定理得证。

对任意一个连通图 $G \in G(n,m,r,s) \subset G'(n,m)$, 它的余秩为 $m-n+1=r+2s$ 。显然, $G'(n,m) = \bigcup_{(r,s)} G(n,m,r,s)$, 其中 (r,s) 取遍 $m-n+1=r+2s$ 的所有非负整数解。

定理 3 对任意的图 $G \in G'(n,m)$ 和 $n \geq 2$, $m \geq 1$, $m \geq n-1$, 有以下结论: i) 若 $m-n+1$ 是奇数, 则 $G \geq G^*(n,m,1,(m-n)/2)$, 等号成立当且仅当 $G \cong G^*(n,m,1,(m-n)/2)$; ii) 若 $m-n+1$ 是偶数, 则 $G \geq G^*(n,m,0,(m-n+1)/2)$, 等号成立当且仅当 $G \cong G^*(n,m,0,(m-n+1)/2)$ 。

证明 记 $m-n+1=r+2s$ 的所有非负整数解为 $(r_1, s_1), (r_2, s_2), \dots, (r_k, s_k)$, 其中 $k = \lfloor (m-n+1)/2 \rfloor$ 。

$1)/2\rfloor + 1$, 并且 $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$ 。若 $m - n + 1$ 是奇数, 则 $(r_i, s_i) = (1 + 2(i - 1), (m - n)/2 - (i - 1))$, 其中 $1 \leq i \leq k = \lfloor (m - n + 1)/2 \rfloor + 1, i \in \mathbf{N}^+$ 。若 $m - n + 1$ 是偶数, 则 $(r_j, s_j) = (2(j - 1), (m - n + 1)/2 - (j - 1))$, 其中 $1 \leq j \leq k = \lfloor (m - n + 1)/2 \rfloor + 1, j \in \mathbf{N}^+$ 。

上述这些解对应 $G(n, m)$ 中 k 类 $G(n, m, r_1, s_1), G(n, m, r_2, s_2), \cdots, G(n, m, r_k, s_k)$ 。通过定理 2, 这 k 类图集也分别对应有各自的匹配能量最小的图 $G^*(n, m, r_1, s_1), G^*(n, m, r_2, s_2), \cdots, G^*(n, m, r_k, s_k)$ 。由引理 6, 可以知道它们有以下的大小顺序: $G^*(n, m, r_k, s_k) > \cdots > G^*(n, m, r_2, s_2) > G^*(n, m, r_1, s_1)$ 。因此, 对任意的图 $G \in G(n, m, r, s)$, 若 $m - n + 1$ 是奇数, 则 $G \geq G^*(n, m, 1, (m - n)/2)$; 若 $m - n + 1$ 是偶数, 则 $G \geq G^*(n, m, 0, (m - n + 1)/2)$ 。定理得证。

推论 1 对任意的图 $G \in G(n, m, r, s)$, 其中 $n \geq 2, m \geq 1, m \geq n - 1, r \geq 0, s \geq 0$, 则 $G^*(n, m, r, s)$ 是 $G(n, m, r, s)$ 中匹配能量最小的图。

推论 2 对任意的图 $G \in G'(n, m)$, 其中 $n \geq 2, m \geq 1, m \geq n - 1$, 则有: i) 若 $m - n + 1$ 是奇数, 则 $G^*(n, m, 1, (m - n)/2)$ 是 $G'(n, m)$ 中匹配能量最小的图; ii) 若 $m - n + 1$ 是偶数, 则 $G^*(n, m, 0, (m - n + 1)/2)$ 是 $G'(n, m)$ 中匹配能量最小的图。

[参 考 文 献]

- [1] CVETKOVIĆ D M, DOOB M, GUTMAN I, et al. Recent results in the theory of graph spectra. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1988.
- [2] GUTMAN I. The matching polynomial. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 1979, 6: 75.
- [3] GUTMAN I, WAGNER S. The matching energy of a graph. Discrete Applied Mathematics, 2012, 160: 2180.
- [4] GUTMAN I. Graphs with greatest number of matchings. Publications Del Institut Mathematique, 1980, 27: 67.
- [5] GUTMAN I. Correction of the paper "Graphs with Greatest Number of Matchings". Publications Del Institut Mathematique, 1982, 32: 61.
- [6] GUTMAN I, CVETKOVIC D. Finding tricyclic graphs with a maximal number of matchings-another example of computer aided research in graph theory. Publications Del Institut Mathematique, 1984, 35: 33.
- [7] LI S L, YAN W G. The matching energy of graphs with given parameters. Discrete Applied Mathematics, 2014, 162: 415.
- [8] CHEN L, LIU J F, SHI T. Matching energy of unicyclic and bicyclic graphs with a given diameter. Complexity, 2014, 21(2): 224-238.
- [9] WANG W H, SO W. On minimum matching energy of graphs. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2015, 74: 400.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)