

6种交叉操作两两搜索区域大小的定量分析

赵新超¹, 陈敏¹, 巩敦卫²

(1. 北京邮电大学理学院, 北京 100876; 2. 中国矿业大学信息与控制工程学院, 江苏 徐州 221116)

[摘要] 对6种实数编码交叉操作的两两探测区域进行了定量对比分析, 给出两两搜索区域大小比较的解析结果; 证明新的交叉操作与相应的原有交叉操作在保有收敛性的同时具有相对的广邻域性, 并从理论上分析了遗传算法具有保持群体多样性和较好算法性能的内在原因。

[关键词] 遗传算法; 交叉操作; 定量分析; 广邻域性

[中图分类号] TP 301.6

Quantitative Analysis of Regional Comparison of Six Kinds of Crossover Operations in Genetic Algorithm

ZHAO Xinchao¹, CHEN Min¹, GONG Dunwei²

(1. School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China;

2. School of Information and Control Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: The searching region size comparison on six kinds of crossover operations was quantitatively analyzed. The analytic results on the quantitative comparison indicated that the latter crossover operation in each pair had a relatively wide neighborhood than the corresponding original operation. It presented the inherent possible reasons theoretically for maintaining better population diversity and excellent algorithmic performance.

Keywords: genetic algorithm; crossover operation; quantitative analysis; wide neighborhood

0 引言

遗传算法是由 Holland^[1] 于 1975 年提出, 它是一类借鉴生物界自然选择和适者生存机制的随机搜索算法^[2-4]。遗传算法在迭代过程中保留一组候选解, 利用交叉、变异等遗传操作产生新的候选解群体, 按照适应值指标从解群体中选择较优个体进入下一代, 重复此过程, 直到满足某种收敛指标。遗传算子仅仅利用适应值作为度量指标进行随机操作, 降低了一般优化算法在搜索过程中对问题信息和人机交互的依赖^[5]。与传统的优化算法^[6]相比, 遗传算法的主要特征在于不依赖于问题的梯度信息与群体搜索策略, 群体搜索使得遗传算法得以突破邻域搜索^[7]的限制, 可以实现整个解空间上的分布式信息采集和探索。

在遗传算法中, 交叉算子通过模拟自然界生物的杂交过程对个体进行交叉操作, 不断产生新个体, 增加种群的多样性, 扩大寻优范围, 从而使得遗传算法具有较强的全局搜索能力。因此, 交叉算子在遗传算法扩展求解空间和搜索全局最优解的过程中发挥着重要作用^[8]。对实数编码的交叉策略^[9], 两个父体经交叉操作后得到的子个体往往限定于两父体围成的某个区域, 使整个群体搜索范

[收稿日期] 2018-03-20

[修回日期] 2018-06-06

[基金项目] 国家自然科学基金项目(71772060, 61375066)

[作者简介] 赵新超(1976—), 男, 教授, 博士, 博导, 从事群体智能、运筹优化及其相关应用研究。E-mail: zhaoxc@bupt.edu.cn

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

围和路径探测受到了一定的限制,并有早熟收敛于局部邻域的可能。子个体若要跳出父体围成的区域,一般只能借助于变异操作,但若单纯地加大变异概率或增大搜索步长,遗传算法就有退化成一般随机搜索算法的趋势^[10-11]。针对这一不足,文献[12]提出了几种新的交叉算子,对传统的交叉操作进行了相应的改进,使得子代个体始终有跳出父体所围成区域的可能,一定程度上扩大了遗传算法交叉算子的搜索区域,使算法始终保持探测新区域的可能。但是,该文献只是给出每组交叉操作搜索区域大小比较的定性结果,并没有任何定量的理论分析和数据支撑。本文对文献[12]中6种实数编码的交叉操作的相对搜索区域和潜在的覆盖范围进行了定量分析和理论探讨,为交叉算子和遗传算法的算法设计^[13]以及问题求解提供了理论支持。

1 6种实数编码的交叉操作

序列投影寻踪是揭示隐藏在高维数据中有趣结构的有用工具^[12],并有序地构造了低维空间的基底。遗传算法是发现这些基底的有力工具,但是它的表现取决于对遗传算法交叉操作的选择。Espezuza等^[12]对8种交叉操作进行了介绍和比较分析,多组测试结果表明,新提出的超圆锥交叉操作在寻找适应度最高的投影方面表现最好。

下面对其中的6种(3组)实数编码的交叉操作进行介绍,详细的操作参见文献[12]。下面都假定 a_1 与 a_2 是两父代个体, b_1 与 b_2 是两个子代个体。

1.1 算术内部交叉(交叉1)

算术交叉操作产生子代的过程如下:

$$b_1 = \text{Normalize}(ra_1 + (1-r)a_2), b_2 = \text{Normalize}((1-r)a_1 + ra_2), \quad (1)$$

其中: r 是区间 $[0,0.5]$ 上均匀产生的一个随机数;函数 $\text{Normalize}(x)$ 产生 x 方向的一个单位向量,即 $\text{Normalize}(x) = x/\sqrt{x^T \cdot x}$ 。该操作的特点是子代向量包含在两个父代向量形成的扇形区域内部,并对称地分布在两父代个体等分线的两侧,即子代个体的探测范围受到父代的限制。该操作的探测范围和新解生成过程如图1a所示,其中 θ 是父代个体 a_1 或 a_2 与两父代向量的对称轴 m 的夹角, θ_{b1}, θ_{b2} 是子代 b_1 和 b_2 与对称轴的夹角, $\text{urand}[a,b]$ 是均匀分布在区间 $[a,b]$ 的一个随机数。

1.2 算术内外交叉(交叉2)

该算子是对交叉操作1的拓展,子代产生方式同交叉操作1,唯一的区别是随机数 r 的产生范围由 $[0,0.5]$ 变成 $[-0.5,0.5]$ 。因此,子代向量有较大可能位于父代向量围成的扇形区域之外,并依然对称地分布在父代等分线的两侧,操作如图1b所示。相比于交叉操作1,交叉操作2的子代可以产生在由父代个体向量形成的扇形区域之外,在这个扩展的扇形区域中,子代和对称轴形成的最大角为 2θ , θ 是父代个体和对称轴之间的夹角,该操作的探测范围和新解的生成过程如图1b所示。

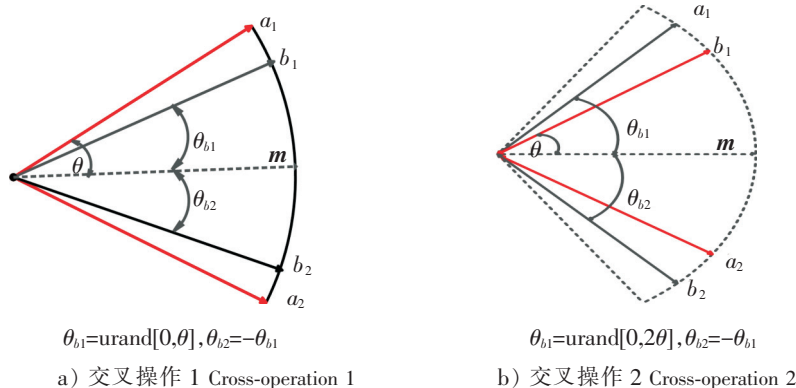


图1 交叉操作1和交叉操作2探测区域示意图

Fig.1 Cross-operation 1 and cross-operation 2 detection area diagram

1.3 内部超圆锥交叉 (交叉 5)

该算子的特点是允许子代个体位于父代个体所在平面的外部, 因为两父代个体围绕等分线旋转, 并且关于等分线对称, 所以子代个体可以位于由父代个体所围成的超圆锥体内部, 图 2a 示意了这种交叉操作的探测范围和新解生成过程。首先, 构建向量 a_1, a_2 的等分线 m , 即 $a_1 + a_2$ 的标准单位化向量, 选出包含等分线 m 的交叉平面, 使得平面的一条基底坐标轴与等分线重合, 另一个垂直于 m 的基向量 v 构建过程如下: 选出向量 m 的一个非零分量 m_j 和另一个位置 $l \neq j$, 令 $v_i = 0 (i \neq j, l), v_l = 1, v_j = -m_l/m_j$ 。因此交叉平面的基底是 $Q = [m, v]$ 。在该平面中, 等分线在横坐标轴上, 两父代个体的角度是 $-\theta$ 和 θ 。在平面的极坐标下子代 b_1^Q 被选择为 $e^{i\theta_r}$, θ_r 是位于 $[0, \theta]$ 之间的任一角度。子代 b_1^Q 和 b_2^Q 关于中心线 m 对称, 因此 $b_2^Q = e^{-i\theta_r}$, 子代个体在原空间用基底表示为 $b_i = Q \cdot b_i^Q, i = 1, 2$ 。在这种交叉操作方案中, 最多有 $p(p-1)$ 种杂交操作可能发生的不同平面 (其中 p 为问题解空间的维数), 但所有交叉操作发生的不同平面都相交于父代个体的夹角等分线上。

1.4 内外超圆锥交叉 (交叉 6)

该交叉操作是交叉操作 5 的扩展, 产生子代的步骤类似于交叉 5, 唯一的区别是此时 $\theta_r \in [0, 2\theta]$ 。对比于交叉操作 5, 通过父代个体围绕等分线进行旋转产生的子代可以在超圆锥体的外部, 因此, 子代个体产生了相对更广泛的超圆锥搜索邻域。

交叉操作 5 和交叉操作 6 的邻域探测范围和子代产生的过程如图 2a 和图 2b 所示, θ 是父代向量 a_1 或 a_2 与其夹角平分线 m 的夹角, θ_{b1}, θ_{b2} 是子代个体 b_1 和 b_2 与对称轴的夹角, $\text{urand}[a, b]$ 是均匀分布在区间 $[a, b]$ 的一个随机数。

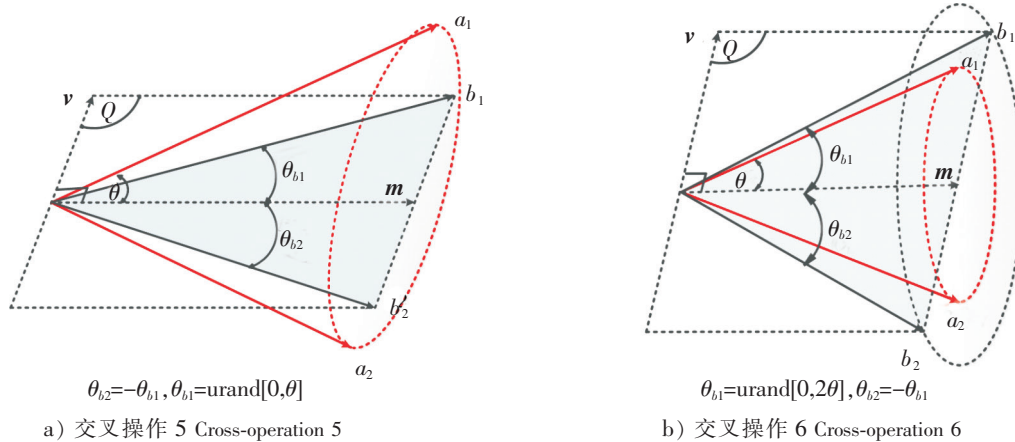


图 2 交叉操作 5 和交叉操作 6 探测区域示意图

Fig.2 Cross-operation 5 and cross-operation 6 detection area diagram

1.5 适应度偏向的内部交叉 (交叉 7)

交叉操作 7、交叉操作 8 与交叉操作 1、交叉操作 2 类似, 交叉操作产生的子代个体依然位于父代个体所在的平面, 区别在于它们的子代不再关于父代的夹角平分线对称, 而是为了通过父代个体的适应度偏向来引导产生子代个体。定义 a_{best} 表示两个父代个体中具有较优适应度的个体, a_{worst} 表示较差适应度的父代个体, 平面的基向量 $Q = [m, v]$, 其中平面基向量的选取准则是具有更优适应度的父代相对于横坐标形成负角度。 m 是父代向量夹角平分线, v 是 $(a_{\text{worst}} - (a_{\text{worst}} \cdot m)m)$ 的标准化向量。图 3a 中, 夹角平分线取作横坐标轴, 较优父代个体与横坐标轴夹角为 $-\theta$, 较差父代个体与横坐标轴夹角为 θ 。为了产生更偏向于较优父代个体的子代 $b_i (i = 1, 2)$, 首先产生均匀随机角 $\theta_i \in [-\theta, \theta]$, 然后对该均匀随机的角度 θ 做非均匀变换, 且更倾向于 $-\theta$, 偏向角 $\theta_{bi}^{(\text{biased})}$ 的生成表达式如下:

$$\theta_{bi}^{(\text{biased})} = 2\theta((\theta_i + \theta)/2\theta)^\beta - \theta, \quad (2)$$

参数 $\beta > 1$ 用以控制方程的非均匀度, 算法设计中 $\beta = (\text{fitness}(a_{\text{best}})/\text{fitness}(a_{\text{worst}}))^4$ 。由式 (2),

子代的夹角 $\theta_{bi}^{(biased)}$ 位于 $[-\theta, \theta]$, 但更偏向于 $-\theta$, 然后类似交叉操作 5 产生子代个体。

1.6 适应度偏向的内外交叉 (交叉 8)

该算子和交叉 7 相似, 是交叉操作 7 的扩展, 图 3b 示意了交叉操作范围和子代生成过程, 唯一的区别是 $\theta_i \in [-2\theta, 2\theta]$, 因而由公式 (2) 计算的 $\theta_{bi}^{(biased)}$ 也不同, 因此子代向量包含在父代个体形成的平面内, 但落在扇形区域两边的子代更加靠近较优父体。

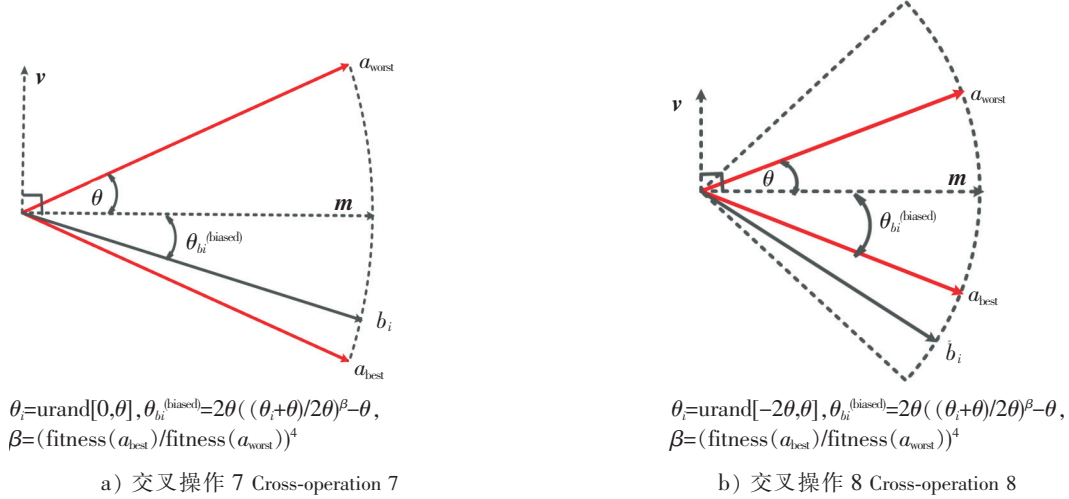


图 3 交叉操作 7 和交叉操作 8 探测区域示意图

Fig.3 Cross-operation 7 and cross-operation 8 detection area diagram

2 3 对交叉操作搜索区域对比的定量分析

2.1 交叉操作 1 和交叉操作 2

由于交叉操作 1 和交叉操作 2 中子代产生的范围由父代个体形成的扇形区域所界定, 又因为扇形面积公式为 $S = \alpha r^2/2$, 其中 r 为扇形半径, α 为扇形圆心角, 并且由相同的两个个体在交叉操作 1 和交叉操作 2 中所围成扇形的半径相同, 而交叉操作 2 产生的子代个体探测扇形区域的圆心角是交叉操作 1 产生子代的 2 倍, 所以子代个体搜索区域的面积也是交叉操作 1 中的两倍, 即交叉操作 2 产生子代的搜索探测范围较交叉操作 1 更广泛, 子代样本能保持较好的探测空间多样性, 尤其是算法搜索的后期, 更有利于保持群体多样性, 从而更有可能跳出当前邻域, 更好地寻求全局最优解。

2.2 交叉操作 5 和交叉操作 6

由于交叉操作 5 和交叉操作 6 产生的子代覆盖区域是其两父代个体绕其中心线旋转形成的圆锥和圆锥所对应的球冠内部, 即为圆锥体顶角所对应的包含于球体内部的那一部分球体体积, 所以两种交叉操作对应的搜索区域之比就是它们子代个体所可能张成的圆锥和球冠的体积之比。如图 4 所示, 其中蓝色阴影部分代表交叉操作 5 产生子代个体所可能覆盖的区域体积 V_5 , 蓝色和红色阴影部分之和代表交叉操作 6 产生子代个体所可能覆盖的区域 V_6 。

因为球的体积公式为 $V = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\pi d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = 4\pi R^3/3$, 其中 R 为球的半径, 所以交叉操作 5 中搜索区域的体积 $V_5 = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^\theta d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = 2\pi R^3 (1 - \cos \theta)/3$; 交

叉操作 6 中搜索区域的体积 $V_6 = \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{2\theta} d\varphi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr = 2\pi R^3 (1 - \cos 2\theta)/3$, 因而 $V_6/V_5 = (1 - \cos 2\theta)/(1 - \cos \theta) =$

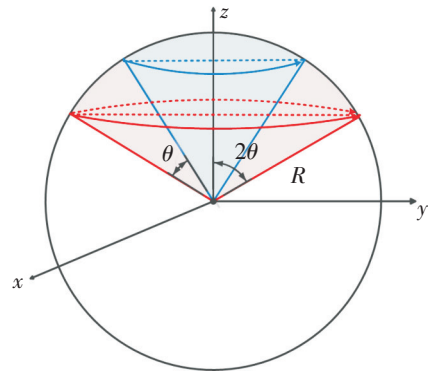


图 4 交叉操作 5 与交叉操作 6 探测区域示意图

Fig.4 Cross-operation 5 and cross-operation 6 detection area diagram

$2(1 - \cos^2 \theta)/(1 - \cos \theta) = 2(1 + \cos \theta)$ 。又由于 2θ 是交叉操作 6 中子代个体与两父代个体夹角平分线向量的最大夹角, 所以 $2\theta \in [0, \pi/2]$, 从而 $\theta \in [0, \pi/4]$, 因而 $V_6/V_5 \in [2 + \sqrt{2}, 4] \approx [3.414, 4]$ 。即当子代个体与父代向量平分线夹角扩大到 2 倍时, 其探测区域随之扩大约 3.4 ~ 4 倍, 即由交叉操作 6 产生的子代个体能够覆盖更大的探测范围, 因而具有相对的宽邻域属性, 从而使种群在算法探测到的潜力解邻域具有更加多样性的分布, 尤其是算法搜索后期依然可以保持较好的种群多样性和宽邻域属性, 从而使得算法始终具有跳出当前局部邻域的可能, 因而有可能保持更好的算法性能。

2.3 交叉操作 7 和交叉操作 8

由于交叉操作 7、交叉操作 8 与交叉操作 1、交叉操作 2 类似, 区别在于交叉操作 1 和交叉操作 2 是在可能的探测范围内均匀地产生子代, 而交叉操作 7 和交叉操作 8 是以依赖于个体适应值的非均匀方式产生子代个体, 因此若只是考虑探测范围的区别, 这两组操作有相同的探测范围的对比分析, 因而仅仅考虑探测范围显示不出交叉操作 7、交叉操作 8 与交叉操作 1 交叉操作 2 的区别。根据交叉操作 7 和交叉操作 8 的特点分析可知, 这组交叉操作的更重要特征是子代个体在允许的探测范围上的非均匀分布。由于较优父代个体与中心线夹角为负, 因此该组交叉操作对比的重点在于考察操作 8 产生的子代个体是否有更趋向于较优父代个体邻域的趋势, 如果有该趋势, 可否分析出这种趋于较优个体趋势的大小。

本文首先证明交叉 7 中 $\theta_{bi}^{(biased)}$ 更偏向于 $-\theta$, 证明过程如下。

由于 $\beta = (\text{fitness}(a_{\text{best}})/\text{fitness}(a_{\text{worst}}))^4$, 且 $\text{fitness}(a_{\text{best}}) > \text{fitness}(a_{\text{worst}})$, 可知 $\beta > 1$ 。由于 $\theta_i \in [-\theta, \theta]$ 和 $\theta_{bi}^{(biased)} = 2\theta((\theta_i + \theta)/2\theta)^\beta - \theta$, 可知 $\theta_{bi}^{(biased)} \in [-\theta, \theta]$ 。当 $\theta_i < \theta$, 即 $\theta_i \in [-\theta, \theta)$ 时, 令 $a = (\theta_i + \theta)/(2\theta)$, 有 $a \in [0, 1)$, 又因为 $\beta > 1$, 所以 $a^\beta < 1$, 且数值 a^β 是参数 β 的单调减函数, 即选定的两个父代个体优劣差异越大, 数值 a^β 越小, 因此其产生的子代个体越靠近较优个体, $\theta_{bi}^{(biased)}$ 更加远离 θ 而偏向于 $-\theta$ 。

进一步假设 $\theta_i \in [-\theta, 0]$, 则有 $a \in [0, 1/2]$, 又因为 $\beta > 1$, 所以 $a^\beta \in [0, 1/2)$, 从而 $\theta_{bi}^{(biased)} \in [-\theta, 0)$, 并且 β 值越大, 区间右端点的值越小, 所以 $\theta_{bi}^{(biased)}$ 更偏向于 $-\theta$, 即更偏向于较优解。

举例说明。当 $\beta = 2$ 时, $a^2 \in [0, 1/4]$, $\theta_{bi}^{(biased)} \in [-\theta, -\theta/2]$; 当 $\beta = 4$ 时, $a^4 \in [0, 1/16]$, $\theta_{bi}^{(biased)} \in [-\theta, -7\theta/8]$ 。当 $\beta = 2, 3, 4, 5, 6$ 时, $\theta_{bi}^{(biased)}$ 的取值范围分别为 $[-1, -1/2]$, $[-1, -3/4]$, $[-1, -7/8]$, $[-1, -15/16]$, $[-1, -31/32]$ 。可以看出, β 值越大, $\theta_{bi}^{(biased)}$ 的取值范围更偏向于 $-\theta$, 即更偏向于较优解, 从而保证算法具有适应值引导的自适应搜索属性, 因而保证算法具有较好的搜索特性。

交叉操作 8 对 $\theta_{bi}^{(biased)}$ 的分析类似于交叉 7。对交叉操作 8, $\theta_i \in [-2\theta, 2\theta]$, 因此 $a = (\theta_i + \theta)/(2\theta) \in [-1/2, 3/2]$, 进一步令 $\theta_i \in [-2\theta, 0]$, 即 $x \in [-1/2, 1/2]$ 。当 $\beta = 2, 3, 4, 5, 6$ 时, $\theta_{bi}^{(biased)}$ 的取值范围分别为 $[-1, -1/2]$, $[-5/4, -3/4]$, $[-1, -7/8]$, $[-17/16, -15/16]$, $[-1, -31/32]$ 。可以看出, β 值越大, $\theta_{bi}^{(biased)}$ 的取值范围更偏向于 $-\theta$, 即更偏向于较优解, 从而保证算法具有适应值引导的自适应搜索属性, 因而保证算法具有较好的搜索特性, 并且搜索区域会超越父代个体围成的区域。 $\theta_{bi}^{(biased)} = 2\theta((\theta_i + \theta)/2\theta)^\beta - \theta$ 。

由公式 $\theta_{bi}^{(biased)} = (2a^\beta - 1)\theta$ 以及 $\theta_i \in [-2\theta, 2\theta]$ 可知, $\theta_{bi}^{(biased)} \in [-2\theta, 2\theta]$, 所以交叉操作 8 中子代个体的产生范围是交叉操作 7 的 2 倍。又因为交叉操作 8 中两父代个体与角中心线的夹角分别是 $\pm \theta$, 所以 $\theta_{bi}^{(biased)}$ 的探测角度范围会超越两父代个体所张成的扇形区域边界。因此, 从总体上看, 首先, 扩展的交叉操作 8 相对于原操作 7 又一次体现了保持群体多样性的内在机制和搜索的宽邻域特性; 其次, 类似于交叉操作 7 中分析的 $\theta_{bi}^{(biased)}$ 相对于 θ_i 在区间分布上的非均匀性, 使得交叉操作 8 产生的子代个体有更大概率分布于较优个体的局部邻域, 且可能会突破父代个体自身的边界限制。因此, 操作 8 不仅拥有更大概率探测较优解邻域的收敛特性, 而且拥有跳出当前邻域的勘探特征。

通过以上对遗传算法中的 6 种交叉操作的两两定量对比分析,给出了两两搜索区域和覆盖范围大小比较的解析结果,证明了新的交叉操作比相应的原有操作具有相对的广邻域性,从而对新的交叉操作具有相对的优异性能给出可靠的理论分析基础。不仅加深了对遗传算法的执行机理的理解,还在一定程度上给遗传算法概率型搜索的黑箱搜索机制提供了理论支持。

3 结论

对文献 [12] 中 6 种 (3 组) 实数编码的交叉算子的探测区域进行了定量对比分析。通过对每一对交叉算子所可能的搜索区域和覆盖范围进行理论上的对比分析发现,每一对交叉算子中的后者对应的搜索区域都比前者更加广泛,即后者的交叉操作有效扩大了种群多样性和寻优范围,体现了扩展的交叉操作具有内在的群体多样性保持机制和搜索的宽邻域特性,从而使得遗传算法具有更加平衡的搜索能力,有效减少了交叉操作在求解过程中陷入局部最优解的概率,而这种性能对群体优化算法具有重要影响,尤其是算法搜索后期。综合本文对不同组交叉操作探测范围的理论对比分析和文献 [12] 中对不同交叉操作的实验对比分析,证明了本文中对 6 种 (3 组) 交叉操作两两作对比分析的正确性和必要性,从而为遗传算法搜索性能的差异表现提供了理论上的支持。

[参 考 文 献]

- [1] HOLLAND J H. Adaptation in natural and artificial systems [M]. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.
- [2] PEDDAPATI S, KRUTHIVENTI K K P. A new random search algorithm: multiple solution vector approach [C] // IEEE. International Conference on Advanced Computing. Bhimavaram: IEEE computer society, 2016: 187-190.
- [3] KAMBOJ V K, BATH S K, DHILLON J S. Implementation of hybrid harmony search/random search algorithm for single area unit commitment problem [J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2016, 77: 228-249. DOI:10.1016/j.ijepes.2015.11.045.
- [4] WOSNIACK M E, RAPOSO E P, VISWANATHAN G M, et al. A parallel algorithm for random searches [J]. Computer Physics Communications, 2015, 196: 390-397. DOI:10.1016/j.cpc.2015.07.014.
- [5] MAGDY S, YOUSSEF S, FATHY C. Human arm-leg smart gesture-based control in human computer interaction applications [C] // HASSANIEN A, SHAALAN K, GABER T, et al. International Conference on Advanced Intelligent Systems and Informatics. Cham: Springer, 2017: 632-641. DOI:10.1007/978-3-319-64861-3_59.
- [6] 闫永明, 张斌, 郭军, 等. 基于强化学习的 SBS 云应用自适应性能优化方法 [J]. 计算机学报, 2017, 40(2): 464-480.
- [7] MLADENOVIC N, TODOSIJEVIC R, UROSEVIC D. Less is more: basic variable neighborhood search for minimum differential dispersion problem [J]. Information Sciences, 2016, 326: 160-171.
- [8] BŁAŻEJ P, WNETRZAK M, MACKIEWICZ P. The role of crossover operator in evolutionary-based approach to the problem of genetic code optimization [J]. Biosystems, 2016, 150: 61-72. DOI:10.1016/j.biosystems.2016.08.008.
- [9] TALBI H, DRAA A. A new real-coded quantum-inspired evolutionary algorithm for continuous optimization [J]. Applied Soft Computing, 2017, 61: 765-791. DOI:10.1016/j.asoc.2017.07.046.
- [10] 赵新超. 基于非均匀变异的进化算法对高维多峰函数的收敛性分析 [J]. 系统科学与数学, 2010, 30(2): 218-224.
- [11] 赵新超, 刘国莅, 刘虎球, 等. 基于非均匀变异和多阶段扰动的粒子群优化算法 [J]. 计算机学报, 2014, 37(9): 2058-2070.
- [12] ESPEZUA S, VILLANUEVA E, MACIEL C D. Towards an efficient genetic algorithm optimizer for sequential projection pursuit [J]. Neurocomputing, 2014, 123: 40-48. DOI:10.1016/j.neucom.2012.09.045.
- [13] RODRIGUEZMARTINEZ E, MU T, GOULERMAS J Y. Sequential projection pursuit with kernel matrix update and symbolic model selection [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 44(12): 2458-2469. DOI:10.1109/TCYB.2014.2308908.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)