［文章编号］1007 – 7405(2017)03 – 0074 – 07

时标上具有离散时滞的 Wilson – Cowan 网络同步

李嘉敏，宾红华，黄振坤，储理才

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［**摘要**］在时标上微积分理论的基础上研究了具有离散时滞的 Wilson – Cowan 网络的全局指数型同步。通过构造 Lyapunov 函数，运用线性矩阵不等式和 Kronecker 积运算等方法，得到了时标上具有离散时滞的 Wilson – Cowan 网络全局指数型同步的充分条件，即当系统满足定理 1 中的线性矩阵不等式时可达到全局指数型同步。

［**关键词**］时标；Wilson – Cowan 网络；指数型同步；Lyapunov 函数

［**中图分类号**］O 193

Synchronization of Wilson – Cowan Networks with Discrete Delays on Time Scales

LI Jiamin，BIN Honghua，HUANG Zhenkun，CHU Licai

（School of Science，Jimei University，Xiamen 361021，China）

Abstract：In this paper，the global exponential synchronization for Wilson – Cowan networks with discrete delay was studied based on the theory of time scale calculus. The sufficient conditions for global exponential synchronization of Wilson – Cowan networks were obtained by constructing Lyapunov functions and using linear matrix inequalities and Kronecker product operations. That is to say，the system can achieve the global exponential synchronization when it satisfies the linear matrix inequality of the theorem 1.

Keywords：on time scales；Wilson – Cowan networks；exponential synchronization；Lyapunov function

0 引言

近年来，复杂网络受到了诸多领域学者的关注并被广泛研究，其中复杂网络的同步和控制更是一个重要的研究方向，相关的研究成果已经有很多：文献［1 – 5］研究了几类典型复杂网络的同步和一致性问题；文献［6］考虑在连续情形下具有混和耦合的时滞神经网络同步问题；文献［7］研究了具有脉冲干扰的线性耦合神经网络指数同步；文献［8］研究了复杂动力网络的混沌同步；文献［9］讨论了具有随机耦合的不连续时滞网络的全局同步。上述文献中大部分的同步问题是在连续或者离散情形下研究的，但是在现实中，很多的连续情形中必定会伴随一些离散情形。因此，将连续和离散两种情形统一在一起是十分有必要的。时标理论是解决此类实际问题的有力工具，故该理论被研究者们广泛应用在神经网络领域的研究中：文献［10］研究了时标上的时滞 BAM 网络；文献［11］则是借助时标上的微积分理论、Lyapunov 函数以及线性矩阵不等式等探讨了时标上具有离散时滞的复

［**收稿日期**］2016 – 11 – 08 ［**修回日期**］2016 – 12 – 21

［**基金项目**］国家自然科学基金项目（61573005）；福建省自然科学基金项目（2012J06001）

［**作者简介**］李嘉敏（1991—），女，硕士生，从事神经网络研究。通信作者：宾红华（1966—），女，教授，硕导，从事神经网络方向研究，E-mail：hhbin@jmu.edu.cn。

杂网络同步条件。受文献［11］的启发，本文将连续与离散这两种情形结合在一起，并在统一的框架下得到目标系统的全局指数型同步，研究了时标上具有离散时滞的 Wilson - Cowan 网络，得到了系统达到全局指数型同步的充分条件。

1　预备知识及模型简介

时标 T 是实数集 $\mathbf{R}$ 的任意一个非空子集。前后跳算子 $\sigma,\rho:\mathrm{T}\to T$，定义为 $\sigma(t):=\inf\{s\in T: s>t\}$；$\rho(t):=\sup\{s\in T:s<t\}$；距离函数 $\mu:T\to R^{+}$ 定义为 $\mu(t):=\sigma(t)-t$。

若 $t>\inf T$ 且 $\rho(t)=t$，则点 t 为左稠密点；若 $t<\sup T$ 且 $\sigma(t)=t$，则点 t 为右稠密点；若 $\rho(t)<t$，则为左扩散点；$\sigma(t)>t$，则为右扩散点。如果 T 有最大的左扩散点 m，则定义 $T^{k}:=T-\{m\}$。否则 $T^{k}=T$。

函数 $f:T\to\mathbf{R}$ 如果满足时标 T 上的右稠密点连续，左稠密点处存在左极限，则称此函数为右稠连续函数。右稠连续函数集合表示为 $C_{\mathrm{rd}}=C_{\mathrm{rd}}(T)=C_{\mathrm{rd}}(T,\mathbf{R})$。函数 $f:T\to\mathbf{R}$ 如果满足 $1+\mu(t)f(t)\neq 0$，$\forall t\in T$，则该函数为回归函数。

定义 1[12]　对于函数 $f:T\to\mathbf{R}$，$t\in T^{k}$，满足以下条件的 $f^{\Delta}(t)$，即对任意的 $\varepsilon>0$，存在 t 的邻域 U，有 $|(f(\sigma(t))-f(s))-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-s)|<\varepsilon|\sigma(t)-s|$，$\forall s\in U$，则称它为 f 在 t 处的 Δ - 导数。若 $f^{\Delta}(t)$ 在所有 $t\in T^{k}$ 均存在，则称 f 是 Δ - 可微的。

对任意的 $t\in T^{k}$，可得 $f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$。若 f,g 是两个可微函数，则 $f\cdot g$ 的导数为 $(f\cdot g)^{\Delta}=f^{\Delta}\cdot g+f^{\sigma}\cdot g^{\Delta}=f^{\Delta}\cdot g^{\sigma}+f\cdot g^{\Delta}$。

定义 2[12]　若函数 $F,f:T^{k}\to\mathbf{R}$，满足 $F^{\Delta}(t)=f(t),\forall t\in T^{k}$，则称 $F(t)$ 为 $f(t)$ 的原函数。在这种情形下，$f(t)$ 的积分被定义为 $\int_a^t f(s)\Delta s=F(t)-F(a)$，$t\in T^{k}$，显然有 $\left(\int_a^t f(s)\Delta s\right)^{\Delta}=f(t)$，$t\in T^{k}$。

令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$ 是时标 T 上的 $m\times n$ 矩阵值函数，若 $\boldsymbol{A}$ 的每个分量在时标 T 上均为右稠连续函数，则称 $\boldsymbol{A}$ 在时标 T 上右稠密连续。若 $\boldsymbol{A}$ 的每个分量在时标 T 上均 Δ - 可微，则称 $\boldsymbol{A}$ 在时标 T 上 Δ - 可微，在此种情形下有 $\boldsymbol{A}^{\Delta}(t)=(a_{ij}^{\Delta}(t))_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$，$\boldsymbol{A}^{\sigma}(t)=(a_{ij}^{\sigma}(t))_{1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n}$。

引理 1[12]　假设 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 为 $n\times n$ 阶可微的矩阵值函数，则有：1）$(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi})^{\Delta}=\boldsymbol{\Phi}^{\Delta}+\boldsymbol{\Psi}^{\Delta}$；2）$(\alpha\boldsymbol{\Phi})^{\Delta}=\alpha\boldsymbol{\Phi}^{\Delta}$，$\alpha$ 为常数；3）$(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi})^{\Delta}=\boldsymbol{\Phi}^{\Delta}\boldsymbol{\Psi}^{\sigma}+\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Psi}^{\Delta}$。

定义运算 $\oplus$：$p\oplus q:=p+q+\mu pq$，Θ：$\Theta p=-p/(1+\mu p)$，则 $p\Theta q=p\oplus(\Theta p)$，$p\Theta q=-(p-q)/(1+\mu q)$。回归且右稠连续函数的集合表示为 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(\mathrm{T})=\mathfrak{R}(\mathrm{T},\mathbf{R})$，$\mathfrak{R}^{+}=\mathfrak{R}^{+}(\mathrm{T},\mathbf{R})=\{f\in\mathfrak{R}: 1+\mu(t)f(t)>0,\forall t\in T\}$。若 $f\in\mathfrak{R}^{+}$，则 $\Theta f\in\mathfrak{R}^{+}$。

定义 3[12]　若 $p\in\mathfrak{R}$，指数函数 $e_p(t,s)$ 定义为 $e_p(t,s)=\exp\left\{\int_s^t\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau\right\}$，$s,t\in T$，其中 $\xi_h(z)=\begin{cases}\mathrm{Log}(1+hz)/h,h\neq 0\\ z,h=0\end{cases}$，Log 为主对数函数。

引理 2[12]　对任意给定的时标 T 和函数 p，若 $p\in\mathfrak{R}$，那么 $e_p(t,t_0)$ 是初值问题 $y^{\Delta}=p(t)y$、$y(t_0)=1(t\in T)$ 的唯一解。

时标上指数函数的一些性质：1）$e_p(\sigma(t),s)=(1+p\mu(t))e_p(t,s)$；2）$1/e_p(t,s)=e_{\Theta p}(t,s)$；3）$e_p^{\Delta}(t,t_0)=(e_p(t,t_0))^{\Delta}=pe_p(t,t_0)$；4）$e_p(t,s)>0$，$p\in\mathfrak{R}^{+}$。

定义 4　若存在常数 $\varepsilon>0,M>0$，对任意的 $\varphi_i(s)\in C([-\tau,0]_T,\mathbf{R}^{n})$，存在常数 $H>0$，使得 $\|x_i(t)-x_j(t)\|\leqslant Me_{\Theta\varepsilon}(t,0)$，$t>H$，$i,j=1,2,\cdots,N$，则称系统（1）达到全局指数型同步。

引理 3[13]　Kronecker 积有如下性质：1）$(\alpha\boldsymbol{\Phi})\otimes\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\Phi}\otimes(\alpha\boldsymbol{\Psi})$；2）$(\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Psi})\otimes\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{P}+\boldsymbol{\Psi}\otimes\boldsymbol{P}$；3）$(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{P}\otimes\Gamma)=(\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{P})\otimes(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Gamma})$；4）$(\boldsymbol{\Phi}\otimes\boldsymbol{\Psi})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}}$。

引理 4[14]　令 $\boldsymbol{U}=(\alpha_{ij})_{N\times N}$，$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ 且行和为零，$M\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{x}_i=$

$(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{y}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}_i=(y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{in})^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n(i=1,2,\cdots,N)$，则有 $x^{\mathrm{T}}(U\otimes M)y=-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\alpha_{ij}(x_i-x_j)^{\mathrm{T}}M(y_i-y_j)$。

引理 5[15] 线性矩阵不等式：$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi}(x) & \boldsymbol{\Omega}(x)\\ \boldsymbol{\Omega}(x)^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Psi}(x)\end{pmatrix}>0$，其中 $\boldsymbol{\Phi}(x)=\boldsymbol{\Phi}(x)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\Omega}(x)=\boldsymbol{\Omega}(x)^{\mathrm{T}}$，与以下任一条等价：1）$\boldsymbol{\Phi}(x)>0,\boldsymbol{\Psi}(x)-\boldsymbol{\Omega}(x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(x)^{-1}\boldsymbol{\Omega}(x)>0$；2）$\boldsymbol{\Psi}(x)>0,\boldsymbol{\Phi}(x)-\boldsymbol{\Omega}(x)\boldsymbol{\Psi}(x)^{-1}\boldsymbol{\Omega}(x)^{\mathrm{T}}>0$。

文中，考虑具有离散时滞的 Wilson－Cowan 网络[16]模型，其动力方程由以下时标上的微分方程表示：

$$x_i^{\Delta}(t)=-\boldsymbol{D}x_i(t)+f\Big(J(t)+\boldsymbol{A}x_i(t)+\boldsymbol{B}x_i(t-\tau)+\boldsymbol{P}\sum_{j=1}^{N}\omega_{ij}(x_j-x_i)\Big),i=1,2,\cdots,N,\tag{1}$$

其中 $t\in\boldsymbol{T}$，$x_i(t)=(x_{i1}(t),x_{i2}(t),\cdots,x_{in}(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$ 表示 i 在时刻 t 的状态，$\boldsymbol{D}$ 是内部耦合矩阵，$J(t)$ 是外部输入函数，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是节点状态内部的连接矩阵，$\boldsymbol{P}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 是任意矩阵，表示所有节点的内部连接，$\boldsymbol{W}=(\omega_{ij})_{N\times N}$ 是外部耦合矩阵，常数 τ 表示时滞，系统（1）的初值 $x_i(s)=\varphi_i(s)\in C_{\mathrm{rd}}([-\tau,0]_T,\mathbf{R}^n),i=1,2,\cdots,N$。

假设 1 系统（1）中的外部耦合矩阵满足 $\omega_{ij}=\omega_{ji}\geqslant 0(i\neq j)$，$\omega_{ii}=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\omega_{ij}(i,j=1,2,\cdots,N)$。

假设 2 函数 $f_i(\cdot)(i=1,2,\cdots,n)$ 满足：存在常数 $l_i>0$，使得 $0\leqslant(f_i(u)-f_i(v))/(u-v)\leqslant l_i$，$\forall u,v\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,n$。

注 1 若 $T=\mathbf{R}$，系统（1）为：

$$\mathrm{d}x_i(t)/\mathrm{d}t=-\boldsymbol{D}x_i(t)+f\Big(J(t)+\boldsymbol{A}x_i(t)+\boldsymbol{B}x_i(t-\tau)+\boldsymbol{P}\sum_{j=1}^{N}\omega_{ij}(x_j-x_i)\Big),i=1,2,\cdots,N,\tag{2}$$

对 $t\in[t_0,\infty)$。若 $T=\mathbf{Z}$，系统（1）为

$$\Delta x_i(t)=-\boldsymbol{D}x_i(t)+f\Big(J(t)+\boldsymbol{A}x_i(t)+\boldsymbol{B}x_i(t-\tau)+\boldsymbol{P}\sum_{j=1}^{N}\omega_{ij}(x_j-x_i)\Big),i=1,2,\cdots,N,\tag{3}$$

对 $t=k\in\mathbf{Z}$，$\tau\in\mathbf{N}$，$\Delta x_i(k)=x_i(k+1)-x_i(k)$ 为向前差分。

2 主要结果

本节讨论时标上具有离散时滞的 Wilson－Cowan 网络模型的全局指数型同步的充分条件。令 $\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\boldsymbol{x}_N^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F}(x(t))=(\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x_1(t)),\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x_2(t)),\cdots,\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x_N(t)))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_N=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}_{N\times 1}$，$\boldsymbol{I}_N$ 为单位矩阵。系统（1）表示为如下形式：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{\Delta}(t)=-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{D})x(t)+F(u(t)),u(t)=(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{A}+\boldsymbol{W}\otimes\boldsymbol{P})x(t)+\\(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{B})x(t-\tau)+e_N\otimes J(t)。\end{aligned}\tag{4}$$

定理 1 在假设 1、假设 2 下，存在 $n\times n$ 阶正定矩阵 $\boldsymbol{\Xi}>0,\boldsymbol{\Phi}>0$，对角矩阵 $\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}\{l_1,l_2,\cdots,l_n\}>0$，且 $\varepsilon>0$，使得

$$\sum\nolimits_{ij}=\boldsymbol{\Omega}_1\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{\Omega}_2<0,\tag{5}$$

其中：$\boldsymbol{\Omega}_1=\begin{pmatrix}-2\boldsymbol{D}+\boldsymbol{LA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{D} & \boldsymbol{LP} & \boldsymbol{LB}\\ \boldsymbol{LA}-\boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{LP} & \boldsymbol{LB}\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Omega}_2=\begin{pmatrix}2\boldsymbol{\varepsilon\Xi}+e_{\varepsilon}(t+\tau,t)\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{\Phi}\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{O}=0_{n\times n}$，$1\leqslant i<j\leqslant N$，则系统（4）可达到全局指数型同步。

证明 构造如下 Lyapunov 函数 $V(t)=2V_1(t)+V_2(t)$，其中：$V_1(t)=e_{\varepsilon}(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes$

$\boldsymbol{\Xi})x(t)$，$V_2(t)=\int_{t-\tau}^{t}e_\varepsilon(s+\tau,0)x^{\mathrm{T}}(s)(U\otimes\boldsymbol{\Phi})x(s)\Delta s$，且 $\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}N-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & N-1 & \cdots & -1\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ -1 & -1 & \cdots & N-1\end{pmatrix}_{N\times N}$。由时标上的微积分理论，可得：

$$\begin{aligned}
V_1^\Delta(t)&=e_\varepsilon^\Delta(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)+e_\varepsilon(\sigma(t),0)[x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)]^\Delta=\\
&\varepsilon e_\varepsilon(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)+(1+\mu\varepsilon)e_\varepsilon(t,0)(x(t)+x(\sigma(t)))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x^\Delta(t)=\\
&\varepsilon e_\varepsilon(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)+(1+\mu\varepsilon)e_\varepsilon(t,0)(x(t)+x(\sigma(t)))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})\\
&[-(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{D})x(t)+F(u(t))]=\\
&e_\varepsilon(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes(\varepsilon\boldsymbol{\Xi}))x(t)+e_\varepsilon(t,0)(x(t)+x(\sigma(t)))^{\mathrm{T}}\\
&[-(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))x(t)+(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})F(u(t))]=\\
&e_\varepsilon(t,0)\{x^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{U}\otimes(\varepsilon\boldsymbol{\Xi}-(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))]x(t)+x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})\\
&F(u(t))-x^{\mathrm{T}}(\sigma(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))x(t)+x^{\mathrm{T}}(\sigma(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})F(u(t))\}，
\end{aligned}\tag{6}$$

同时有，

$$\begin{aligned}
V_1^\Delta(t)&=e_\varepsilon^\Delta(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)+e_\varepsilon(\sigma(t),0)[x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)]^\Delta=\\
&\varepsilon e_\varepsilon(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)+(1+\mu\varepsilon)e_\varepsilon(t,0)x^{\Delta\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})(x(t)+x(\sigma(t)))=\\
&\varepsilon e_\varepsilon(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)+(1+\mu\varepsilon)e_\varepsilon(t,0)[-x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{I}_N\otimes\boldsymbol{D})+\\
&F^{\mathrm{T}}(u(t))](\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})(x(t)+x(\sigma(t)))=\\
&e_\varepsilon(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes(\varepsilon\boldsymbol{\Xi}))x(t)+e_\varepsilon(t,0)[-x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))x(t)+\\
&F^{\mathrm{T}}(u(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})x(\sigma(t))-\\
&x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))x(\sigma(t))+F^{\mathrm{T}}(u(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})x(t)]=\\
&e_\varepsilon(t,0)\{x^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{U}\otimes(\varepsilon\boldsymbol{\Xi}-(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))]x(t)+F^{\mathrm{T}}(u(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})x(t)-\\
&x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))x(\sigma(t))+F^{\mathrm{T}}(u(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})x(\sigma(t))\}，
\end{aligned}\tag{7}$$

$$V_2^\Delta(t)=e_\varepsilon(t,0)[x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes e_\varepsilon(t+\tau,t)\boldsymbol{\Phi})x(t)-x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Phi})x(t-\tau)]。\tag{8}$$

由式（6）—式（8）可得：

$$\begin{aligned}
V^\Delta(\mathrm{t})e_{\Theta\varepsilon}(t,0)&=x^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{U}\otimes(2\varepsilon\boldsymbol{\Xi}-2(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))+e_\varepsilon(t+\tau,t)\boldsymbol{\Phi}]x(t)+\\
&x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})F(u(t))+F^{\mathrm{T}}(u(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})x(t)-\\
&x^{\mathrm{T}}(\sigma(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))x(t)-x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))x(\sigma(t))+\\
&x^{\mathrm{T}}(\sigma(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})F(u(t))+F^{\mathrm{T}}(u(t))(\boldsymbol{U}\otimes(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})x(\sigma(t))-\\
&x^{\mathrm{T}}(t-\tau)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Phi})x(t-\tau)。
\end{aligned}$$

由引理 4 可知，

$$\begin{aligned}
V^\Delta(t)e_{\Theta\varepsilon}(t,0)&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\{(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}[2\varepsilon\boldsymbol{\Xi}-2(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D})+e_\varepsilon(t+\tau,t)\boldsymbol{\Phi}](x_i(t)-x_j(t))+\\
&(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(f(u_i(t))-f(u_j(t)))+(f(u_i(t))-f(u_j(t)))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(x_i(t)-\\
&x_j(t))-(x_i^\sigma(t)-x_j^\sigma(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))(x_i(t)-x_j(t))-(x_i(t))-x_j(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D}))(x_i^\sigma(t)-\\
&x_j^\sigma(t))+(x_i^\sigma(t)-x_j^\sigma(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(f(u_i(t))-f(u_j(t)))+(f(u_i(t))-f(u_j(t)))^{\mathrm{T}}((1+\\
&\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(x_i^\sigma(t)-x_j^\sigma(t))-(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))\}。
\end{aligned}$$

由假设 2 可得，

$$\begin{aligned}
&(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(f(u_i(t))-f(u_j(t))\leqslant\\
&(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{L}(u_i(t)-u_j(t)),u_i(t)-u_j(t)=\boldsymbol{A}(x_i(t)-x_j(t))+\\
&\boldsymbol{B}(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))+\sum_{s=1}^{N}(\boldsymbol{\omega}_{is}-\boldsymbol{\omega}_{js})\boldsymbol{P}x_s(t)。
\end{aligned}$$

$$(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(f(u_i(t))-f(u_j(t)))\leqslant$$
$$(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})\boldsymbol{L}[\boldsymbol{A}(x_i(t)-x_j(t))+\boldsymbol{B}(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))+$$
$$\sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})\boldsymbol{P}x_s(t)],(f(u_i(t))-f(u_j(t)))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(x_i(t)-x_j(t))\leqslant$$
$$[(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})x_s^{T}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{L}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})$$
$$(x_i(t)-x_j(t)),(x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(f(u_i(t))-f(u_j(t)))\leqslant$$
$$(x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})L[\boldsymbol{A}(x_i(t)-x_j(t))+\boldsymbol{B}(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))+$$
$$\sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})\boldsymbol{P}x_s(t)],(f(u_i(t))-f(u_j(t)))^{\mathrm{T}}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))\leqslant$$
$$[(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})x_s^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}]$$
$$\boldsymbol{L}((1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi})(x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))。$$

因此，$V^{\Delta}(t)e_{\Theta\varepsilon}(t,0)\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\{(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}[2\varepsilon\boldsymbol{\Xi}-2(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D})+e_{\varepsilon}(t+\tau,t)\boldsymbol{\Phi}+(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi LA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi}](x_i(t)-x_j(t))+(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}[(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi LB}](x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))+(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}[(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi LP}]\sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})x_s(t)+(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi}](x_i(t)-x_j(t))+\sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})x_s^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi}](x_i(t)-x_j(t))+(x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))^{\mathrm{T}}[(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi LA}-(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D})](x_i(t)-x_j(t))+(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi}-(1+\mu\varepsilon)(\boldsymbol{\Xi D})](x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))+(x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))^{\mathrm{T}}[(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi LB}](x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))+(x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))^{\mathrm{T}}[(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi LP}]\sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})x_s(t)+(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi}](x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))+\sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})x_s^{\mathrm{T}}(t)[\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(1+\mu\varepsilon)\boldsymbol{\Xi}](x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t))-(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}(x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau))\}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\eta_{ij}^{\mathrm{T}}(t)\sum_{ij}\eta_{ij}(t)$。

令 $\eta_{ij}(t)=\begin{pmatrix}x_i(t)-x_j(t)\\ x_i^{\sigma}(t)-x_j^{\sigma}(t)\\ \sum_{s=1}^{N}(\omega_{is}-\omega_{js})x_s(t)\\ x_i(t-\tau)-x_j(t-\tau)\end{pmatrix}$，$\sum_{ij}$ 是定理 1 中定义的。因此有，$V^{\Delta}(t)e_{\Theta\varepsilon}(t,0)\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\eta_{ij}^{\mathrm{T}}(t)\sum_{ij}\eta_{ij}(t)<0$，则 $V(t)<V(0)$，即 $V(t)$ 是一个有界函数。故 $e_{\varepsilon}(t,0)x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{\Xi})x(t)$ 也是有界的，所以有：$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Xi})\|x_i(t)-x_j(t)\|^2\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}(x_i(t)-x_j(t))^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}(x_i(t)-x_j(t))=O(e_{\Theta\varepsilon}(t,0))$，则系统（4）达到全局指数型同步。

若定理 1 中的 ε 足够小，则可得到推论 1。

推论 1 在假设 1 和假设 2 下，存在 $n\times n$ 阶正定矩阵 $\boldsymbol{\Xi}>0,\boldsymbol{\Phi}>0$，对角矩阵 $\boldsymbol{L}=\mathrm{diag}\{l_1,l_2,\cdots,l_n\}>0$，使得 $\sum_{ij}=\boldsymbol{\Omega}_1\otimes\boldsymbol{\Xi}+\boldsymbol{\Omega}_2<0$，其中 $\boldsymbol{\Omega}_1=\begin{pmatrix}-2\boldsymbol{D}+\boldsymbol{LA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}-\boldsymbol{D} & \boldsymbol{LP} & \boldsymbol{LB}\\ \boldsymbol{LA}-\boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{LP} & \boldsymbol{LB}\\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Omega}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{\Phi}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{O}=0_{n\times n}$，$1\leqslant i<j\leqslant N$，则系统（4）可达到全局指数型同步。

定理 2　在假设 1 和假设 2 成立的情况下，存在 $n \times n$ 阶正定矩阵 $\boldsymbol{\Xi} > 0, \boldsymbol{\Phi} > 0$，对角矩阵 $\boldsymbol{L} = \mathrm{diag}\{l_1, l_2, \cdots, l_n\} > 0$，使得 $\sum_{ij} = \begin{pmatrix} -2\boldsymbol{\Xi D} + \boldsymbol{\Xi LA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L\Xi} + \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L\Xi} - \boldsymbol{\Xi D} & \boldsymbol{\Xi LP} & \boldsymbol{\Xi LB} \\ \boldsymbol{\Xi LA} - \boldsymbol{\Xi D} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Xi LP} & \boldsymbol{\Xi LB} \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L\Xi} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L\Xi} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L\Xi} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L\Xi} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix} < 0$，其中 $\boldsymbol{O} = 0_{n\times n}, 1 \leqslant i < j \leqslant N$，则系统（2）可达到全局指数型同步。

证明　令 $T = [t_0, \infty)$，则 $\sigma(t) = t, \mu(t) = 0$，对 $\forall t \in T$。对系统（2）构造以下 Lyapunov 函数 $V(t) = 2V_1(t) + V_2(t)$，其中 $V_1(t) = e^{\varepsilon t} x^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{\Xi})x(t)$，$V_2(t) = \int_{t-\tau}^{t} e^{\varepsilon(s+\tau)} x^{\mathrm{T}}(s)(\boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{\Phi})x(s)\Delta s$。其余证明过程和定理 1 类似，此处省略。

定理 3　在假设 1 和假设 2 下，存在 $n \times n$ 阶正定矩阵 $\boldsymbol{\Xi} > 0, \boldsymbol{\Phi} > 0$，对角矩阵 $\boldsymbol{L} = \mathrm{diag}\{l_1, l_2, \cdots, l_n\} > 0$，且 $\varepsilon > 0$，使得 $\sum_{ij} = \boldsymbol{\Omega}_1 \otimes (1+\varepsilon)\boldsymbol{\Xi} + \boldsymbol{\Omega}_2 < 0$，其中 $\boldsymbol{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} -2\boldsymbol{D} + \boldsymbol{LA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} - \boldsymbol{D} & \boldsymbol{LP} & \boldsymbol{LB} \\ \boldsymbol{LA} - \boldsymbol{D} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{LP} & \boldsymbol{LB} \\ \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 2\varepsilon\boldsymbol{\Xi} + (1+\varepsilon)^{\tau}\boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{O} = 0_{n\times n}$，$1 \leqslant i < j \leqslant N$，则系统（3）可达到全局指数型同步。

证明　令 $T = \mathbf{Z}$，则 $\sigma(k) = k+1, \mu(k) = 1$，对 $\forall t = k \in T$。由引理 1 可以得到，$e_{\varepsilon}(t, 0) = (1+\varepsilon)^k$，$e_{\varepsilon}(t+\tau, t) = (1+\varepsilon)^{\tau}$。其余证明过程和定理 1 类似，此处省略。

3　模拟例子

考虑系统 $\boldsymbol{x}_i^{\Delta}(t) = -\boldsymbol{D}x_i(t) + f(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{A}x_i(t) + \boldsymbol{B}x_i(t-\tau) + \boldsymbol{P}\sum_{j=1}^{12}\omega_{ij}(x_j - x_i))$，$i = 1, 2, \cdots, 12$，其中 $\boldsymbol{x}_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t))^{\mathrm{T}} (i = 1, 2, \cdots, 12)$ 是第 i 个子系统的状态向量，激活函数 $f_j(x_{ij}(t)) = \tanh(x_{ij}(t))(j = 1, 2)$，可见其满足假设 1、假设 2 条件。时标选择 $T = \cup_{k\in Z}[0.08k, 0.08k + 0.04]$，$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{11} & -\boldsymbol{e}_{11} \\ -\boldsymbol{e}_{11}^{\mathrm{T}} & 11 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$，其余参量 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 12 & -0.1 \\ -0.1 & 10 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -0.1 \\ -1.5 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.2 \\ -0.1 & -3.5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{J}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\tau = 1$，则系统状态分量差模拟图见图 1，运用 Matlab 中的 LMI 工具箱，可知式（5）可解。

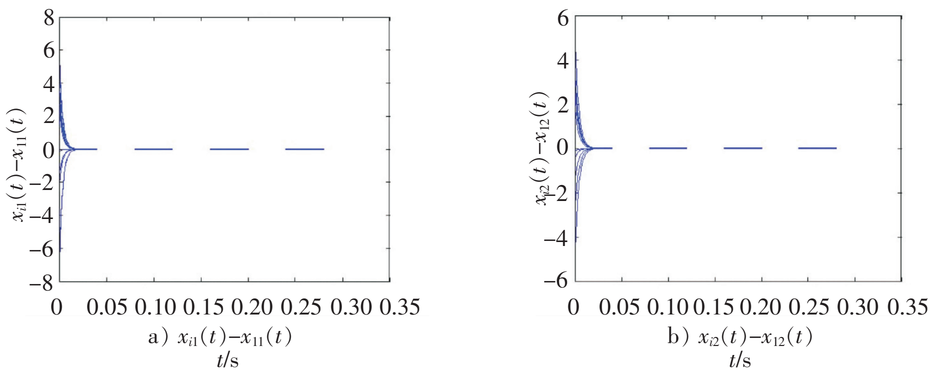

图 1　系统(1)的同步误差 $x_{in}(t) - x_{1n}(t)$

Fig.1　Synchronization error $x_{in}(t) - x_{1n}(t)$ of system (1)

[参考文献]

[1] BAUSO D, GIARRE L, PESENTI R. Consensus for networks with unknown but bounded disturbances [J]. Control Optim, 2009, 48(3): 1756-1770. DOI:10.1137/060678786.

[2] WEN G, DUAN D, YU W, et al. Consensus in multi-agent systems with communication constraints [J]. Int J Robust Nonlinear Control, 2012, 22(2): 170-182. DOI:10.1002/rnc.1687.

[3] YU W, ZHENG W, CHEN G, et al. Second-order consensus in multi-agent systems with sampled position data [J]. Automatica, 2011, 47(7): 1496-1503. DOI:10.1016/j.automatica.2011.02.027.

[4] WEN G, DUAN Z, CHEN G, et al. Consensus tracking of multi-agent systems with Lipschitz-type node dynamics and switching topologies [J]. IEEE Trans Circuits Syst, 2014, 61(2): 499-511. DOI:10.1109/TCSI.2013.2268091.

[5] LU W, CHEN T. Synchronization analysis of linearly coupled networks of discrete time systems [J]. Physica D, 2004, 198:148-168. DOI:10.1016/j.physd.2004.08.024.

[6] CAO J, CHEN G, LI P. Global synchronization in an array of delayed neural networks with hybrid coupling [J]. IEEE Trans Syst Man Cybern Part B, 2008, 38(2): 488-498. DOI:10.1109/TS MCB.2007.914705.

[7] LU J, HO D W C, CAO J, et al. Exponential synchronization of linearly coupled neural networks with impulsive disturbances [J]. IEEE Trans Neural Netw, 2011, 22(2): 329-335. DOI:10.2991/ijcis.2011.4.3.6.

[8] LV J, YU X, CHEN G. Chaos synchronization of general complex dynamical networks [J]. Physica A, 2004, 334(1/2): 281-302. DOI:10.1016/j.physa.2003.10.052.

[9] LIANG J, WANG Z, LIU Y. Global synchronization control of general delayed discrete time networks with stochastic coupling and disturbances [J]. IEEE Trans Syst Man Cybern Part B, 2008, 38(4): 1073-1083. DOI:10.1109/TSMCB.2008.925724.

[10] CHEN A, DU D. Global exponential stability of delayed BAM network on time scale [J]. Neurocomputing, 2008, 71(16/18): 3582-3588. DOI:10.1016/j.neucom.2008.06.004.

[11] CHENG Q, CAO J. Synchronization of complex dynamical networks with discrete time delays on time scales [J]. Neurocomputing, 2015, 151: 729-736. DOI:10.1016/j.neucom.2014.10.033.

[12] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales: an introduction with appLications [M]. Boston: Birkh Wauser, 2001.

[13] LANGVILLE A N, STEWART W J. The Kronecker product and stochastic automata networks [J]. J Comput Appl Math, 2004, 167(2): 429-447. DOI:10.1016/j.cam.2003.10.010.

[14] CHENG Q, CAO J. Global synchronization of complex networks with discrete time delays and stochastic disturbances [J]. Neural Comput Appl, 2011, 20(8): 1167-1179. DOI:10.1007/S00521-010-0467-4.

[15] BOYD S, GHAOUI L E, FERON E, et al. Linear matrix inequalities in systems and control theory [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.

[16] AHMADIZADEH S, NESIC D, FREESTONE D R, et al. On synchronization of networks of Wilson-Cowan oscillators with diffusive coupling [J]. Automatica, 2016, 71: 169-178. DOI:10.1016/j.automatica.2016.04.030.

[17] BOHNER M, PETERSON A. Advances in dynamic equations on time scales [M]. Boston: Birkh Wauser, 2003.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)