第23卷 第5期 集美大学学报（自然科学版） Vol.23 No.5
2018年9月 Journal of Jimei University(Natural Science) Sep. 2018

[文章编号] 1007-7405(2018)05-0385-10 DOI:10.19715/j.jmuzr.2018.05.011

具有非线性食饵收获的随机捕食–食饵模型

蓝桂杰，付盈洁，魏春金，张树文

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 研究了具有非线性食饵收获的随机捕食–食饵模型的动力学行为。首先获得对于任意的正初始值，系统都存在唯一的全局正解，并且正解是随机有界的，进而得到了系统的随机持久性、灭绝性的充分条件；其次通过构造 Lyapunov 函数，证明了系统存在唯一的平稳分布且具有遍历性；最后给出数值模拟来验证本文的主要结果。

[关键词] 捕食–食饵系统；收获；随机持久；平稳分布

[中图分类号] O 211.63

A Stochastic Predator-Prey Model with Nonlinear Prey Harvesting

LAN Guijie, FU Yingjie, WEI Chunjin, ZHANG Shuwen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the dynamics of a stochastic predator-prey system with nonlinear prey harvesting were investigated. First of all, the system admits a unique global positive solution starting from the positive initial value were established, and it was shown that the positive solution to the stochastic system was stochastically bounded. Moreover, sufficient conditions for stochastically permanence and extinction were obtained. Secondly, it was proved that there exists a unique stationary distribution and it has ergodicity by constructing a suitable Lyapunov function. Finally, numerical simulations were carried out to substantiate the analytical results.

Keywords: predator-prey system; harvesting; stochastic permanence; stationary distribution

0 引言

长期以来，捕食–食饵模型的动力学行为一直是生态学与生物数学的研究热点之一。在过去的几十年里，已经提出了许多捕食–食饵模型，并获得了许多丰富的研究成果[1-3]。文献［1］提出了以下模型

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = x(t)[r_1 - a_1x(t) - b_1y(t)]\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}y(t) = y(t)[r_2 - b_2y(t)/x(t)]\mathrm{d}t, \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t)$，$y(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时刻的种群密度；模型的所有参数都是正的；r_1，r_2 分别表示食饵和捕食者的内禀增长率；a_1 表示食饵种群的密度制约系数；b_1 是捕食者对食饵的捕获率；b_2y/x 表示具有 Leslies 形式的捕食者数量反应。文献［1］得到了模型（1）存在唯一的全局渐进稳定的正平衡态。文献［3］指出，在食饵 x 严重稀缺的情况下，捕食者有其他替代的食物来源，但由

[收稿日期] 2017-12-05 [修回日期] 2018-03-12

[基金项目] 福建省自然科学基金项目（2016J05012，2016J01667）

[作者简介] 蓝桂杰（1992—），男，硕士生，从事生物数学方向研究。通信作者：张树文（1963—），男，教授，硕导，从事生物数学方向研究，E-mail:zhangsw_123@163.com。

于食饵 x 不足，捕食者的增长仍将受到限制。所以将模型（1）的 b_2y/x 修改为 $b_2y/(k_2+x)$，其中 k_2 为捕食者 y 的环境容纳量。

在经济和生物方面，食饵或捕食者或两者的收获又是另一个重要研究课题[4-16]。捕获强度对种群的动力学行为起到了非常重要的作用。因此，收获函数在描述捕食–食饵模型的动力学行为中起到了关键的作用。文献［4］指出，非线性收获比常数收获和比例收获更贴近实际。此外，在现实生态系统中，各种形式的环境干扰都是无时不在、无处不在的，生态系统中的各个种群都会受到不同形式和不同程度的环境干扰的影响。近年来，涌现出大量的文献致力于研究随机生物种群与随机传染病模型的动力学性质，并取得了丰富的研究成果[11-18]。本文假设只对食饵进行捕获，而捕食者没有经济价值，构建以下随机捕食–食饵系统：

$$\begin{cases} \mathrm{d}x(t) = x(t)[r_1 - a_1x(t) - b_1y(t) - f/(1+wx(t))]\mathrm{d}t + \sigma_1 x(t)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}y(t) = y(t)[r_2 - b_2y(t)/(k_2+x(t))]\mathrm{d}t + \sigma_2 y(t)\mathrm{d}B_2(t), \end{cases} \tag{2}$$

其中：$fx(t)/(1+wx(t))$ 是非线性收获函数，f 是收获系数，w 是一个合适的正常数；$\sigma_i^2(i=1,2)$ 表示白噪声强度；$B_1(t)$，$B_2(t)$ 是互相独立的标准 m 维布朗运动，定义在带有滤子 $\mathscr{F}_t$ 并且满足通常条件（即 $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 是右连续单调递增，且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有零测集）的完备概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 上。

1 预备知识

给出一些基本定义、引理及定理。为方便起见，给出以下记号：$\mathbf{R}_+^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n \mid a_i>0, i=1,2,\cdots,n\}$，$|X(t)|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$。

设 $B(t)=(B_1(t),\cdots,B_m(t))$ 是定义在上述概率空间上 m 维标准布朗运动。设 $0\leqslant t_0\leqslant T<\infty$，$X_0$ 是 $\mathscr{F}_{t_0}$ 可测的 $\mathbf{R}^d$ 值的随机变量，且 $E[X_0^2]<\infty$。设 $f:\mathbf{R}^d\times[t_0,T]\to\mathbf{R}^d$ 和 $g:\mathbf{R}^d\times[t_0,T]\to\mathbf{R}^{d\times m}$ 都是 Borel 可测函数。设初值为 $X(t_0)=X_0$ 的 d 维随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t)=f(X(t),t)\mathrm{d}t+g(X(t),t)\mathrm{d}B(t),\ t_0\leqslant t\leqslant T。\tag{3}$$

定理 1[19-20]（存在唯一性定理） 假设函数 $f:\mathbf{R}^d\times[t_0,T]\to\mathbf{R}^d$ 和 $g:\mathbf{R}^d\times[t_0,T]\to\mathbf{R}^{d\times m}$ 关于 $(X,t)\in\mathbf{R}^d\times[t_0,T]$ 可测。且关于 X 满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件。即存在 $c_k>0(k=1,2,\cdots)$，使得当 $\forall X,Y\in\mathbf{R}^d$ 且 $|X|\vee|Y|\leqslant k$ 满足不等式：$|f(X,t)-f(Y,t)|\vee|g(X,t)-g(Y,t)|\leqslant ck|X-Y|$。同时存在 $c>0$，满足 $|f(X,t)|\vee|g(X,t)|\leqslant c(1+|X|)$，则随机微分方程（3）存在唯一连续的全局解 $X(t)(t\in[t_0,T))$。且对每个 $p>0$，有 $E[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant T}|X(s;X_0)|^p]<\infty$。

定理 2[19-20]（Itô 公式） 设 $X(t)(t\geqslant 0)$ 是方程（3）的解。$V\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R})$，则 $V(X(t),t)$ 仍是 Itô 过程，具有随机微分 $\mathrm{d}V(X(t),t)=(V_t(X(t),t)+V_X(X(t),t)f(t)+0.5\mathrm{trace}[g^T(t)V_{XX}(X(t),t)g(t)])\mathrm{d}t+VX(X(t),t)g(t)\mathrm{d}B(t)$, a. s.，称此式为 Itô 公式。

定理 3[19-20]（随机微分方程比较定理） 设 $x_i(t)(i=1,2)$ 分别是随机微分方程 $\mathrm{d}x_i(t)=f_i(x_i(t),t)\mathrm{d}t+g(x_i(t),t)\mathrm{d}B(t)$ 的解，其中 $f(x,t)\in C([0,+\infty)\times\mathbf{R})$，$g(x,t)\in C([0,+\infty)\times\mathbf{R})$。若满足：1）存在定义在 $[0,+\infty)$ 上满足 $\rho(0)=0$ 及 $\int_{0^+}^{+\infty}\rho(s)\mathrm{d}s=\infty$ 的函数 $\rho(s)$，使得 $|g(x,t)-g(y,t)|\leqslant\rho(|x-y|),x,y\in\mathbf{R},t\geqslant 0$；2）$f_1(x,t)\leqslant f_2(x,t),x\in\mathbf{R},t\geqslant 0$；3）$x_1(0)\leqslant x_2(0)$，则依概率 1 有 $x_1(t)\leqslant x_2(t),t\geqslant 0$。

定义 1[21] 设 $X(t)=(x(t),y(t))$ 是方程（1）满足初值 $X(0)=(x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^2$ 的解。若 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得 $\lim_{t\to\infty}P\{|X(t)|>\delta\}<\varepsilon$ 成立，则称 $X(t)$ 是随机一致有界。

定义 2[21] 设 $X(t)=(x(t),y(t))$ 是方程（1）满足初值 $(x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^2$ 的解。若 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，$\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0$ 和 $\gamma=\gamma(\varepsilon)>0$，使得 $\lim_{t\to\infty}P\{|X(t)|\geqslant\delta\}\geqslant 1-\varepsilon$ 和 $\lim_{t\to\infty}P\{|X(t)|\leqslant\gamma\}\geqslant$

$1-\varepsilon$ 成立，则称 $X(t)$ 是随机持久的。

定义 3[22]　设 $x(t)$ 是系统（1）的任意解，则：1）若 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，则称种群 $x(t)$ 为灭绝的；2）若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s>0$，则称种群 $x(t)$ 为平均持续生存的。

考虑下列随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t)=X(t)[r_1-a_1X(t)]\mathrm{d}t+\sigma X(t)\mathrm{d}B(t),\tag{4}$$

其中 r_1,a_1,σ 都是正常数, $B(t)$ 是标准的布朗运动。

引理 1[22]　$X(t)$ 是方程（4）的解，并且满足初始值 $X(0)>0$，当 $r_1>0.5\sigma^2$，则 $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\ln X(t)=0$,a. s. , $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^t X(s)\mathrm{d}s=(r_1-0.5\sigma^2)/a_1$,a. s. 。

设 $X(t)$ 是 E_l（l 维欧几里得空间）中的一个 Markov 自治过程，满足下列随机微分方程 $\mathrm{d}X(t)=b(X)\mathrm{d}t+\sum\limits_{s=1}^k g_s^i(X)\mathrm{d}B_s(t)$。其扩散矩阵为 $\boldsymbol{A}(X)=a_{ij}(X)$, $a_{ij}(X)=\sum\limits_{s=1}^k g_s^i(X)g_s^j(X)$。

作如下假设，（A）存在具有正则边界 Γ 的有界区域 $U\subset E_l$，具有如下性质：（A1）在 U 和它的一些邻域，扩散矩阵 $\boldsymbol{A}(X)$ 的最小特征值是非零的；（A2）当 $X\in E_l\setminus U$ 时，从 X 出发的轨道到达集合 U 的平均时间 τ 是有限的，且对每个紧子集 $K\subset E_l$ 有 $\sup\limits_{X\in K}E_X\tau<\infty$。

引理 2[23]　如果假设（A）成立，则 Markov 过程 $X(t)$ 存在平稳分布 $\mu(\cdot)$。令 $f(\cdot)$ 是关于测度 μ 可积的函数，则有如下结论成立：$Px\{\lim\limits_{T\to\infty}T^{-1}\int_0^T f(X(t))\mathrm{d}t=\int_{E_l}f(x)\mu(\mathrm{d}x)\}=1,x\in E_l$。

为了验证（A1）成立，只需证明 L 在 U 中是一致椭圆的，其中 $\mathrm{LV}=b(X)V_X+0.5\mathrm{tr}A(X)V_{XX}$，即证明存在正数 M，满足 $\sum\limits_{i,j=1}^k a_{ij}(X)\xi_i\xi_j\geqslant M|\xi|^2,X\in U,\xi\in\mathbf{R}^k$。

为了验证（A2）成立，只要证明存在非负的 C^2－函数及邻域 U，使得对于任意的 $X\in E_l\setminus U$，$\mathrm{LV}(X)$ 是负的。

2　主要结果

定理 4　对任意给定的初值 $X(0)=(x(0),y(0))\in\mathbf{R}^2+$，系统（2）存在唯一解 $X(t)=(x(t),y(t))\in\mathbf{R}_+^2$，并且以概率 1 存在于 $\mathbf{R}_+^2$ 中。

证明　令 $u(t)=\ln x(t)$, $v(t)=\ln y(t)$。由 Itô 可得

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t)=[r_1-a_1\mathrm{e}^{u(t)}-b_1\mathrm{e}^{v(t)}-f/(1+w\mathrm{e}^{u(t)})-0.5\sigma_1^2]\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}v(t)=[r_2-b_2\mathrm{e}^{v(t)}/(k_2+\mathrm{e}^{u(t)})-0.5\sigma_2^2]\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t),\end{cases}\tag{5}$$

显然，系统（5）满足局部 Lipschitz 条件，则系统存在唯一的局部解 $(u(t),v(t))(t\in[0,\tau_e))$。其中 τ_e 是爆破时间，即 $(x(t),y(t))=(\mathrm{e}^{u(t)},\mathrm{e}^{v(t)})$ 是系统（2）满足初值 $(x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^2$ 的唯一解。为了证明这个解是全局的，只需证明 $\tau_e=+\infty$。

令 $k_0>0$ 足够大，使得 $(x(t),y(t))\in[1/k_0,k_0]\times[1/k_0,k_0]$，对于任意的正数 $k\geqslant k_0$，定义一个停时序列 $\tau_k=\inf\{t\in[0,\tau_e):x(t)\notin(1/k,k)$ 或 $y(t)\notin(1/k,k)\}$，定义 $\inf\boldsymbol{\Phi}=+\infty$（$\boldsymbol{\Phi}$ 代表一个空集）。显然，当 $k\to\infty$ 时，τ_k 是单调递增的，且 $\tau_k<\tau_e$，因此有 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to+\infty}\tau_k$，其中 $\tau_\infty\leqslant\tau_e$, a. s. , 因此，只需证明 $\tau_\infty=\infty$,a. s. 。假设 $\tau_\infty\neq\infty$，则存在常数 $T\geqslant0$，$\epsilon\in(0,1)$ 和一个整数 $k_1\geqslant k_0$，有 $P\{\tau_k\leqslant T\}\geqslant\epsilon$，$\forall k\geqslant k_1$。

定义一个 C^2－函数 V：$\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+$, $V(x,y)=x-\ln x+y-\ln y+(k_2+x)y$，由 Itô 公式可得，$\mathrm{LV}=x(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))-(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx)-0.5\sigma_1^2)+y(r_2-b_2y/(k_2+x))-(r_2-b_2y/(k_2+x)-0.5\sigma_2^2)+(k_2+x)y(r_2-b_2y/(k_2+x))+xy(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))\leqslant$

$-a_1x^2-b_2y^2-a_1x^2y+(r_1+r_2)xy+(r_1+a_1)x+(r_2+k_2r_2+b_1+b_2/k_2)y+f+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

事实上，对于 $-a_1x^2-b_2y^2-a_1x^2y+(r_1+r_2)xy$，若 $x\geqslant(r_1+r_2)/a_1$，则上式小于等于零，即有上界。若 $x<(r_1+r_2)/a_1$，则 $-a_1x^2-b_2y^2-a_1x^2y+(r_1+r_2)xy\leqslant -b_2y^2+((r_1+r_2)^2/a_1)y$ 依然有上界。类似的可证存在常数 $N_1\in\mathbf{R}$，使得

$$\mathrm{LV}\leqslant N_1。\tag{6}$$

下面的证明与文献［21］的相似，省略。

定理 5　对于任意给定的初值 $X(0)=(x(0),y(0))\in\mathbf{R}_+^2$，系统（1）的解 $X(t)=(x(t),y(t))$ 是随机一致有界。

证明　定义一个 C^2 – 函数 $V:\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+$，$V=x^2+y^2+(k_2+x)y^2$。由 Itô 公式可得，$\mathrm{LV}=2x^2(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx)+0.5\sigma_1^2)+2y^2(r_2-b_2y/(k_2+x)+0.5\sigma_2^2)+2(k_2+x)y^2(r_2-b_2y/(k_2+x)+0.5\sigma_2^2)+xy^2(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))\leqslant -2a_1x^3-2b_2y^3-a_1x^2y^2+(2r_1+\sigma_1^2)x^2+2r_2y^2+\sigma_2^2y^2+2r_2(k_2+x)y^2+r_1xy^2+k_2\sigma_2^2y^2+\sigma_2^2xy^2$。

定义 $W=\mathrm{e}^tV$，对 W 应用 Itô 公式可得，$LW=\mathrm{e}^t(V+LV)\leqslant\mathrm{e}^t(x^2+y^2+(k_2+x)y^2-2a_1x^3-2b_2y^3-a_1x^2y^2+(2r_1+\sigma_1^2)x^2+2r_2y^2+\sigma_2^2y^2+2r_2(k_2+x)y^2+r_1xy^2+k_2\sigma_2^2y^2+\sigma_2^2xy^2)$，与不等式（6）的证明类似，存在 $N_2>0$ 使得 $LW\leqslant N_2\mathrm{e}^t$，即 $\mathrm{d}W=\mathrm{e}^t(LV\,\mathrm{d}t+(2\sigma_1x^2+\sigma_1xy^2)\mathrm{d}B_1(t)+(2\sigma_2(k_2+x)y^2+\sigma_2y^2)\mathrm{d}B_2(t)+V\,\mathrm{d}t)$，上式两端从 0 到 t 积分，并取均值可得 $E(W(t))\leqslant W(0)+N_2(\mathrm{e}^t-1)$，即 $E(x^2+y^2+(k_2+x)y^2)\leqslant W(0)\mathrm{e}^{-t}+N_2(1-\mathrm{e}^{-t})<+\infty$。因此 $E^2|X|\leqslant E|X|^2<+\infty$，最后应用 Chebyshev 不等式就能得到结论，所以省略。

定理 6　设 $X(t)=(x(t),y(t))$ 是系统（2）的解，并且满足初始条件 $X(0)=(x(0),y(0))$ 和 $\min\{r_1-f,r_2\}-0.5(\theta+1)\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\}>0$，其中 $0<\theta<2$，则有 $\limsup\limits_{t\to\infty}E(1/|X(t)|)<+\infty$。

证明　定义一个 C^2 – 函数 $V:\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+$，$V=x+y$。由 Itô 公式可得，$\mathrm{d}V=[x(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))+y(r_2-b_2y/(k_2+x))]\mathrm{d}t+\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2y\mathrm{d}B_2(t)$。设 $U=1/V$，类似地有，$\mathrm{d}U=-U^2[x(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))+y(r_2-b_2y/(k_2+x))]+U^3(\sigma_1^2x^2+\sigma_2^2y^2)\mathrm{d}t-U^2[\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2y\mathrm{d}B_2(t)]=LU\mathrm{d}t-U^2[\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2y\mathrm{d}B_2(t)]$，其中，$LU=-U^2[x(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))+y(r_2-b_2y/(k_2+x))]+U^3(\sigma_1^2x^2+\sigma_2^2y^2)$。

令 $W=(1+U)^\theta$，同理可得 $\mathrm{d}W=LW\mathrm{d}t-\theta(1+U)^{\theta-1}U^2(\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)+\sigma_2y dB_2(t))$，其中 $LW=\theta(1+U)^{\theta-2}(-(1+U)U^2[x(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))+y(r_2-b_2y/(k_2+x))]+U^3(\sigma_1^2x^2+\sigma_2^2y^2)+U^4(\sigma_1^2x^2+\sigma_2^2y^2)+0.5(\theta-1)U^4(\sigma_1^2x^2+\sigma_2^2y^2))\leqslant\theta(1+U)^{\theta-2}((1+U)U^2[-\min\{r_1-f,r_2\}(x+y)+\max\{a_1,b_2/k_2\}(x^2+y^2)+0.5b_1(x^2+y^2)]+\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\}U+0.5(\theta+1)\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\}U^2)\leqslant\theta(1+U)^{\theta-2}(-(\min\{r_1-f,r_2\}-0.5(\theta+1)\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\})U^2-(\min\{r_1-f,r_2\}-\max\{a_1,b_2/k_2\}-0.5b_1+\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\})U+\max\{a_1,b_2/k_2+0.5b_1\})$。

由于 $\min\{r_1-f,r_2\}-0.5(\theta+1)\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\}>0$，可以找到一个常数 $k>0$，使得 $0<k<\theta(\min\{r_1-f,r_2\}-0.5(\theta+1)\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\})$。最后再定义 $Z=\mathrm{e}^{kt}W$，通过 Itô 公式可得，$LZ=\mathrm{e}^{kt}(kW+LW)=\mathrm{e}^{kt}(k(1+U)^\theta+LW)\leqslant\theta(1+U)^{\theta-2}\mathrm{e}^{kt}(k(1+2U+U^2)/\theta-(\min\{r_1-f,r_2\}-0.5(\theta+1)\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\})U^2-(\min\{r_1-f,r_2\}-\max\{a_1,b_2/k_2\}-0.5b_1+\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\})U+\max\{a_1,b_2/k_2+0.5b_1\})$。由 k 和 θ 的定义可知，存在一个常数 $N_3>0$，使得 $LZ\leqslant N_3\mathrm{e}^{kt}$，与定理 5 的证明类似，可得 $E[(1+U)^\theta]$ 有界，不妨设其上界为 N_4，即 $\limsup\limits_{t\to\infty}E(U)\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}E(1+U)^\theta\leqslant N_4$。由于 $(x+y)^\theta\leqslant 2(x^2+y^2)^{0.5\theta}$，所以 $\limsup\limits_{t\to\infty}E(1/|X|^\theta)<+\infty$。

定理 7　若系统（2）满足 $\min\{r_1-f,r_2\}-0.5(\theta+1)\max\{\sigma_1^2,\sigma_2^2\}>0$，其中 $0<\theta<2$，则系统（2）是随机持久的。

结合定理 5、定理 6 及 Chebyshev 不等式，可以得到结论。

定理 8　设 $X(t)=(x(t),y(t))$ 是系统（2）满足初始条件 $x(0)>0$，$y(0)>0$ 的任意解，ⅰ）当 $f\geqslant a_1/(4w)$，$r_1<2\sqrt{a_1f/w}-a_1/w+0.5\sigma_1^2$ 或者 $f<a_1/(4w)$，$r_1<0.5\sigma_1^2$ 时，$r_2>0.5\sigma_2^2$，则种群 x 是灭绝的，种群 y 是平均持续生存的；ⅱ）若 $r_2<0.5\sigma_2^2$，$r_1>f+0.5\sigma_1^2$，则种群 y 是灭绝的，种群 x 是平均持续生存的；ⅲ）当 $f\geqslant a_1/(4w)$，$r_1<2\sqrt{a_1f/w}-a_1/w+0.5\sigma_1^2$ 或者 $f<a_1/(4w)$，$r_1<0.5\sigma_1^2$ 时，$r_2<0.5\sigma_2$，则种群 x 和种群 y 均灭绝。

证明　ⅰ）对 $\ln x$ 应用 Itô 公式可得，$\mathrm{d}\ln x=(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx)-0.5\sigma_1^2)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\leqslant(r_1-a_1x-f/(1+wx)-0.5\sigma_1^2)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)\leqslant(r_1-a_1/w(1+wx)+a_1/w-f/(1+wx)-0.5\sigma_1^2)+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)$。

当 $f\geqslant a_1/(4w)$ 时，$\mathrm{d}\ln x\leqslant(r_1-2\sqrt{a_1f/w}+a_1/w-0.5\sigma_1^2)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)$，两边同时从 0 到 t 积分并除以 t 再取极限，由强大数定律可得：$\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\ln x(t)\leqslant(r_1-2\sqrt{a_1f/w}+a_1/w-0.5\sigma_1^2)<0$，即 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, a. s. 。当 $f<a_1/(4w)$ 时，$\mathrm{d}\ln x\leqslant(r_1-0.5\sigma_1^2)\mathrm{d}t+\sigma_1\mathrm{d}B_1(t)$，两边同时从 0 到 t 积分并除以 t 再取极限，由强大数定律可得：$\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\ln x(t)\leqslant(r_1-0.5\sigma_1^2)<0$, a. s. ，即 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$, a. s.，即对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 t_0 和 Ω_ε，当 $t>t_0$ 和 $\omega\in\Omega_\varepsilon$，都有 $P(\Omega_\varepsilon)\geqslant1-\varepsilon$ 和 $x/(k_2+x)\leqslant\varepsilon$ 成立。又因为 $\mathrm{d}y=y(r_2-b_2y/(k_2+x))\mathrm{d}t+\sigma_2y\mathrm{d}B_2=y(r_2-b_2y/k_2+b_2xy/((k_2+x)k_2))\mathrm{d}t+\sigma_2y\mathrm{d}B_2$。可得 $y(r_2-b_2y/k_2)\mathrm{d}t+\sigma_2y\mathrm{d}B_2\leqslant\mathrm{d}y\leqslant y(r_2-b_2y(1-\varepsilon)/k_2)\mathrm{d}t+\sigma_2y\mathrm{d}B_2$。又因为 $r_2>0.5\sigma_2^2$，根据引理 2 和随机微分方程的比较定理，则有 $\liminf\limits_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^t y(s)\mathrm{d}s\geqslant k_2(r_2-0.5\sigma_2^2)/b_2$, a. s. , $\limsup\limits_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^t y(s)\mathrm{d}s\leqslant k_2(r_2-0.5\sigma_2^2)/((1-\varepsilon)b_2)$, a. s.，由于 ε 的任意性，则有 $\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^t y(s)\mathrm{d}s=k_2(r_2-0.5\sigma_2^2)/b_2>0$, a. s. ，这就意味在ⅰ）成立的情况下，种群 x 是灭绝的，种群 y 是平均持续生存的。

ⅱ）对 $\ln y$ 应用 Itô 公式可得，$\mathrm{d}\ln y=(r_2-b_2y/(k_2+x)-0.5\sigma_2^2)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)\leqslant(r_2-0.5\sigma_2^2)\mathrm{d}t+\sigma_2\mathrm{d}B_2(t)$，两边同时从 0 到 t 积分并除以 t 再取极限，由强大数定律可得，$\lim\limits_{t\to\infty}t^{-1}\ln y(t)\leqslant(r_2-0.5\sigma_2^2)<0$, a. s. ，即 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$, a. s. 。类似地，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 T_0 和 Ω_ε，当 $t>t_0$ 和 $\omega\in\Omega_\varepsilon$，都有 $P(\Omega_\varepsilon)\geqslant1-\varepsilon$ 和 $b_1y\leqslant\varepsilon$。所以有 $x(r_1-a_1x-f/(1+wx)-\varepsilon)\mathrm{d}t+\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)\leqslant\mathrm{d}x\leqslant x(r_1-a_1x-f/(1+wx))\mathrm{d}t+\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)$。

由于 ε 的任意性可得 $\mathrm{d}x=x(r_1-a_1x-f/(1+wx))\mathrm{d}t+\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)\geqslant x(r_1-a_1x-f)\mathrm{d}t+\sigma_1x\mathrm{d}B_1(t)$，当 $r_1-f>0.5\sigma_1^2$，根据引理 2 和随机微分方程比较定理可得，$\liminf\limits_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s\geqslant(r_1-f-0.5\sigma_1^2)/a_1>0$, a. s. 。所以，当 $r_2<0.5\sigma_2^2$，$r_1>f+0.5\sigma_1^2$ 时，种群 y 是灭绝的，x 是平均持续生存的。

ⅲ）从ⅰ）和ⅱ）的讨论容易得到 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$, a. s. 。这就意味在ⅲ）成立的情况下，种群 x 和 y 都是灭绝的。

定理 9　设系统（2）满足 $(r_1-f)/b_1>r_2k_2/b_2$, $a_1>fw$，

$$b_1M_2^2/(4r_2(a_1-fw)+M_2(x^*+k_2))<\min\{r_2/b_1(a_1-fw)[x^*+b_1M_2/(2r_2(a_1-fw))]^2,b_2(y^*)^2\} \tag{7}$$

其中 $M_2=0.5\sigma_2^2y^*+b_2y^*\sigma_1^2/(b_1k_2)$。则对于任意的正初始值，系统（2）存在唯一的平稳分布 $\mu(\cdot)$，而且是遍历的。

证明　首先考虑下面二元方程组

$$\begin{cases}r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx)=0,\\ r_2-b_2y/(k_2+x)=0,\end{cases} \tag{8}$$

将上述方程组的第二个方程代入第一个方程可得 $ax^2+bx+c=0$，其中 $a=-(a_1+b_1r_2/b_2)w$，$b=-(a_1+b_1r_2/b_2+(r_1-b_1r_2k_2/b_2)w)$，$c=r_1-f-b_1r_2k_2/b_2$。

注意到 $a<0$，$c>0$ 并由求根公式得：$x^*=(-b-\sqrt{b^2-4ac})/(4a)$ 或者 $x^*=(-b+\sqrt{b^2-4ac})/(4a)<0$(舍去)。

显然当 $(r_1-f)/b_1>r_2k_2/b_2$，方程（8）存在唯一的正解，不妨设为 (x^*,y^*)。

定义 C^2－函数 $V(x,y):\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+$：$V(x,y)=b_2y^*/b_1\int_{x^*}^{x}(1/(x^*+k_2)-1/(x+k_2))/x\mathrm{d}x+\int_{y^*}^{y}(y-y^*)/y\mathrm{d}y=V_1+V_2$，其中 $V_1=b_2y^*/b_1\int_{x^*}^{x}(1/(x^*+k_2)-1/(x+k_2))/x\mathrm{d}x$，$V_2=\int_{y^*}^{y}(y-y^*)/y\mathrm{d}y$。

由 Itô 公式可得，$\mathrm{LV}_1=b_2y^*/b_1[(1/(x^*+k_2)-1/(x+k_2))(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))+\sigma_1^2(1/(x+k_2)-1/(x^*+k_2)+x/(x+k_2)^2)/2]\leqslant b_2y^*/b_1[(1/(x^*+k_2)-1/(x+k_2))(r_1-a_1x-b_1y-f/(1+wx))+\sigma_1^2/k_2]\leqslant b_2y^*/b_1[-a_1(x-x^*)^2/((k_2+x)(k_2+x^*))+b_1(y^*-y)+fw(x-x^*)/((1+wx)(1+wx^*))+\sigma_1^2/k_2]=b_2y^*/b_1\{[-a_1(x-x^*)^2-b_1(y-y^*)(x-x^*)+fw(x-x^*)^2]/[((k_2+x)(k_2+x))+\sigma_1^2/k_2]\}=(-r_2/b_1(a_1-fw)(x-x^*)^2-r_2(y-y^*)(x-x^*))/(k_2+x)+b_2y^*\sigma_1^2/(b_1k_2)$。

类似地可得，$\mathrm{LV}_2=(y-y^*)(r_2-b_2y/(k_2+x))+0.5\sigma_2^2y^*=-b_2(y^*-y)^2/(k_2+x)+r_2(y-y^*)(x-x^*)/(k_2+x)+0.5\sigma_2^2y^*$。因此有 $\mathrm{LV}=\mathrm{LV}_1+\mathrm{LV}_2\leqslant-r_2/b_1(a_1-fw)(x-x^*)^2/(k_2+x)-b_2(y^*-y)^2/(k_2+x)+M_2$，即 $(k_2+x)\mathrm{LV}=-r_2/b_1(a_1-fw)(x-x^*)^2-b_2(y^*-y)^2+M_2(k_2+x)=-r_2/b_1(a_1-fw)[x-x^*-b_1M_2/(2r_2(a_1-fw))]^2-b_2(y^*-y)^2+b_1M_2^2/(4r_2(a_1-fw))+M_2(x^*+k_2)=r_2/b_1(a_1fw)[x-x^*-b_1M_2/(2r_2(a_1-fw))]^2-b_2(y^*-y)^2+\delta$，其中 $\delta=b_1M_2^2/(4r_2(a_1-fw))+M_2(x^*+k_2)$。直接对不等式（7）化简可得 $(x^*)^2>M_2b_1k_2/(r_2(a_1-fw))$，$(y^*)^2>\delta/b_2$。

下面证明椭圆 $-r_2/b_1(a_1-fw)[x-x^*-b_1M_2/(2r_2(a_1-fw))]^2-b_2(y^*-y)^2+\delta=0$ 完全在 $\mathbf{R}_+^2$ 里面。

不防设 $e^2=b_1\delta/(r_2(a_1-fw))$，$d^2=\delta/b_2$。上述椭圆变成 $[x^*-x-b_1M_2/(2r_2(a_1-fw))]^2/e^2+(y^*-y)^2/d^2=1$。由于椭圆中心 $(x^*+b_1M_2/(2r_2(a_1-fw)),y^*)\in\mathbf{R}_+^2$，并且 $[x^*+b_1M_2/(2r_2(a_1-fw))]-e^2=(x^*)^2-M_2b_1k_2/(r_2(a_1-fw))>0$，$(y^*)^2-d^2=(y^*)^2-\delta/b_2>0$。这就证明了椭圆 $-r_2/b_1(a_1-fw)[x-x^*-b_1M_2/(2r_2(a_1-fw))]^2-b_2(y^*-y)^2+\delta=0$ 完全在 $\mathbf{R}_+^2$ 里面。

取椭圆的一个邻域 U，并且 $\bar{U}\subseteq\mathbf{R}_+^2$。显然对任意的 $(x,y)\in\mathbf{R}_+^2/U$，有 $\mathrm{LV}<-C$（C 是一个正常数）。因此条件 A2 得到满足。

此外，可以找到一个常数 $M=\min\limits_{(x,y)\in\bar{U}}\{\sigma_1^2x^2,\sigma_2^2y^2\}>0$，使得对于任意的 $(x,y)\in\bar{U}$，$\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\mathbf{R}_+^2$，有 $\sum\limits_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x,y)\xi_i\xi_j=\sigma_1^2x^2\xi_1^2+\sigma_2^2y^2\xi_2^2\geqslant M\|\xi\|^2$，因此条件 A1 也满足。所以，系统（2）存在平稳分布，且具有遍历性。

定理 10 设系统（2）满足 $(r_1-f)/b_1>r_2k_2/b_2$，$a_1>fw$，则系统（2）的确定系统存在唯一的全局渐近稳定的正平衡态。

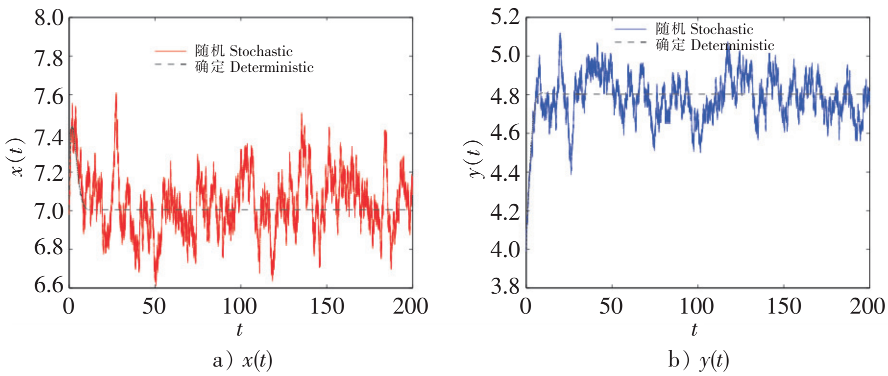
证明 由定理 9 可得，当 $(r_1-f)/b_1>r_2k_2/b_2$，系统（2）的确定系统存在唯一的正平衡态。下面证明该正平衡态是全局渐近稳定的。定义 C^2－函数 $V(x,y):\mathbf{R}_+^2\to\mathbf{R}_+$：$V(x,y)=b_2y^*/b_1\int_{x^*}^{x}(1/(x^*+k_2)-1/(x+k_2))/x\mathrm{d}x+\int_{y^*}^{y}(y-y^*)/y\mathrm{d}y$。由定理 9 可得，$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t\leqslant(-r_2/b_1(a_1-fw)(x-x^*)^2-b_2(y^*-y)^2)/(k_2+x)\leqslant0$。应用常微分方程渐近稳定性理论，就可得到系统（2）的确定系统的正平衡态是全局渐近稳定的。

3　数值模拟

本文研究了在白噪声扰动下的具有食饵收获的随机捕食–食饵系统。利用随机分析的方法，证明了系统（2）对于任意的正初始值存在唯一的全局正解，并且该正解是随机有界的，进而得到了系统的随机持久性；同时也证明了当 $f \geq a_1/(4w)$，$r_1 < 2\sqrt{a_1 f/w} - a_1/w + 0.5\sigma_1^2$ 或者 $f < a_1/(4w)$，$r_1 < 0.5\sigma_1^2$ 成立时，都会使食饵灭绝。这就意味着，过度的捕获或者过大的白噪声都将使物种趋于灭绝（当 $r_2 < 0.5\sigma_2^2$ 时，捕食者灭绝）；最后使用 Has'minskii 的平稳分布理论得到了系统（2）满足一定条件，存在平稳分布并且是遍历的，这些条件反映了大幅度环境噪声和过度捕获可能会使系统变得不稳定。

为了验证理论结果，采用 Milstein 高阶方法[24]对随机系统（2）进行数值模拟。取 $r_1 = 1.2$，$r_2 = 0.3$，$k_2 = 1$，$b_2 = 0.5$，$b_1 = 0.1$，$w = 0.6$，$a_1 = 0.1$ 和初值 $(7,4)$，通过取不同的 σ_1，σ_2，f 来研究白噪声和收获对系统（2）的影响。

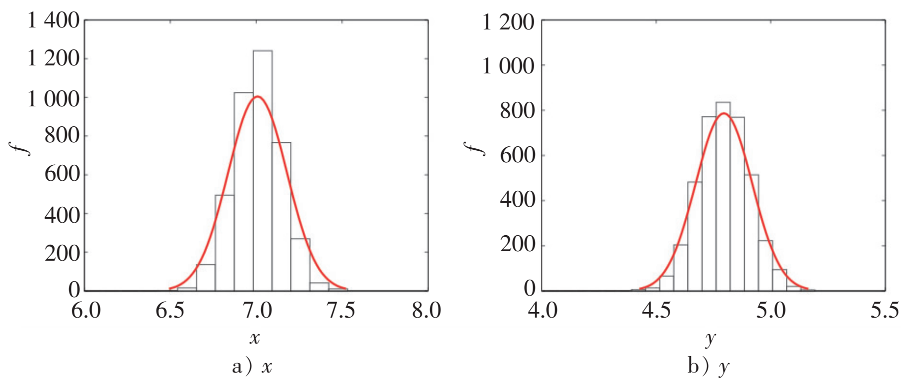
1）取 $\sigma_1 = 0.02$，$\sigma_2 = 0.02$，$f = 0.1$，通过计算可得 $b_1M_2^2/(4r_2(a_1 - fw)) + M_2(x^* + k_2) \approx 0.0848$，$r_2/b_1(a_1 - fw)[x^* + b_1M_2/(2r_2(a_1 - fw))]^2 \approx 5.9627$，$b_2(y^*)^2 \approx 11.5344$。显然参数的选择满足定理 7 和定理 9 的要求，即系统（2）是随机持久的并且存在平稳分布。从图 1 和图 2 可知，系统（2）的解围绕其确定性方程的解在小邻域内波动且存在平稳分布。



a）$x(t)$　　b）$y(t)$

图 1　系统(2)及其相对应确定系统的解(σ_1=σ_2=0.02,f=0.1)

Fig.1　The solutions of stochastic system (2) and its corresponding deterministic system(σ_1=σ_2=0.02,f=0.1)



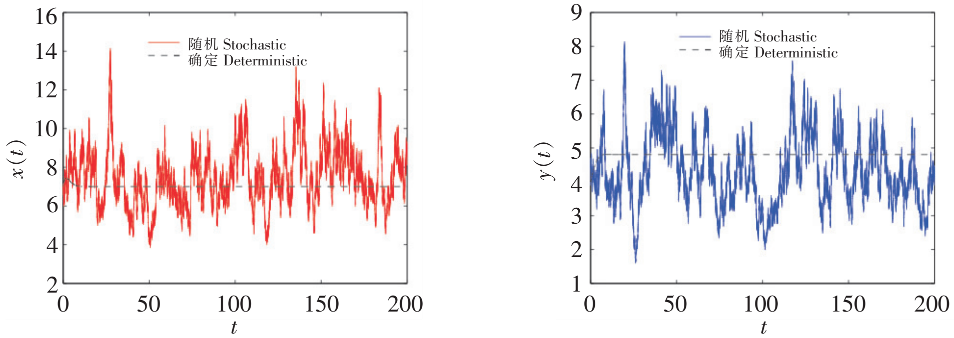
a）x　　b）y

图 2　系统(2)的频率直方图(σ_1=σ_2=0.02,f=0.1)

Fig.2　The frequency histogram of system (2)(σ_1=σ_2=0.02,f=0.1)

2）取 $\sigma_1 = 0.2$，$\sigma_2 = 0.2$，$f = 0.1$，通过计算可得：$b_1M_2^2/(4r_2(a_1 - fw)) + M_2(x^* + k_2) \approx 10.7847$，$r_2/b_1(a_1 - fw)[x^* + b_1M_2/(2r_2(a_1 - fw))]^2 \approx 15.6164$，$b_2(y^*)^2 \approx 11.5344$。参数的选择同样满足定理 7 和定理 9 的要求。从图 3 和图 4 可知系统（2）的解围绕其确定性方程的解在小邻域内波动，并且波动的范围比图 1 来的大。

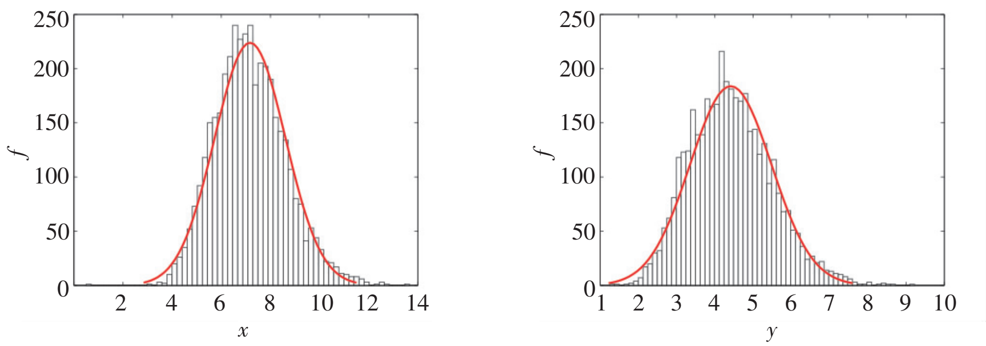
3）取 $\sigma_1 = 1.8$，$\sigma_2 = 0.2$，$f = 0.1$，显然满足定理 8 条件 ⅰ），即食饵灭绝，捕食者平均持续生存（见图 5）。从图 5 可知食饵 x 灭绝，捕食者 y 平均持续生存。



a）$x(t)$　　b）$y(t)$

图 3　系统(2)及其相对应确定系统的解($\sigma_1=\sigma_2=0.2, f=0.1$)

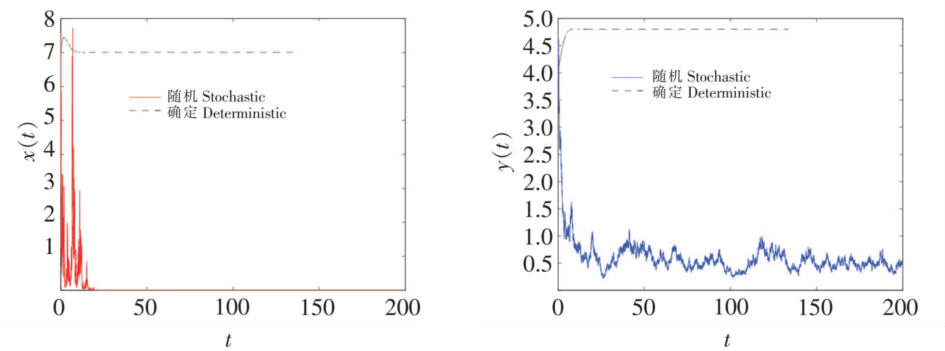
Fig.3　The solutions of stochastic system (2) and its corresponding deterministic system($\sigma_1=\sigma_2=0.2, f=0.1$)



a）x　　b）y

图 4　系统(2)的频率直方图($\sigma_1=\sigma_2=0.2, f=0.1$)

Fig.4　The frequency histogram of system (2)($\sigma_1=\sigma_2=0.2, f=0.1$)



a）$x(t)$　　b）$y(t)$

图 5　系统(2)及其相对应确定系统的解($\sigma_1=1.8, \sigma_2=0.2, f=0.1$)

Fig.5　The solutions of stochastic system (2) and its corresponding deterministic system($\sigma_1=1.8, \sigma_2=0.2, f=0.1$)

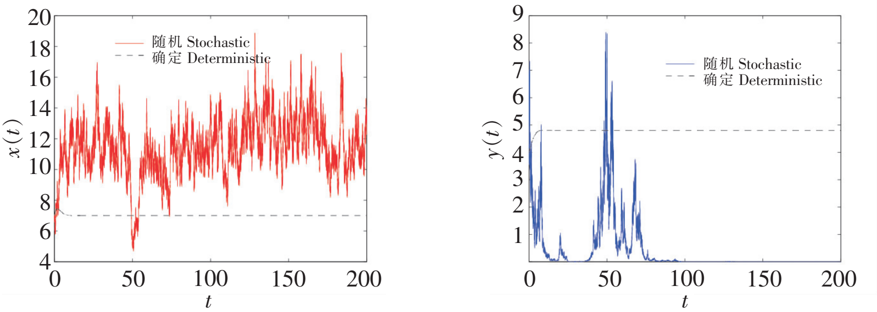
4）取 $\sigma_1 = 0.2$，$\sigma_2 = 0.8$，$f = 0.1$，显然满足定理 8 条件 ⅱ），即捕食者灭绝，食饵平均持续生存（见图 6）。从图 6 可知食饵 x 灭绝，捕食者 y 平均持续生存。

5）取 $\sigma_1 = 1.8$，$\sigma_2 = 0.8$，$f = 0.1$，显然满足定理 8 条件ⅲ），即食饵和捕食者均灭绝（见图 7）。从图 7 可知食饵 x 灭绝，捕食者 y 平均持续生存。

6）取 $\sigma_1 = 0.2$，$\sigma_2 = 0.2$，$f = 3$，通过计算可得 $a_1/(4w) \approx 0.041\,7 < f$，$2\sqrt{a_1 f/w} - a_1/w +$

$0.5\sigma_1^2 \approx 1.267\,5 > r$，显然满足定理 8 条件 ⅰ），即食饵灭绝，捕食者平均持续生存（见图 8）。

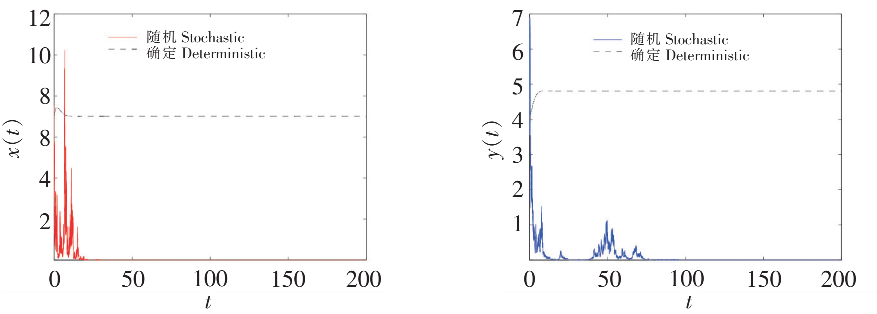
数值模拟结果显示，白噪声强度的大小和人类的捕捞活动都对物种的生存起着至关重要的作用，即过大的干扰会使物种灭绝，过度的捕获食饵，食饵也将灭绝。



a）$x(t)$　　b）$y(t)$

图 6　系统(2)及其相对应确定系统的解(σ_1=0.2，σ_2=0.8，f=0.1)

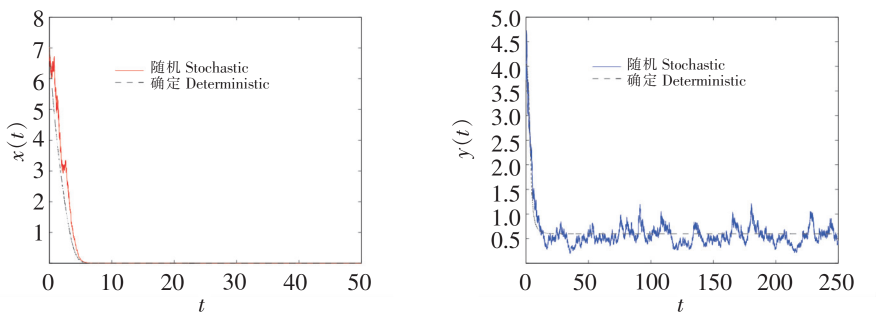
Fig.6　The solutions of stochastic system (2) and its corresponding deterministic system(σ_1=0.2，σ_2=0.8，f=0.1)



a）$x(t)$　　b）$y(t)$

图 7　系统(2)及其相对应确定系统的解(σ_1=1.8，σ_2=0.8，f=0.1)

Fig.7　The solutions of stochastic system (2) and its corresponding deterministic system(σ_1=1.8，σ_2=0.8，f=0.1)



a）$x(t)$　　b）$y(t)$

图 8　系统(2)及其相对应确定系统的解(σ_1=0.2，σ_2=0.2，f=3)

Fig.8　The solutions of stochastic system (2) and its corresponding deterministic system(σ_1=0.2，σ_2=0.2，f=3)

[参 考 文 献]

[1] HSU S B，HUANG T W. Global stability for a class of predator-prey systems [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics，1995，55(3)：763-783. DOI：10.1137/S0036139993253201.

[2] XU Y，LIU M，YANG Y. Analysis of a stochastic two-predators one-prey system with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes [J]. Journal of Applied Analysis & Computation，2017，7(2)：713-727. DOI：10.11948/2017045.

[3] AZIZ-ALAOUI M A，OKIYE M D. Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes [J]. Applied Mathematics Letters，2003，16(7)：1069-1075. DOI：10.1016/S0893-9659(03)00145-9.

[4] GUPTA R, CHANDRA P, BANERJEE M. Dynamical complexity of prey-predator model with nonlinear predator harvesting [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A, 2015, 20(2): 423-443. DOI:10.3934/d- cdsb.2015.20.423.

[5] LING L, WANG W M. Dynamics of a Ivlev-type predator-prey system with constant rate harvesting [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2009, 41(4): 2139-2153. DOI:10.1016/j.chaos.2008.08.024.

[6] ZHAO K, YE Y. Four positive periodic solutions to a periodic Lotka-Volterra predatory-prey system with harvesting terms [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2010, 11(4): 2448-2455. DOI:10.1016/j.nonrwa.2009.08.001.

[7] ZHANG Z, HOU Z. Existence of four positive periodic solutions for a ratio-dependent predator-prey sys- tem with multiple exploited (or harvesting) terms [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2010, 11(3): 1560-1571. DOI:10.1016/j.nonrwa.2009.03.001.

[8] WEI F Y. Existence of multiple positive periodic solutions to a periodic predator-prey system with harvesting terms and Holling III type functional response [J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2011, 16(4): 2130-2138. DOI:10.1016/j.cnsns.2010.08.028.

[9] LI Z H, ZHAO K H, LI Y K. Multiple positive periodic solutions for a non-autonomous stage-structured predatory-prey system with harvesting terms [J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2010, 15(8): 2140-2148. DOI:10.1016/j.cnsns.2009.08.019.

[10] HU D, ZHANG Z. Four positive periodic solutions to a Lotka-Volterra cooperative system with harvesting terms [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2010, 11(2): 1115-1121. DOI:10.1016/j.nonrwa.2009.02.002.

[11] LI W, WANG K. Optimal harvesting policy for stochastic Logistic population model [J]. Applied Mathematics & Computation, 2011, 218(1): 157-162. DOI:10.1016/j.amc.2011.05.079.

[12] LIU M, BAI C. Optimal harvesting policy of a stochastic food chain population model [J]. Applied Mathematics & Computation, 2014, 245(245): 265-270. DOI:10.1016/j.amc.2014.07.103.

[13] LIU M. Optimal harvesting policy of a stochastic predator-prey model with time delay [J]. Applied Mathematics Letters, 2015, 48(1): 102-108. DOI:10.1016/j.aml.2014.10.007.

[14] ZUO W J, JIANG D Q. Stationary distribution and periodic solution for stochastic predator-prey systems with nonlinear predator harvesting [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, 36: 65-80. DOI:10.1016/j.cnsns.2015.11.014.

[15] LIU M, BAI C. Analysis of a stochastic tri-trophic food-chain model with harvesting [J]. Journal of Mathematical Biology, 2016, 73(3): 597-625. DOI:10.1007/s00285-016-0970-z.

[16] LIU M, XIN H, YU J Y. Dynamics of a stochastic regime-switching predator-prey model with harvesting and distributed delays [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2018, 28: 87-104. DOI.10.1016/j.nahs.2017.10.004.

[17] GUO W J, CAI Y L, ZHANG Q M, et al. Stochastic persistence and stationary distribution in an SIS epidemic model with media coverage [J]. Physica A: Statistical Mechanics & Its Applications, 2018, 492: 2220-2236. DOI:10.1016/j.physa.2017.11.137.

[18] CAO B Q, SHAN M J, ZHANG Q M, et al. A stochastic SIS epidemic model with vaccination [J]. Physica A: Statistical Mechanics & Its Applications, 2017, 486: 127-143. DOI:10.1016/j.physa.2017.05.083.

[19] 王克. 随机生物数学模型 [M]. 北京：科学出版社，2010.

[20] 季春燕. 随机生物模型和传染病模型的渐近行为 [D]. 长春：东北师范大学，2011.

[21] LYU J, WANG K. Asymptotic properties of a stochastic predator-prey system with Holling II functional response [J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2011, 16(10): 4037-4048. DOI:10.1016/j.cnsns.2011.01.015.

[22] JI C Y, JIANG D Q, SHI N Z. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling- type II schemes with stochastic perturbation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 359(2): 482-498. DOI:10.1016/j.jmaa.2009.05.039.

[23] KHASMINSKII R. Stochastic stability of differential equations [M]. Berlin: Springer, 1980.

[24] KLOEDEN P E, PLATEN E. Numerical solution of stochastic differential equations [M]. Berlin: Springer, 1992.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）