

具有心理效应的随机扰动捕食-食饵模型

陈哲文, 魏春金, 张树文

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 考虑了具有心理效应的随机扰动捕食-食饵模型。通过构造 Lyapunov 函数证明系统的全局正解的存在唯一性, 并且给出了系统平均持续生存和灭绝的充分条件。最后, 通过数值模拟来证实理论结果。

[关键词] 捕食-食饵系统; Lyapunov 函数; 平均持续生存; 灭绝; 随机扰动; 心理效应

[中图分类号] O 211.63

Analysis of a Predator-Prey Model with Random Perturbations and Psychological Effects

CHEN Zhewen, WEI Chunjin, ZHANG Shuwen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, a predator-prey model with random perturbations and psychological effects was considered. It was shown that there exists a unique positive solution of the system by constructing Lyapunov functions. Sufficient conditions of the system to be extinct and persistent in mean were also established. Finally, numerical simulations were given to illustrate the theoretical results.

Keywords: predator-prey system; Lyapunov functions; persistent in mean; extinct; random perturbation; psychological effect

0 引言

捕食-食饵模型一直是生态学和生物数学的重要研究内容, 有很多文献研究了该模型, 并获得了很好的研究成果^[1-4]。众所周知, 心理效应^[4-6]也会对种群的持久和灭绝造成一定影响。当捕食者在某一区域聚集过多时, 就会给食饵带来一定的心理影响, 导致其不太愿意在该区域出现。由此, 提出了以下模型

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)[r_1 - a_1x(t) - b_1y(t)/f(y(t))]dt, \\ dy(t) = y(t)[r_2 - b_2y(t)/x(t)]dt. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$, $y(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时刻的种群密度; 模型的所有参数都是正的; r_1 , r_2 分别表示食饵和捕食者的内禀增长率; a_1 表示食饵种群的密度制约系数; b_1 是捕食者对食饵的捕获率; b_2 与 b_1 有相似的意义; $y(t)/f(y(t))$ 可以用来描述“心理效应”^[5], 其中, $y(t)/f(y(t))$ 满足以下 2 个条件: 1) $y(t)/f(y(t)) > 0$; 2) $y(t)/f(y(t))$ 在 $(0, \xi)$ 单调递增, 在 $[\xi, +\infty)$ 单调递减。

[收稿日期] 2018-07-16

[基金项目] 福建省自然科学基金项目 (2018J01418, 2016J05012, 2016J01667)

[作者简介] 陈哲文 (1995—), 男, 硕士生, 从事生物数学方向研究。通信作者: 魏春金 (1973—), 女, 教授, 硕导, 从事生物数学方向研究。E-mail: chunjinwei92@163.com

食饵 $x(t)$ 会随着 $y(t)/f(y(t))$ 的增加而减少。 $y(t)/[ax(t)]$ 是 Leslie-Gower 项, Aziz^[3] 指出, 它是衡量捕食者 $y(t)$ 随着它最喜欢的食饵 $x(t)$ 的稀缺而减少。在食饵 $x(t)$ 严重稀缺的情况下, 捕食者 $y(t)$ 有其他替代的食物来源, 但它的增长仍将受到其最喜爱的食物 $x(t)$ 数量不足的限制。这种情况可以通过在分母上加上一个正常数 k_2 来处理。因此, 式 (1) 的方程变为 $dy(t) = [(r_2 - b_2y(t))/(x(t) + k_2)]y(t)dt$ 。此外, 在现实生态系统中, 各种形式的环境干扰都是无时不在、无处不在的, 种群的增长率经常受到随机波动的影响。一般来说, 环境中的随机波动可以用白噪声来描述^[7]。于是, 得到了下述模型:

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)[r_1 - a_1x(t) - b_1y(t)/f(y(t))]dt + \sigma_1x(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)[r_2 - b_2y(t)/(k_2 + x(t))]dt + \sigma_2y(t)dB_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\sigma_i^2 (i = 1, 2)$ 表示白噪声强度; $B_1(t), B_2(t)$ 是互相独立的标准的布朗运动, 定义在带有滤子 \mathcal{F}_t 并且满足通常条件 (即 $\{\mathcal{F}_t\}_{t_0}$ 是右连续单调递增, 且 \mathcal{F}_0 包含所有零测集) 的完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上。

1 预备知识

为方便起见, 给出以下记号: $\mathbf{R}_+^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n | a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$, $|X(t)| =$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

a. s. : = 几乎处处, $\text{tr } A$ (A 是矩阵): = 矩阵 A 的秩。

设 $B(t) = (B_1(t), \dots, B_m(t))$ 是定义在上述概率空间上 m 维标准布朗运动。设 $0 \leq t_0 \leq T < \infty$, X_0 是 \mathcal{F}_{t_0} 可测的 \mathbf{R}^d 值的随机变量, 且 $E[X_0^2] < \infty$ 。设 $f: \mathbf{R}^d \times [t_0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ 和 $g: \mathbf{R}^d \times [t_0, T] \rightarrow \mathbf{R}^{d \times m}$ 都是 Borel 可测函数。

初值为 $X(t_0) = X_0$ 的 d 维随机微分方程

$$dX(t) = f(X(t), t)dt + g(X(t), t)dB(t), t_0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

设 $X(t) (t \geq 0)$ 是方程 (3) 的解, $V \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, 则 $V(X(t), t)$ 仍是 Itô 过程, 具有随机微分 $dV(X(t), t) = (V_t(X(t), t) + V_x(X(t), t)f(t) + 1/2 \text{tr}[g^T(t)V_{xx}(X(t), t)g(t)])dt + V_x(X(t), t)g(t)dB(t)$, a. s., 称此式为 Itô 公式^[8]。

定义 1^[9] 1) 若满足 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x(s)ds/t > 0$, 则称种群 $x(t)$ 是平均持续生存的; 2) 若满足 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 则称种群 $x(t)$ 是灭绝的。

引理 1^[4] (存在唯一性定理) 假设 $f(x(t), t), g(x(t), t)$ 关于 $x(t)$ 满足以下条件: i) 局部 Lipschitz 条件, 存在 $c_k > 0 (k = 1, 2, \dots)$, 使得对 $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$ 且 $|x| \vee |y| \leq k$, 有不等式 $|f(x, t) - f(y, t)| \vee |g(x, t) - g(y, t)| \leq c_k |x - y|$ 成立; ii) 线性增长条件, 存在 $c > 0$, 使得 $|f(x, t)| \vee |g(x, t)| \leq c(1 + |x|)$, $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$, 则初始条件为 $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$ 的系统 (3) 存在唯一连续的局部解 $x(t), t \in [0, \tau_e)$, 其中 τ_e 是爆破时。

引理 2^[10] 考虑下列随机微分方程

$$dX(t) = X(t)[r_1 - a_1X(t)]dt + \sigma X(t)dB(t), \quad (4)$$

其中: r_1, a_1, σ 都是正常数; $B(t)$ 是标准的布朗运动; $X(t) \in C(\Omega \times [0, +\infty), \mathbf{R}_+)$ 。存在正常数 t_0, β 和 β_0 , 使得对所有的 $t \geq t_0$, i) 若 $\ln X(t) \leq \beta t - \beta_0 \int_0^t X(s)ds + \sigma_i B_i(t)$, 那么 $\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t X(s)ds \leq \beta/\beta_0$, a. s.; ii) 若 $\ln X(t) \geq \beta t - \beta_0 \int_0^t X(s)ds + \sigma_i B_i(t)$, 那么 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t X(s)ds \geq \beta/\beta_0$, a. s.。

2 主要结果

定理1 对任意给定的初值 $X(0) = (x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$, 系统 (2) 存在唯一解 $X(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$, 并且以概率1存在于 \mathbf{R}_+^2 中。

证明 令 $u(t) = \ln x(t)$, $v(t) = \ln y(t)$ 。由 Itô 公式可得

$$\begin{cases} du(t) = [r_1 - a_1 e^{u(t)} - b_1 e^{v(t)}/f(e^{v(t)}) - \sigma_1^2/2]dt + \sigma_1 dB_1(t), \\ dv(t) = [r_2 - b_2 e^{v(t)}/(k_2 + e^{u(t)}) - \sigma_2^2/2]dt + \sigma_2 dB_2(t). \end{cases} \quad (5)$$

显然, 系统 (5) 满足线性增长条件和局部 Lipschitz 条件。根据引理1, 系统 (5) 存在唯一的局部解 $(u(t), v(t)) (t \in [0, \tau_e))$ 。其中 τ_e 是爆破时间, 即 $(x(t), y(t)) = (e^{u(t)}, e^{v(t)})$ 是系统 (5) 满足初值 $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$ 的唯一解。为了证明这个解是全局的, 只需证明 $\tau_e = +\infty$ 。

令 $n_0 > 0$ 足够大, 使得 $(x(t), y(t)) \in [1/n_0, n_0] \times [1/n_0, n_0]$, 对于任意的正数 $n \geq n_0$, 定义一个停时序列 $\tau_n = \inf\{t \in [0, \tau_e) : x(t) \notin (1/n, n) \text{ 或 } y(t) \notin (1/n, n)\}$, 定义 $\inf \Phi = +\infty$ (Φ 代表一个空集)。显然, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, τ_n 是单调递增的, 且 $\tau_n < \tau_e$, 所以有 $\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$, 其中 $\tau_\infty \leq \tau_e$, a.s., 则只需证明 $\tau_\infty = \infty$, a.s.。假设 $\tau_\infty \neq \infty$, 那么存在常数 $T \geq 0, \varepsilon \in (0, 1)$ 和整数 $n_1 \geq n_0$, 使得 $P(\tau_n \leq T) \geq \varepsilon, \forall n \geq n_1$ 。

定义一个 C^2 -函数 $V: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $V(x(t), y(t)) = x(t) - \ln x(t) - 1 - \ln y(t) + (k_2 + x(t))y(t) - (1 + \ln k_2)$ 。由 Itô 公式可得,

$$dV(x(t), y(t)) = LV dt + (x - 1 + xy)\sigma_1 dB_1 + (xy - 1 + k_2 y)\sigma_2 dB_2,$$

$LV(x(t), y(t)) = x(t)(1 - 1/x(t) + y(t))(r_1 - a_1 - b_1 y(t)/f(y(t))) + y(t)(k_2 + x(t) - 1/y(t))(r_2 - b_2 y(t)/(k_2 + x(t))) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2 \leq -b_2 y(t)^2 - a_1 x(t)^2 y(t) + (r_1 + r_2)x(t)y(t) + k_2 r_2 y(t) + b_2 y/k_2 - a_1 x(t)^2 + (r_1 + a_1)x(t) - r_1 - r_2 + b_1 \xi/f(\xi) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2 = -b_2 y(t)^2 + [-a_1 x(t)^2 + (r_1 + r_2)x(t)]y(t) + r_2 k_2 y(t) + b_2 y(t)/k_2 - a_1 x(t)^2 + (a_1 + r_1)x(t) - r_1 - r_2 + b_1 \xi/f(\xi) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2 \leq -b_2 y(t)^2 + [(r_1 + r_2)^2/4a_1 + r_2 k_2 + b_2/k_2]y(t) + (a_1 + r_1)^2/4a_1 - r_1 - r_2 + b_1 \xi/f(\xi) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2 \leq [(r_1 + r_2)^2/4a_1 + r_2 k_2 + b_2/k_2]^2/(4b_1) + (a_1 + r_1)^2/(4a_1) - r_1 - r_2 + b_1 \xi/f(\xi) + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)/2 := M$ 。因此可得, $dV(x(t), y(t)) = Mdt + (x - 1 + xy)\sigma_1 dB_1 + (xy - 1 + k_2 y)\sigma_2 dB_2$ 。将上式两边从0到 $T \wedge \tau_n$ 进行积分取期望可得, $E(V(x(T \wedge \tau_n), y(T \wedge \tau_n))) \leq V(x(0), y(0)) + E \int_0^{T \wedge \tau_n} M ds + E \int_0^{T \wedge \tau_n} (x - 1 + xy)\sigma_1 dB_1 + E \int_0^{T \wedge \tau_n} (xy - 1 + k_2 y)\sigma_2 dB_2 \leq V(x(0), y(0)) + MT$ 。

让 $\Omega_n = \{\tau_n \leq T\}$, 当 $n \geq n_1$ 时, 由上述 $P(\tau_n \leq T) \geq \varepsilon, \forall n \geq n_1$, 有 $p(\Omega_n) \geq \varepsilon$ 。由停时的定义, 把 n 和 $1/n$ 代入 $V(x(t), y(t))$, 易得 $V(x(T \wedge \tau_n), y(T \wedge \tau_n)) \geq \min\{n - \ln n - 1, 1/n + \ln n - 1, -\ln n + (k_2 + n)n - (1 + \ln k_2), \ln n + (k_2 + 1/n)1/n - (1 + \ln k_2)\} =: Q$ 。则 $V(x(0), y(0)) + MT \geq E(V(x(T \wedge \tau_n), y(T \wedge \tau_n))) = E(1_{\Omega_n} V(x(T \wedge \tau_n), y(T \wedge \tau_n))) \geq \varepsilon Q$ 。其中, 1_{Ω_n} 是 Ω_n 的指标函数。令 $n \rightarrow \infty$, 得到 $\infty > V(x(0), y(0)) + MT = \infty$, 与假设矛盾, 即 $\tau_\infty = \infty$, a.s.。证毕。

定理2 设 $X(t) = (x(t), y(t))$ 是系统 (2) 满足初始条件 $x(0) > 0, y(0) > 0$ 的任意解, i) 如果 $r_1 < \sigma_1^2/2, r_2 < \sigma_2^2/2$, 则种群 $x(t), y(t)$ 均灭绝; ii) 如果 $r_1 < \sigma_1^2/2, r_2 > \sigma_2^2/2$, 则种群 $x(t)$ 是灭绝的, 种群 $y(t)$ 是平均持续生存的; iii) 如果 $r_2 < \sigma_2^2/2, r_1 > \sigma_1^2/2$, 则种群 $y(t)$ 是灭绝的, 种群 $x(t)$ 是平均持续生存的; iv) 如果 $r_1 > b_1 \xi/f(\xi) + \sigma_1^2/2, r_2 > \sigma_2^2/2$, 则种群 $x(t), y(t)$ 均是平均持续生存的。

证明 i) 对 $\ln x(t)$ 应用 Itô 公式可得

$$d \ln x(t) = (r_1 - a_1 x(t) - b_1 y(t)/f(y(t)) - \sigma_1^2/2)dt + \sigma_1 dB_1(t), \quad (6)$$

两边同时从0到 t 积分

$$\begin{aligned}\ln x(t) - \ln x(0) &= r_1 t - a_1 \int_0^t x(s) ds - b_1 \int_0^t y(s)/f(y(s)) ds - \sigma_1^2 t/2 + \sigma_1 B_1 \\ &\leq r_1 t - \sigma_1^2 t/2 + \sigma_1 B_1.\end{aligned}\quad (7)$$

对式 (7) 两端除以 t , 并取极限得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln x(t)/t \leq r_1 - \sigma_1^2/2$ a.s.。因为 $r_1 < \sigma_1^2/2$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln x(t)/t < 0$, a.s.。即 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, a.s., 种群 $x(t)$ 是灭绝的。

对 $\ln y(t)$ 应用 Itô 公式可得 $d \ln y(t) = (r_2 - b_2 y(t)/(k_2 + x(t)) - \sigma_2^2/2) dt + \sigma_2 B_2(t)$, 两边同时从 0 到 t 积分

$$\begin{aligned}\ln y(t) - \ln y(0) &= r_2 t - b_2 \int_0^t y(s)/(k_2 + x(s)) ds - \sigma_2^2 t/2 + \sigma_2 B_2 \\ &\leq r_2 t - \sigma_2^2 t/2 + \sigma_2 B_2.\end{aligned}\quad (8)$$

对式 (8) 两端除以 t , 并取极限得, $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln y(t)/t \leq r_2 - \sigma_2^2/2$, a.s.。因为 $r_2 < \sigma_2^2/2$, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln y(t)/t < 0$, a.s.。即 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, a.s., 种群 $y(t)$ 也是灭绝的。

ii) 当 $r_1 < \sigma_1^2/2$ 时, 证明过程与 i) 完全一样, 所以种群 $x(t)$ 是灭绝的。由式 (8) 得

$$\ln y(t) - \ln y(0) \geq r_2 t - b_2 \int_0^t y(s)/k_2 ds - \sigma_2^2 t/2 + \sigma_2 B_2,\quad (9)$$

对式 (9) 应用引理可得, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t y(s) ds/t \geq (r_2 - \xi^2/2) k_2/b_2$ a.s.。因为 $r_2 > \sigma_2^2/2$, 所以 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t y(s) ds/t > 0$, a.s., 即种群 $y(t)$ 是平均持续生存的。

iii) 当 $r_2 < \sigma_2^2/2$ 时, 证明过程与 i) 完全一样, 可得到种群 $y(t)$ 是灭绝的。由于 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, 再应用引理可以将式 (7) 化为 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t y(s) ds/t \geq (r_1 - \sigma_1^2/2)/a_1$, a.s., 由条件 $r_1 > \sigma_1^2/2$, 得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t y(s) ds/t \geq 0$, a.s.。所以种群 $x(t)$ 是平均持续生存的。

iv) 当 $r_1 > b_1 \xi/f(\xi) + \sigma_1^2/2$ 时, 式 (7) 可以化为

$$\ln x(t) - \ln x(0) \geq r_1 t - a_1 \int_0^t x(s) ds - b_1 \int_0^t \xi/f(\xi) ds - \sigma_1^2 t/2 + \sigma_1 B_1,\quad (10)$$

对式 (10) 应用引理可得, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_0^t y(s) ds/t \geq (r_1 - b_1 \xi/f(\xi) - \sigma_1^2/2)/a_1$, a.s., 所以种群 $x(t)$ 是平均持续生存的。当 $r_2 > \sigma_2^2/2$ 时, 证明过程与 ii) 完全一样, 所以种群 $y(t)$ 是平均持续生存的。

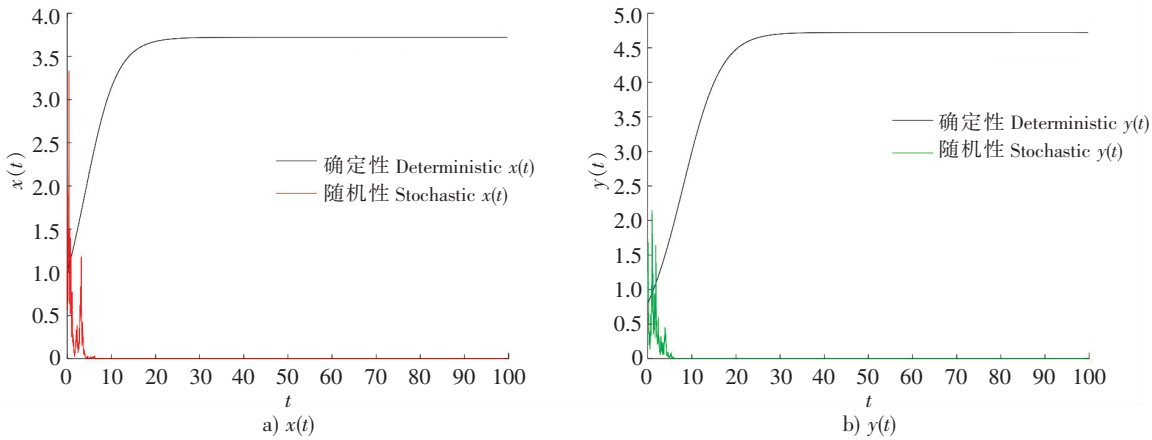
3 数值模拟

为了验证结果的正确性, 采用 Milstein 高阶方法^[11]对随机系统 (2) 进行数值模拟。取 $f(y) = 1 + \alpha y(t)^2$, α 是测量心理或抑制作用的参数。显然它满足 $y(t)/f(y(t))$ 在 $y(t)$ 较小时递增, 在 $y(t)$ 较大时递减。另取 $r_1 = 0.4$, $r_2 = 0.3$, $k_2 = 1$, $b_2 = 0.3$, $b_1 = 0.4$, $a_1 = 0.1$ 和初值 (1, 0.8), 通过取不同的 $\sigma_1, \sigma_2, \alpha$ 来研究白噪声和心理效应对系统 (2) 的影响。

1) 取 $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 2, \alpha = 3$ 时, 通过计算可得 $r_1 < \sigma_1^2/2, r_2 < \sigma_2^2/2$, 显然参数的选择满足定理 2 的第 i) 个要求, 即种群 $x(t), y(t)$ 均是灭绝的, 见图 1。

2) 取 $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0.1, \alpha = 3$ 时, 通过计算可得 $r_1 < \sigma_1^2/2, r_2 > \sigma_2^2/2$, 显然参数的选择满足定理 2 的第 ii) 个要求, 即种群 $x(t)$ 是灭绝的, 种群 $y(t)$ 是平均持续生存的, 见图 2。

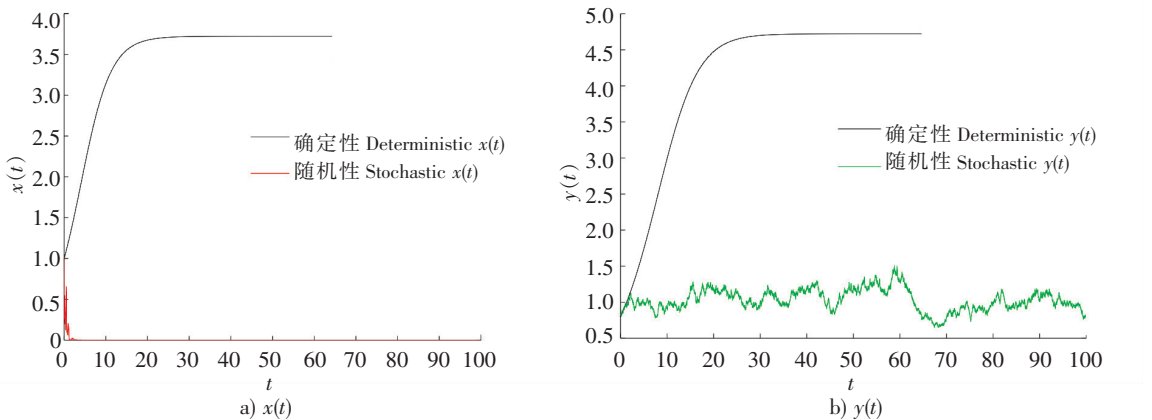
3) 取 $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 2, \alpha = 3$ 时, 通过计算可得 $r_2 < \sigma_2^2/2, r_1 > \sigma_1^2/2$, 显然参数的选择满足定理 2 的第 iii) 个要求, 即种群 $y(t)$ 是灭绝的, 种群 $x(t)$ 是平均持续生存的, 见图 3。



说明:彩色曲线代表系统(2)的解,黑色线代表其相应的确定性模型的解。
Notes: The colour curve represent the solution of system(2),the black curve represent the solution of the corresponding deterministic system.

图 1 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(1,0.8)下的时间序列图 ($\sigma_1=2,\sigma_2=2,\alpha=3$)

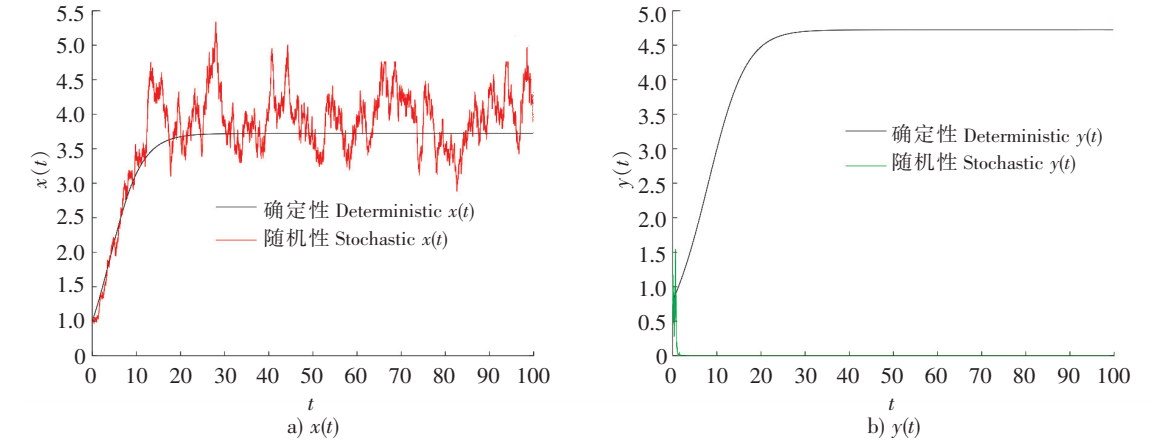
Fig.1 Time series of system (2) and it's corresponding deterministic system with initial value(1,0.8) ($\sigma_1=2,\sigma_2=2,\alpha=3$)



说明:彩色曲线代表系统(2)的解,黑色线代表其相应的确定性模型的解。
Notes: The colour curve represent the solution of system(2),the black curve represent the solution of the corresponding deterministic system

图 2 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(1,0.8)下的时间序列图 ($\sigma_1=2,\sigma_2=0.1,\alpha=3$)

Fig.2 Time series of system (2) and it's corresponding deterministic system with initial value(1,0.8) ($\sigma_1=2,\sigma_2=0.1,\alpha=3$)



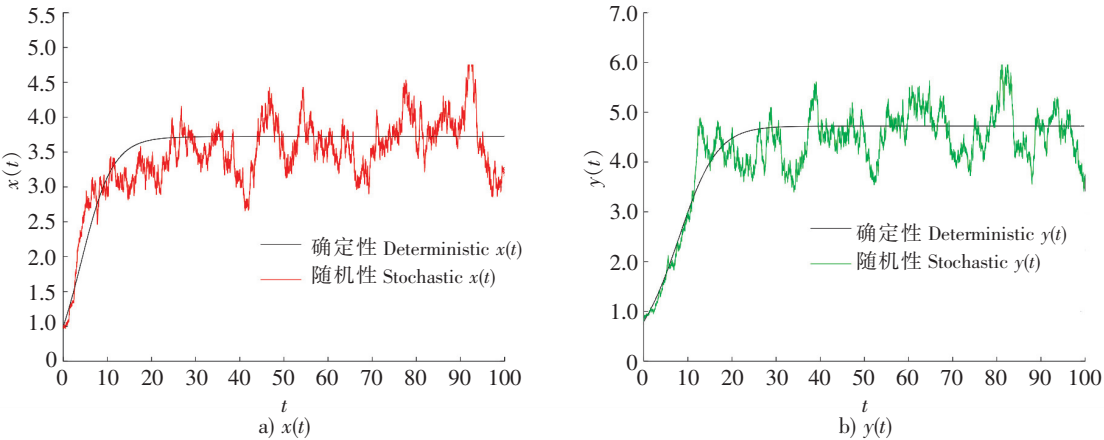
说明:彩色曲线代表系统(2)的解,黑色线代表其相应的确定性模型的解。
Notes: The colour curve represent the solution of system(2),the black curve represent the solution of the corresponding deterministic system.

图 3 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(1,0.8)下的时间序列图 ($\sigma_1=0.1,\sigma_2=2,\alpha=3$)

Fig.3 Time series of system (2) and it's corresponding deterministic system with initial value(1,0.8) ($\sigma_1=0.1,\sigma_2=2,\alpha=3$)

4) 取 $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.1, \alpha = 3$ 时, 通过计算可得 $r_1 - b_1\xi/f(\xi) > \sigma_1^2/2, r_2 > \sigma_2^2/2$, 显然参数的选择满足定理 2 的第 iv) 个要求, 即种群 $x(t), y(t)$ 均是平均持续生存的, 见图 4。

5) 取 $\sigma_1 = 0.1, \sigma_2 = 0.1, \alpha = 0.01$ 时, 通过计算可得 $r_1 - b_1\xi/f(\xi) < \sigma_1^2/2, r_2 > \sigma_2^2/2$, 即种群 $x(t)$ 是趋于灭绝的, 种群 $y(t)$ 是平均持续生存的, 见图 5。

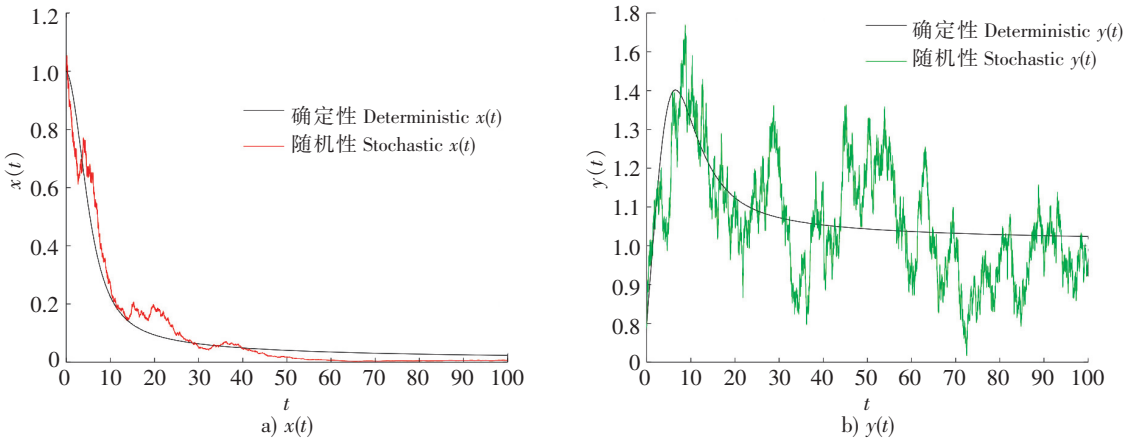


说明:彩色曲线代表系统(2)的解,黑色线代表其相应的确定性模型的解。

Notes:The colour curve represent the solution of system(2),the black curve represent the solution of the corresponding deterministic system.

图 4 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(1,0.8)下的时间序列图($\sigma_1=0.1, \sigma_2=0.1, \alpha=3$)

Fig.4 Time series of system (2) and it's corresponding deterministic system with initial value(1,0.8) ($\sigma_1=0.1, \sigma_2=0.1, \alpha=3$)



说明:彩色曲线代表系统(2)的解,黑色线代表其相应的确定性模型的解。

Notes:The colour curve represent the solution of system(2),the black curve represent the solution of the corresponding deterministic system.

图 5 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(1,0.8)下的时间序列图($\sigma_1=0.1, \sigma_2=0.1, \alpha=0.01$)

Fig.5 Time series of system (2) and it's corresponding deterministic system with initial value(1,0.8) ($\sigma_1=0.1, \sigma_2=0.1, \alpha=0.01$)

比较图 1、图 2 可以发现, 当 σ_1 与 α 不变, σ_2 变动时, 种群 $x(t)$ 始终灭绝, 而种群 $y(t)$ 则由灭绝变为平均持续生存。比较图 1、图 3 可以发现, 当 σ_2 与 α 不变, σ_1 变动时, 种群 $x(t)$ 由灭绝变为平均持续生存, 而种群 $y(t)$ 始终灭绝。由此可知, 白噪声过大时, 种群趋于灭绝; 白噪声较小时, 种群可以平均持续生存。而将图 4 与图 5 进行比较, 当 σ_1 与 σ_2 均不变, 将 α 的取值改变, 在“心理效应”较小的时候, 种群 $x(t)$ 是平均持续生存的, 在“心理效应”较大的时候, 则种群 $x(t)$ 趋于灭绝。而种群 $y(t)$ 始终是平均持续生存的。可以看出, 心理效应也会对种群 $x(t)$ 的平均持续生存和灭绝造成一定影响, 即较强的心理效应不利于种群 $x(t)$ 的生存。

4 结论

本文研究了具有心理效应的随机扰动捕食-食饵系统。通过构造合适的 Liapunov 函数并运用 Itô 公式,证明了系统 (2) 全局正解的存在唯一性,给出了种群 $x(t), y(t)$ 灭绝与平均持续生存的充分条件。最后通过数值模拟验证结果的正确性,得到:随机扰动对种群的生存与灭绝扮演着重要的角色,当白噪声较大时,种群 $x(t), y(t)$ 更快地趋于灭绝;当白噪声较小时,种群 $x(t), y(t)$ 相对缓慢减少,并持续生存;种群 $x(t)$ 也会受到心理效应的影响,当心理效应较大时,种群 $x(t)$ 会不太愿意在该区域出现,从而导致数量减少。

[参考文献]

- [1] LI X D, BOHNER M, WANG C K. Impulsive differential equations: periodic solutions and applications [J]. Automatica, 2015, 52: 173-178. DOI:10.1016/j.automatica.2014.11.009.
- [2] JIAO J J, PANG G P, CHEN L S, et al. A delayed stage-structured predator-prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 195(1): 316-325.
- [3] AZIZ A, OKIYE M. Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes [J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16(7): 1069-1075. DOI:10.1016/S0893-9659(03)90096-6.
- [4] WEI F Y, CHEN L H. Psychological effect on single-species population models in a polluted environment [J]. Mathematical Biosciences, 2017, 290: 22-30. DOI:10.1016/j.mbs.2017.05.011.
- [5] XIAO D M, RUAN S G. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate [J]. Mathematical Biosciences, 2007, 208(2): 419-429. DOI:10.1016/j.mbs.2006.09.025.
- [6] CAI Y L, WANG W M. A stochastic SIRS epidemic model with infectious force under intervention strategies [J]. Journal of Differential Equations, 2015, 259(12): 7463-7502. DOI:10.1016/j.jde.2015.08.024.
- [7] BRAUMANN C A. Variable effort harvesting models in random environments: generalization to density-dependent noise intensities [J]. Mathematical Biosciences, 2002, 177/178: 229-245. DOI:10.1016/S0025-5564(01)00110-9.
- [8] 王克. 随机生物数学模型 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [9] LV J, WANG K. Asymptotic properties of a stochastic predator-prey system with Holling II functional response [J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2011, 16(10): 4037-4048. DOI: 10.1016/J.cnsns.2011.01.015.
- [10] LIU M, WANG K. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle [J]. Bull Mathematics Biology, 2011, 73(9): 1969-2012. DOI:10.1007/S11538-010-9569-5.
- [11] HIGHAM D. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations [J]. SIAM Review, 2001, 43(3): 525-546.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)