[文章编号] 1007－7405(2020)03－0214－08 DOI:10.19715/j.jmuzr.2020.03.08

基于KdV方程的浅水畸形波演化特征

高森林，扈 喆，张晓莹，马亚州，毛富丰

（集美大学轮机工程学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 为了研究高斯脉冲型畸形波解的演化特征，运用虚拟波谱法数值求解KdV（Korteweg－de Vries）方程。以JONSWAP谱为目标谱，分别以线性余弦波、椭圆余弦波为基础组成波，采用叠加思想模拟随机波列，数值求解了高斯脉冲型畸形波在随机波浪场中的演化特征。采用CMOR小波分析畸形波演化过程中的波数、能量分布状况。模拟结果反映了畸形波生成时的能量集中以及高频能量转移特征。计算随机波浪场中不同参数条件下高斯脉冲型畸形波的持续时间和传播距离，曲线拟合结果表明，畸形波的持续时间与传播距离和高斯脉冲的波幅与脉冲参量之间近似呈二次函数关系。

[关键词] 畸形波；KdV方程；虚拟波谱法；CMOR小波分析；椭圆余弦波

[中图分类号] TV 139.2＋5

Study on Evolution Characteristics of Freak Wave Within the Framework of KdV Equation

GAO Senlin, HU Zhe, ZHANG Xiaoying, MA Yazhou, MAO Fufeng

(School of Marine Engineering, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the Korteweg－de Vries (KdV) equation is solved by pseudo－spectral method, which provides a reference for the study of evolution characteristics of the Gaussian pulse type freak wave solution. Taking the JONSWAP spectrum as the target spectrum, based on linear cosine wave and cnoidal wave respectively, the random wave is simulated by superposition ideas, numerically solved the evolution characteristics of Gaussian pulse type freak wave in random wave field. To analyze the wave number and energy distribution of the freak wave during the evolution, the cmor wavelet transform are used. When the freak wave is generated, the simulation results reflect the characteristics of energy concentration and high－frequency energy transfer. The curve fitting results show that the duration and propagation distance of the freak wave have a quadratic function relationship with the amplitude and width of the Gaussian pulse under different wave conditions.

Keywords: freak wave; KdV equation; pseudo－spectral method; CMOR wavelet analysis; cnoidal wave

0 引言

畸形波是一种能量高度集中的灾难性波浪，具有大波高、大波陡、无预兆、持续时间短等特征，其巨大的破坏力，给船舶的航行安全和海洋结构物的安全运作带来严重威胁。为了获得畸形波海上实

[收稿日期] 2019－10－31

[基金项目] 国家自然科学基金（51609101）；福建省自然科学基金（2017J01701）；福建省海洋经济发展补助资金项目（FJHJF－L－2018－4）

[作者简介] 高森林（1991—），男，硕士生，从事畸形波数值模拟研究。通信作者：扈喆（1988—），男，博士，副教授，从事畸形波与结构物相互作用研究。E-mail:zhehu@jmu.edu.cn

测数据，许多研究机构投入了大量人力物力。Sand 等[1]报道了 1969—1984 年在丹麦和爱尔兰沿海大陆架上观测到的 9 个浅水畸形波，这 9 个畸形波均发生在水深 20 ~ 40 m 处，有义波高 2 ~ 8 m。Nikolkina 等[2]更加详细地报道了 2006—2010 年发生在全球各处的 30 个浅水畸形波，这 30 个浅水畸形波发生在水深 0 ~ 50 m 处，有义波高 1.0 ~ 6.0 m。

由于畸形波的海上实测存在诸多困难，人们主要依赖实验模拟和数值模拟来研究畸形波。与实验模拟相比，数值模拟可模拟更为复杂、尺度更大的波浪，且具有经济性高、误差小等优点[3]。Kriebel 等[4]提出了由随机波列（或背景波列）加上瞬态波列（或脉冲波列）的双波列叠加模型，并将组成波的频谱能量按不同比重分别分配给随机波列和瞬态波列。裴玉国[5]基于双波列叠加模型改进得到三波列叠加模型（一个随机波列和两个瞬态波列），模拟非线性更强的波浪时效果优于双波列叠加模型。Pelinovsky 等[6]在 KdV 方程框架下，先以目标畸形波为初始条件，发展得到各个时刻的色散小振幅波，然后改以得到的色散小振幅波为初始条件，根据 KdV 方程关于变换 $x \to -x$，$t \to -t$ 的不变性，逆转时间过程发展得到目标畸形波。为便于称呼，以下简称这一方法为时空反演法。Fouque 等[7]运用时间反演法，研究了 Boussinesq 框架、KdV 框架、粘性 Burgers 框架下畸形波的弱色散性和弱非线性。Akhmediev 等[8]借鉴时空反演法，研究了在非线性薛定谔方程框架下两个以上 Akhmediev 呼吸子碰撞产生畸形波的初始条件。Touboul 等[9]采用时空反演法，研究了 Serre - Green - Naghdi 系统下浅水畸形波底部压力分布。

目前文献中多采用有限差分法数值求解 KdV 方程[10-12]。与有限差分法相比，虚拟波谱法（pseudo - spectral method）在保证计算精度的同时大幅提高了计算效率[13]。Fornberg 等[14]应用虚拟波谱法数值模拟了多孤子在 KdV 方程、mKdV 方程框架下的相互作用过程。Lo 等[15]应用该方法数值求解了 Dysthe 方程。张运秋[16]应用该方法数值求解了考虑粘性阻尼作用的四阶修正非线性薛定谔方程。本文使用虚拟波谱法数值求解 KdV 方程。

目前文献中多采用 Longuet - Higgins 提出的线性叠加模型，通过多个不同周期、不同振幅、不同随机初相位的余弦波叠加来模拟随机波浪[17-19]。但在近岸浅水区，椭圆余弦波相比余弦波更能准确地描述波浪运动特征[20]。因此本文借鉴双波列模型的思想，以 JONSWAP 谱为目标谱，分别基于线性余弦波与椭圆余弦波理论建立背景随机波浪场。采用时空反演法，研究高斯脉冲型畸形波在随机背景波浪场中从生成到消失的全过程，并采用小波方法分析时频演化特征。在此基础上，本文模拟多组不同参数下的高斯脉冲畸形波演化过程，回归分析高斯脉冲型畸形波持续时间和传播距离与各参数之间的关系。

1　控制方程与虚拟波谱法求解

在一维浅水中，设水深为 h，并且是一个常数。假设波沿 x 正方向传播，波幅为 a，波长为 L，则当 $a/h \ll 1$ 且 $h/L \ll 1$ 时，水波控制方程近似演变为 KdV 方程[21]：

$$\partial\eta/\partial t + \sqrt{gh}\,\partial\eta/\partial x + (3/2)\sqrt{g/h}\,\eta\partial\eta/\partial x + (h^2/6)\sqrt{gh}\,\partial^3\eta/\partial x^3 = 0。 \tag{1}$$

式中：t 为时间；x 为水平位置，η 为自由液面高度。

KdV 方程中前两项表示以速度 $\sqrt{gh}$ 沿 x 正方向传播的行波，第 3 项体现了非线性，第 4 项体现了色散性。

为使用虚拟波谱法数值求解 KdV 方程，将方程（1）表示为如下的广义非线性方程形式：

$$\partial\eta/\partial t = L(\eta) + N(\eta)。$$

其中：$L(\eta)$、$N(\eta)$ 分别表示方程的线性部分和非线性部分。

虚拟波谱法的主要思想是将原非线性方程中的线性部分和非线性部分在每一个时间步长上分开求解后再进行迭代。

对于非线性部分 $\partial\eta/\partial t = N(\eta) = (-3/2)\sqrt{g/h}\,\eta\partial\eta/\partial x$，根据中心有限差分法进行离散：

$\tilde{\eta}(x,t+\Delta t/2)=\eta(x,t)+\Delta tN(\eta(x,t))/2$；$\tilde{\eta}(x,t+\Delta t)=\eta(x,t)+\Delta tN(\tilde{\eta}(x,t+\Delta t/2))$。

对于线性部分 $\partial\eta/\partial t=-\sqrt{gh}\,\partial\eta/\partial x-(h^2/6)\sqrt{gh}\,\partial^3\eta/\partial x^3$ 做傅里叶变换，记 $\hat{\eta}(\upsilon,t)=F[\eta(x,t)]$，$F$ 表示傅里叶变换算子，则可得 $\hat{\eta}(\upsilon,t)=\hat{\eta}(\upsilon,0)\exp(\mathrm{i}\upsilon t\sqrt{gh}(-1+h^2\upsilon^2/6))$。

由非线性部分求解得到 $\tilde{\eta}(x,t+\Delta t)$ 后，可代入线性部分，求解得到 $\eta(x,t+\Delta t)$：

$$\hat{\eta}(\upsilon,t+\Delta t)=F[\tilde{\eta}(x,t+\Delta t)]\exp(\mathrm{i}\upsilon\Delta t\sqrt{gh}(-1+h^2\upsilon^2/6));$$

$$\eta(x,t+\Delta t)=F^{-1}[F[\tilde{\eta}(x,t+\Delta t)]\exp(\mathrm{i}\upsilon\Delta t\sqrt{gh}(-1+h^2\upsilon^2/6))]。$$

这样就由 $\eta(x,t)$ 求解得到前进一个时间步长后的值 $\eta(x,t+\Delta t)$，循环这一过程即可完成 KdV 方程的数值求解。

通过对比 KdV 方程孤波理论解与数值解来验证虚拟波谱法求解的正确性。KdV 方程孤波解为[22]：

$$\eta(x,t)=(c_1h/3)\mathrm{sech}^2[(\sqrt{c_1}/2h)(x-x_0-\sqrt{gh}(1+c_1/6)(t-t_0))]。\tag{2}$$

式中：c_1，x_0，t_0 为常数；$c_1h/3$ 为孤波的波高；x_0，t_0 反应了波的初始相移。

设孤波解中的参数值为 $c_1=0.25$；$h=20$ m；$x_0=-1000$ m，$t_0=0$ s。以 $\eta(x,0)=(c_1h/3)\mathrm{sech}^2[(\sqrt{c_1}/2h)(x-x_0)]$ 为初始条件，采用虚拟波谱法数值求解，并与理论解式（2）对比，结果如图 1 所示。

由图 1 可以看出数值解与理论解在各个时刻吻合良好，体现了本文数值解法的准确性与稳定性。

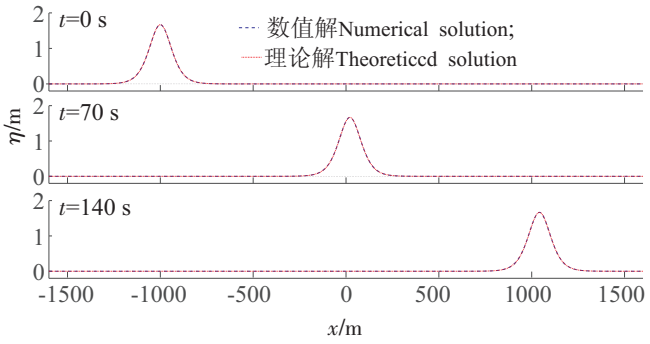


图 1 KdV 方程孤波解的数值解与理论解对比

Fig.1 Numerical solution in comparison with the theoretical solitary wave solution of KdV equation

2 数值算例与讨论

2.1 高斯脉冲在 KdV 框架下的演化特征

高斯脉冲广泛应用于各类非线性问题研究中，并常作为畸形波的试探解。Pelinosky 等[6]模拟了 KdV 框架下高斯脉冲在由 18 个随机正弦波叠加而成的波浪场中的发展过程。黄峻堃等[23]研究了非线性薛定谔方程框架下含有三阶、五阶非线性项和 Kerr 色散项时高斯型脉冲中各参量随传播距离的演化规律。与其他畸形波形式相比，高斯脉冲具有参量数目少，参量的几何意义明显等优点，便于使用控制变量法等方法进一步量化分析。

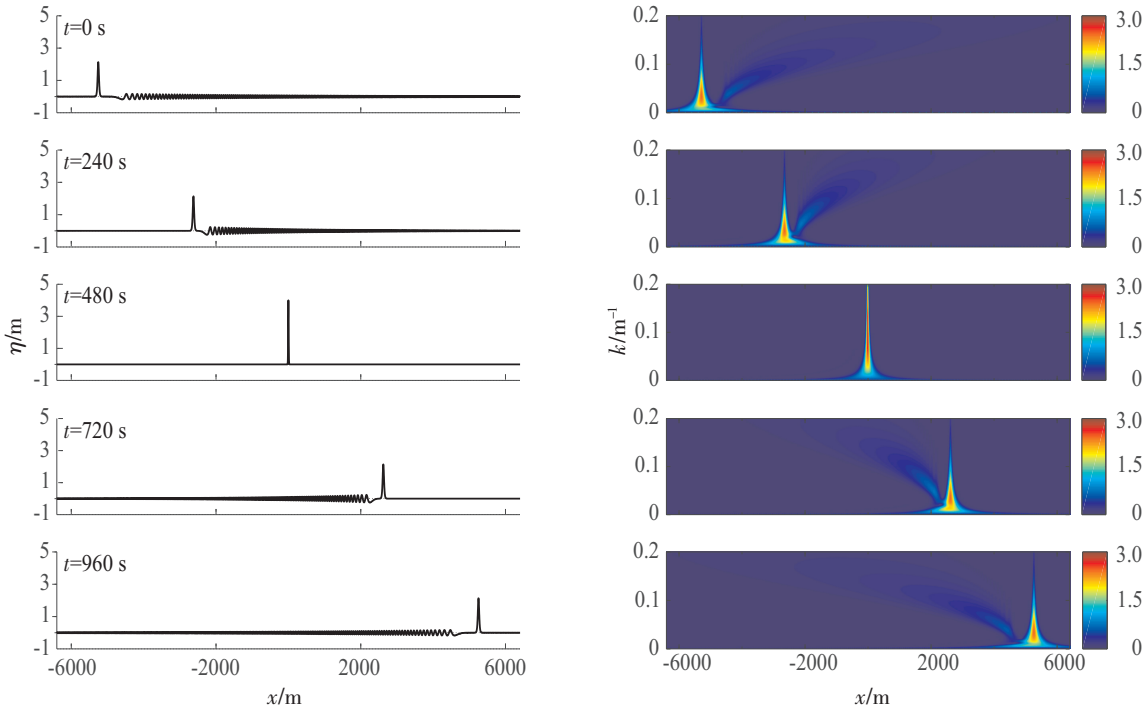
本文采用时空反演法模拟 KdV 框架下高斯脉冲从生成到消失的全过程。以高斯脉冲

$$\eta(x,0)=A\mathrm{e}^{-x^2/d^2}\tag{3}$$

为目标波，取波幅 $A=4$ m，脉宽 $d=10$ m，使用虚拟波谱法求解 KdV 方程，可得波列的发展过程，如图 2 所示。

图 2a 各个时刻的波形图体现了 KdV 方程框架下畸形波的时空聚焦生成机制。在 $t=0$ s 时刻，波列由左端的大振幅波和右端的色散小振幅波列组成。由于大振幅波前进速度大于小振幅波列，随着时间的推移前者逐渐追赶后者，到 $t=480$ s 时刻，大振幅波与小振幅波列在 $x=0$ m 位置汇聚形成高斯脉冲；$t=480$ s 时刻之后，高斯脉冲分解为右端的大振幅波和左端的色散小振幅波列，且右端的大振幅波振幅逐渐减小。图 2b 的小波分析图反映了各个时刻波列的波数组成信息和能量分布信息。在 $t=0$ s 时刻，左端大振幅波对应的是波数 0 ~ 0.15 m^{-1} 呈三角形尖峰状部分，为能量主要集中区域；右端色散小振幅波列呈扇状，并与尖峰状部分波数 0.03 m^{-1} 处连接对应，能量较小；到 $t=480$ s 时刻，扇状部分消失，能量集中到高斯脉冲生成位置 $x=0$ m 处，同时高波数部分能量明显增加；$t=$

480 s 时刻之后，能量分散到呈尖峰状的右端大振幅波和呈扇状的左端小振幅波，并且随着时间推移，整个波列的波数逐渐减小。



a) 演化过程图 Evolution process　　b) 小波分析图 Wavelet analysis

图 2　高斯脉冲在 KdV 方程框架下的演化过程与小波分析图

Fig.2　Evolution process of Gaussian pulse in the framework of KdV equation and its wavelet analysis

2.2　高斯脉冲在随机线性余弦波浪场中的演化特征

采用 Goda 改进的 JONSWAP 谱[24]为目标谱，模拟随机波浪。JONSWAP 谱的表达式如下：

$$S(\omega) = \beta_J [H_s^2/(T_p^4\omega^5)]\exp[-1.25/(T_p\omega)^4]\gamma^{\exp[(T_p\omega-1)^2/(2\sigma^2)]}。$$

式中：$\beta_J = [0.062\ 38(1.094 - 0.019\ 15\ln\gamma)]/[0.23 + 0.033\ 6\gamma - 0.185(1.9 + \gamma)^{-1}]$；$T_p = T_s/[1 - 0.132(\gamma + 0.2)^{-0.559}]$；$\omega$ 为波浪频率；H_s 和 T_s 分别是有义波高和周期；$\sigma = \begin{cases} 0.07, & \omega \leqslant \omega_p, \\ 0.09, & \omega > \omega_p, \end{cases}$ ω_p 为谱峰频率；T_p 为谱峰周期；γ 为谱峰增强因子（第十五届 ITTC 会议建议将 $\gamma = 3.3$ 时的 JONSWAP 谱作为有限风区的有效近似）。

线性波浪叠加法将海浪看作由多个不同周期和不同随机初相位的余弦波叠加而成：

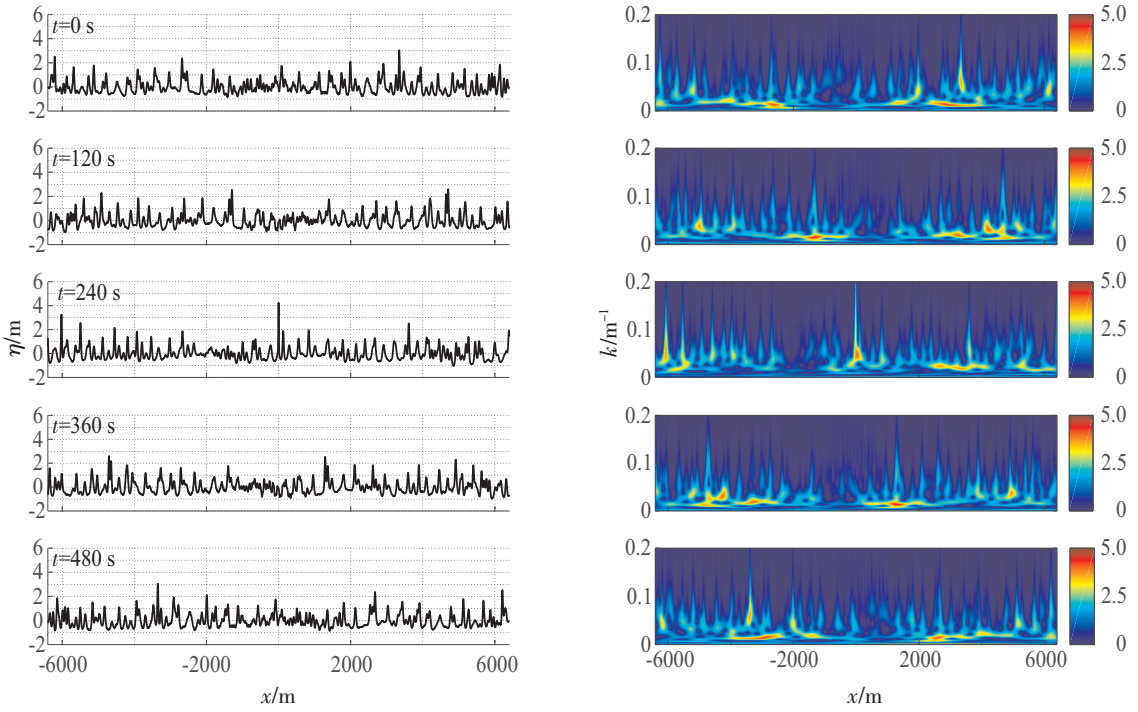
$$\zeta(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i\cos(k_i x - \omega_i t + \theta_i) \approx \sum_{i=1}^{N} a_i\cos(k_i x - \omega_i t + \theta_i)。$$

式中：$a_i = \sqrt{2S(\omega_i)\Delta\omega_i}$，表示第 i 个组成波的波幅；k_i 表示第 i 个组成波的波数；$\omega_i^2 = gk_i\tanh(k_i h)$，表示第 i 个组成波的频率；θ_i 为第 i 个组成波的初相位，取在 $[0,2\pi)$ 区间内均匀分布的随机数；N 为足够大的数，本文取 $N = 9\ 000$。

本文结合实际观测数据[1,2]，计算时取水深 $h = 10$ m，有义波高 $H_s = 2$ m，有义周期 $T_s = 10$ s。首先以 $\zeta(x,0)$ 为初始条件代入 KdV 方程，采用虚拟波谱法，计算得到在 KdV 框架下充分发展后波形稳定的随机波列 $\zeta(x,600)$，再取目标畸形波波列为

$$\eta(x,0) = \zeta(x,600) + A\mathrm{e}^{-x^2/d^2}。\tag{4}$$

以式（4）为初始条件求解 KdV 方程，采用时空反演法可得随机线性余弦波浪场中高斯脉冲型畸形波从生成到消失的过程，如图 3 所示。



a) 演化过程图 Evolution process　　b) 小波分析图 Wavelet analysis

图 3　高斯脉冲型畸形波在由余弦波叠加形成的随机波浪中的演化过程

Fig.3　Evolution of Gaussian pulse-type freak wave in random wave formed by superposition of cosine waves

图 3a 各个时刻的波形图显示了高斯脉冲型畸形波在 $t = 240$ s 时刻生成，之后逐渐消失在随机波浪场中的过程。与波形图相对应，图 3b 各个时刻的小波分析图反映了高斯脉冲在随机波列中演化过程，从 $t = 0$ s 到 $t = 240$ s，高斯脉冲波列在随机波列中汇聚，最终在 $x = 0$ m 处形成高斯脉冲型畸形波；从 $t = 240$ s 到 $t = 480$ s，高斯脉冲波列在随机波列中色散，能量分散到随机波列中。纵观各个时刻小波图可以发现，在高斯脉冲型畸形波生成前的 $t = 0$ s 和 $t = 120$ s 时刻，以及生成后的 $t = 360$ s 和 $t = 480$ s 时刻，波列的高波数（波数 0．1 ~ 0．2 m^{-1}）成分能量较少且分散，而在畸形波生成 $t = 240$ s 时刻，波列能量会聚到畸形波生成 $x = 0$ m 处，且 $x = 0$ m 处高波数成分能量大而集中，这体现了畸形波能量集中，且能量向高频转移的特点。

2.3　高斯脉冲在随机椭圆余弦波浪场中的演化特征

波浪传入近岸浅水区后，海底边界的摩擦影响迅速增加，波高和波形将不断变化，两波峰处的水质点运动特性与波陡 H/L 的关系减弱，而与相对波高 H/d 的关系增强，即 H/L 和 H/d 成为决定波动性质的主要因素，此时采用能反映决定波动性质的主要因素 H/L 和 H/d 的椭圆余弦波理论，描述波浪运动，可以取得较满意的结果[20]。

在 $t = 0$ s 时刻，第 i 个椭圆余弦波可以表示为[25]

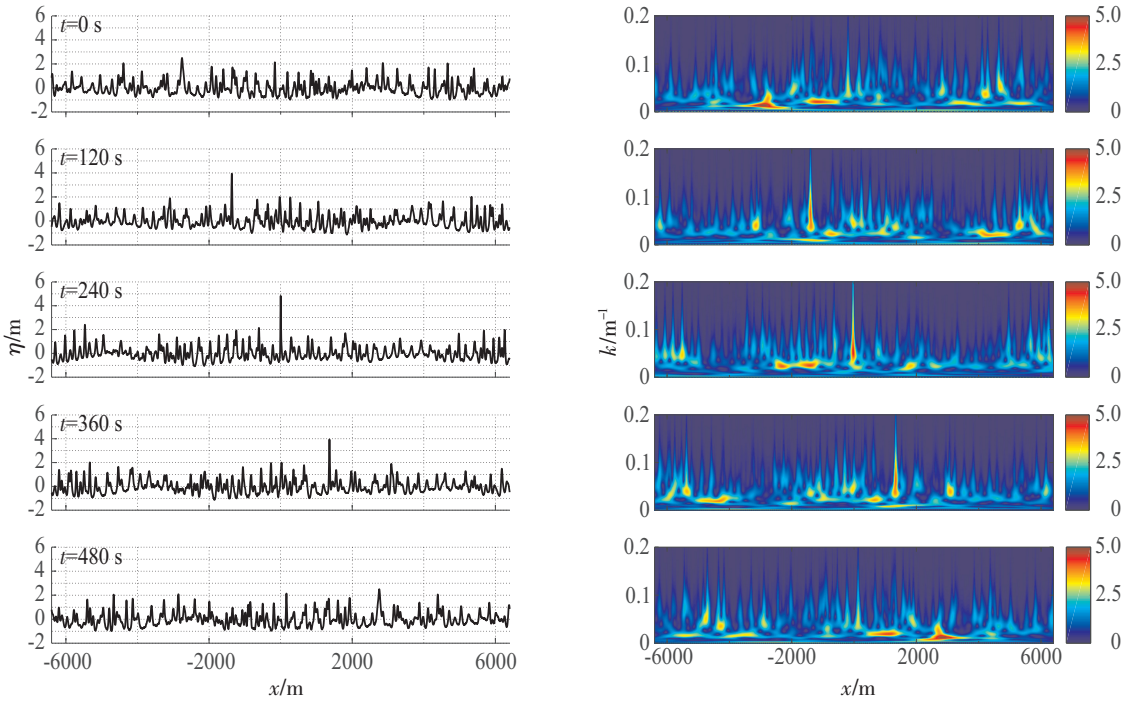
$$\zeta_i(x,0) = -2a_i + [16h^3/(3L_i^2)][K(\kappa_i)(K(\kappa_i) - E(\kappa_i))] + 2a_i\mathrm{cn}^2[2K(\kappa_i)((x - x_{0i})/L_i),\kappa_i]。$$

其中：$L_i = (2\pi/k_i) = \sqrt{8h^3/(3a_i)}\kappa_i K(\kappa_i)$；$K(\kappa_i) = \int_0^{\pi/2}(1/\sqrt{1-\kappa_i^2\sin^2\varphi})\mathrm{d}\varphi = \int_0^1(1/\sqrt{(1-x^2)(1-\kappa_i^2x^2)})\mathrm{d}x$，$E(\kappa_i) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\kappa_i^2\sin^2\varphi}\mathrm{d}\varphi = \int_0^1\sqrt{(1-\kappa_i^2x^2)/(1-x^2)}\mathrm{d}x$，分别为模数 κ_i 的第一类和第二类 Legendre 完全椭圆积分；x_{0i} 为初始相位，取值为 $[0,L_i)$ 区间内的随机数；κ_i 为第 i 个椭圆余弦波的模数。

则根据叠加思想，$t = 0$ s 时刻随机波浪自由面可表示为：$\zeta(x,0) = \sum_{i=1}^{N}\zeta_i(x,0)$。

首先以 $\zeta(x,0)$ 为初始条件代入 KdV 方程，采用虚拟波谱法计算得到在 KdV 框架下充分发展后波形稳定的随机波列 $\zeta(x,600)$，再取目标畸形波波列为 $\eta(x,0)=\zeta(x,600)+A\mathrm{e}^{(-x^2/d^2)}$，得到椭圆余弦随机波浪场中高斯脉冲型畸形波从生成到消失的全过程

与由余弦波模拟的随机波列类似，由椭圆余弦波模拟的随机波列中高斯脉冲型畸形波也经历了由汇聚到色散的演化过程，如图 4 所示。在 $t=240$ s 时刻，$x=0$ m 处出现了高斯脉冲型畸形波，同时能量也会聚到 $x=0$ m 处，且高波数成分能量明显增加；$t=240$ s 时刻之后，畸形波波幅减小，能量逐渐消散，高斯脉冲型畸形波“消失”在随机波列中。图 4b 的小波能量图分析与图 3 类似，再次验证了畸形波发生时的高能量与高波数能量集中特点。



a) 演化过程图 Evolution process　　b) 小波分析图 Wavelet analysis

图 4　高斯脉冲型畸形波在由椭圆余弦波叠加形成的随机波浪中的演化过程

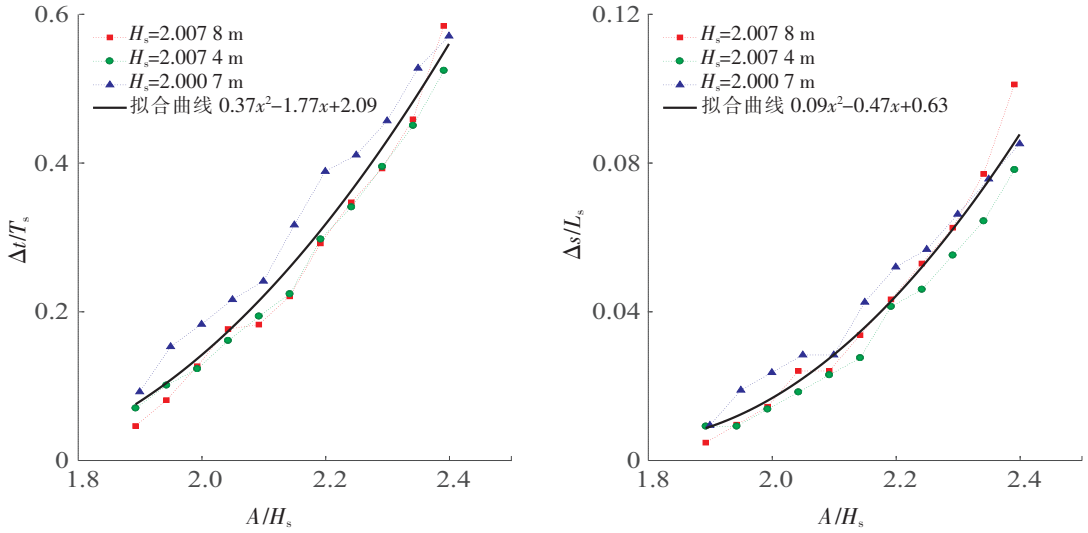
Fig.4　Evolution of Gaussian pulse-type freak wave in random wave formed by superposition of cnoidal waves

2.4　高斯脉冲型畸形波持续时间与传播距离

采用控制变量法研究不同参数的高斯脉冲型畸形波在椭圆余弦随机波浪中的持续时间与传播距离规律。采用上跨零点法计算波列演化过程中各个时刻的最大波高与有义波高，当最大波高超过 2 倍有义波高时，按畸形波定义可知，该时刻波列中出现畸形波，进而可计算畸形波从出现到消失的持续时间与传播距离。本节继续沿用上文取定的水深 h，有义波高 H_s，有义周期 T_s 数值，选取 3 组随机相位，然后依次改变高斯脉冲表达式（3）中的波幅 A，脉宽 d，共形成 66 个算例，并计算每个算例中畸形波持续时间 Δt 和传播距离 Δs，无因次化后结果如图 5、图 6 所示。

由图 5 可知，当高斯脉冲脉宽 d 固定时，随着高斯脉冲无因次波幅 A/H_s 增大，高斯脉冲型畸形波在椭圆余弦随机波浪中的无因次持续时间与无因次传播距离均随之增大。由图 6 可知，当高斯脉冲波幅 A 固定时，随着高斯脉冲无因次脉宽 d/L_s 增大，高斯脉冲型畸形波在椭圆余弦随机波浪中的无因次持续时间与无因次传播距离也随之增大。对图 5、图 6 中的计算结果进行最小二乘法曲线拟合，拟合函数选为二次函数，由图 5、图 6 可见拟合效果良好。由此可以得出结论：高斯脉冲型畸形波的持续时间与传播距离与高斯脉冲波幅 A 和脉宽 d 都是正相关的，且大致呈二次函数关系。从能量角度分析，高斯脉冲波幅 A 与高斯脉冲能量大小正相关，而脉宽 d 则反映了高斯脉冲能量在波峰处的会聚

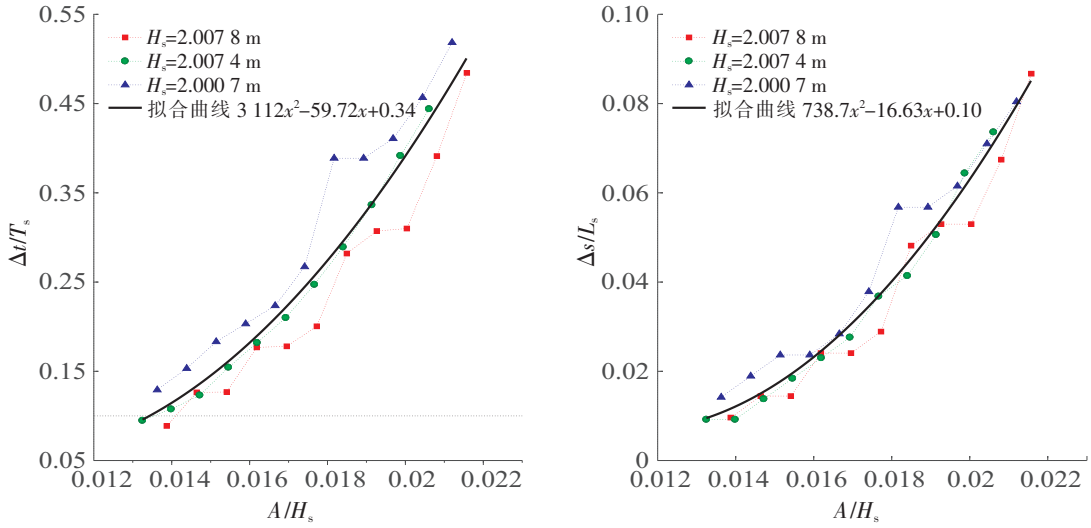
程度，因此当高斯脉冲能量越大，能量越会聚到波峰处，则高斯脉冲型畸形波在椭圆余弦随机波浪中的持续时间越长，传播距离越远。



a) 持续时间 Duration　　b) 传播距离 Propagation distance

图 5　当 d=10 m 时畸形波持续时间和传播距离与高斯脉冲波幅无因次化后关系图

Fig.5　The dimensionless relation between the duration and propagation distance of freak wave and gaussian pulse amplitude when d=10 m



a) 持续时间 Duration　　b) 传播距离 Propagation distance

图 6　当 A=4 m 时畸形波持续时间和传播距离与高斯脉冲脉宽无因次化后关系图

Fig.6　The dimensionless relation between the duration and propagation distance of freak wave and gaussian pulse width when A=4 m

3　结论

本文采用虚拟波谱法数值求解 KdV 方程，得到不同初始波列下的发展波列，并通过小波变换对各个时刻波列进行分析，清楚显示了各个时刻波列能量分布变化。以 JONSWAP 谱为目标谱，分别以线性余弦波、椭圆余弦波为基础组成波，采用叠加思想模拟随机波列，同时根据 KdV 方程的性质，采用时空反演法，实现了随机波列中畸形波从出现到消失的完整演化过程。最后计算分析了不同参数条件下高斯脉冲型畸形波在椭圆余弦随机波浪中的持续时间与传播距离。

结合以上各算例分析可得如下结论：1）畸形波生成时能量集中，且高波数部分能量明显增加，体现了 KdV 方程的非线性；2）高斯脉冲型畸形波的持续时间与传播距离和高斯脉冲的波幅与脉冲参量之间为二次函数关系。当畸形波能量越大，畸形波处能量集中程度越高时，畸形波的持续时间越长，传播距离越远。

本文方法具有一定普适性，如文中的高斯脉冲型畸形波可替换为其他类型的畸形波，KdV 方程可替换为其他适合使用时空反演法的方程，进而研究不同类型畸形波在随机波浪场中的演化特征。

[参 考 文 献]

[1] SAND S E, HANSEN N E O, KLINTING P, et al. Freak wave kinematics [M]. Dordrecht, Netherland: Springer, 1990.

[2] NIKOLKINA I, DIDENKULOVA I. Rogue waves in 2006—2010 [J]. Natural Hazards and Earth System Sciences, 2011, 11(11): 2913-2924.

[3] 扈喆. 畸形波数值模拟及其对结构物的作用 [D]. 上海：上海交通大学，2015.

[4] KRIEBEL D L, ALSINA M V. Simulation of extreme waves in a background random sea [C]. Seattle, USA: Proceedings of the Tenth International Offshore and Polar Engineering Conference, 2000.

[5] 裴玉国. 畸形波的生成及基本特性研究 [D]. 大连：大连理工大学，2008.

[6] PELINOVSKY E, TALIPOVA T, KHARIF C. Nonlinear-dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water [J]. Physica D-nonlinear Phenomena, 2000, 147(1): 83-94.

[7] FOUQUE J P, GARNIER J, GRAJALES J C M, et al. Time reversing solitary waves [J]. Physical Review Letters, 2004, 92(9): 094502. 1-094502. 4.

[8] AKHMEDIEV N, SOTO-CRESPO J M, ANKIEWICZ A. How to excite a rogue wave [J]. Physical Review A, 2009, 80(4): 043818. 1-043818. 7.

[9] TOUBOUL J, PELINOVSKY E. On the use of linear theory to estimate bottom pressure distribution under nonlinear surface waves [J]. European Journal of Mechanics-B/Fluids, 2018, 67: 97-103.

[10] 郭瑞，王周峰，王振华. KdV 浅水波方程的 Crank-Nicolson 差分格式 [J]. 河南科技大学学报（自然科学版），2012, 33(2): 70-74.

[11] 石方圆，李书存，奚茜. 五阶 KdV 方程的高阶有限差分格式 [J]. 河北师范大学学报（自然科学版），2017, 41(2): 104-110.

[12] 罗春莲. 浅水及有限水深畸形波数值模拟与演化规律研究 [D]. 厦门：集美大学，2019.

[13] 卢文月. 深海环境中畸形波特性与生成演化机理研究 [D]. 上海：上海交通大学，2016.

[14] FORNBERG B , WHITHAM G B . A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1978, 289(1361): 373-404.

[15] LO E, MEI C C. A numerical study of water-wave modulation based on a higher-order nonlinear Schrödinger equation [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1985, 150(1): 395-416.

[16] 张运秋. 基于波列边带不稳定性和阻尼影响的畸形波生成数值研究 [J]. 广东造船，2019, 38(2): 59-64.

[17] 刘赞强，张宁川. 基于 Longuet-Higgins 模型的畸形波模拟方法 [J]. 水道港口，2010, 31(4): 236-241.

[18] 朱小伟. 浅水区域随机波浪的非线性特征研究 [D]. 大连：大连理工大学，2015.

[19] 尹则高，杨博，高成岩，等. 随机波作用下圆柱形垂荡浮子水动力行为的数值研究 [J]. 太阳能学报，2019, 40(5): 1207-1211.

[20] 竺艳蓉. 海洋工程波浪力学 [M]. 天津：天津大学出版社，1991.

[21] NEWELL A C. Solitons in mathematics and physics [M]. Philadelphia, USA: Siam, 1985.

[22] 黄景宁，徐济仲，熊吟涛. 孤子：概念、原理和应用 [M]. 北京：高等教育出版社，2004.

[23] 黄峻堃，张少武，万冲. 非线性色散对高斯脉冲传输的影响 [J]. 量子电子学报，2018, 35(5): 603-607.

[24] GODA Y. A comparative review on the functional forms of directional wave spectrum [J]. Coastal Engineering Journal, 1999, 41(1): 1-20.

[25] 邱大洪. 波浪理论及其在工程上的应用 [M]. 北京：高等教育出版社，1985.

（责任编辑　陈　敏　英文审校　郑青榕）