

拓扑空间中的半弱连续映射及其性质

陈舒婷¹, 陈水利¹, 蔡璐蔚², 刘伟权^{3,4}

(1. 集美大学诚毅学院, 福建 厦门 361021; 2. 集美大学信息工程学院, 福建 厦门 361021;
3. 厦门大学信息学院, 福建 厦门 361005; 4. 福建省智慧城市感知与计算重点实验室, 福建 厦门 361005)

[摘要] 在拓扑空间中引入半弱连续映射概念, 研究半弱连续映射的等价条件及其基本性质。系统讨论拓扑空间中半弱连续映射与连续映射、半连续映射、弱连续映射和弱半连续映射之间的关系。

[关键词] 半开(闭)集; 半连续映射; 弱连续映射; 弱半连续映射; 半弱连续映射

[中图分类号] O 189.13

Semi-weakly Continuous Mapping and Its Properties in Topological Spaces

CHEN Shuting¹, CHEN Shuili¹, CAI Luwei², LIU Wei-quan^{3,4}

(1. Chengyi University College, Jimei University, Xiamen 361021, China; 2. School of Information Engineering,
Jimei University, Xiamen 361021, China; 3. School of Informatics, Xiamen University, Xiamen 361005, China;
4. Fujian Key Laboratory of Sensing and Computing for Smart Cities, Xiamen 361005, China)

Abstract: In this paper, the concept of semi-weak continuous mapping in topological spaces was introduced. The equivalent conditions and basic properties of semi-weak continuous mapping were studied. The relations between semi-weak continuous mapping and continuous mapping, semi-continuous mapping, weak continuous mapping and weak semi-continuous mapping in topological spaces were systematically discussed.

Keywords: semi-open (closed) set; semi-continuous mapping; weakly continuous mapping; weakly semi-continuous mapping; semi-weakly continuous mapping

0 引言

众所周知, 连续映射理论是拓扑学中最重要研究内容之一。不少学者在拓扑空间中引入了各种各样的连续性的概念, 并系统研究了各种连续的基本性质及其应用^[1-8], 丰富了拓扑空间理论。本文在前人的研究基础上, 对拓扑空间中的半连续映射和弱连续映射等概念进行推广, 给出了半弱连续映射等概念, 研究了半弱连续映射的等价条件, 并讨论了拓扑空间中半弱连续映射的基本性质, 以及半弱连续映射与其他弱形式的连续映射之间的关系。本文进一步丰富和完善了连续映射理论, 为深入研究拓扑空间理论提供了新的理论工具。

1 预备知识

为了便于引用, 下面给出本文将用到的一些基本概念。

[收稿日期] 2019-03-06

[基金项目] 福建省教育厅中青年教师教育科研项目(JT180884)

[作者简介] 陈舒婷(1990—), 女, 助教, 从事模糊数学及其应用方向研究。

定义 1^[1] 设 (X, \mathcal{T}_1) 与 (Y, \mathcal{T}_2) 是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 为映射。1) 如果 $\forall V \in \mathcal{T}_2$, 有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$, 则称 f 是 X 上的连续映射; 2) 设 $x \in X$, 如果 $\forall U \in \mathcal{U}(f(x))$, 存在 $G \in \mathcal{U}(x)$ 使 $f(G) \subset U$, 则称 f 在点 x 处连续。

定义 2^[1] 设 (X, \mathcal{T}) 是拓扑空间, $A \subset X$ 。1) 如果存在 $B \in \mathcal{T}$, 使得 $B \subset A \subset B^-$, 则称 A 为半开集; 2) 如果存在闭集 C , 使得 $C^\circ \subset A \subset C$, 则称 A 是半闭集。

X 的所有半开集和半闭集组成的集族分别记作 $\text{So}(X)$ 与 $\text{Sc}(X)$ 。称 $A_s^\circ = \bigcup \{B \in \text{So}(X) \mid B \subset A\}$, $A_s^- = \bigcap \{C \in \text{Sc}(X) \mid A \subset C\}$ 分别是 A 的半内部与半闭包。用符号 $\mathcal{U}_s(x) = \{U \in \text{So}(X) \mid x \in U\}$ 表示 x 的所有半开邻域族。

定义 3^[1] 设 (X, \mathcal{T}) 与 (Y, \mathcal{T}_1) 都是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是映射。1) 如果任意 $B \in \mathcal{T}_1$, 都有 $f^{-1}(B) \in \text{So}(X)$, 则称 f 是半连续映射; 2) 设 $x \in X$, 如果任意 $V \in \mathcal{U}^\circ(f(x))$, 都有 $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_s(x)$, 则称 f 在点 x 处是半连续的。

定理 1^[1] 设 (X, \mathcal{T}) 与 (Y, \mathcal{T}_1) 都是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是映射, 则下列条件等价: 1) f 是半连续映射; 2) 设 \mathcal{B} 是 (Y, \mathcal{T}_1) 的基, 任意 $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \in \text{So}(X)$; 3) f 在任意一点 $x \in X$ 处是半连续的; 4) 任意 $A \in \mathcal{T}_1$, $f^{-1}(A) \in \text{Sc}(X)$; 5) 任意 $A \subset X$, $f(A_s^-) \subset (f(A))^-$; 6) 任意 $B \subset Y$, $(f^{-1}(B))_s^- \subset f^{-1}(B^-)$; 7) 任意 $B \subset Y$, $f^{-1}(B^\circ) \subset (f^{-1}(B))_s^\circ$ 。

定义 4^[1] 设 f 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射, $x_0 \in X$ 。如果任意 $V \in \mathcal{U}^\circ(f(x_0))$, 都存在 $U \in \mathcal{U}^\circ(x_0)$, 使得 $f(U) \subset V^-$, 则称 f 在 x_0 处弱连续。如果 f 在每一点 $x \in X$ 处都是弱连续的, 则称 f 是弱连续映射。

定理 2^[1] 设 $f: X \rightarrow Y$ 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射, 则下列条件等价: 1) f 是弱连续映射; 2) 对任意 Y 中的闭集 A , $(f^{-1}(A^\circ)) \subset f^{-1}(A)$; 3) 设 \mathcal{B} 是 Y 中的基, 则任意 $A \in \mathcal{B}$, $(f^{-1}(A^\circ)) \subset f^{-1}(A)$; 4) 设 \mathcal{B} 是 Y 中的基, 则任意 $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B^-))^\circ$ 。

定义 5^[1] 设 A 是拓扑空间 X 的子集, $x \in X$ 。如果 $\forall V \in \mathcal{U}(x)$, 有 $V^- \cap A \neq \emptyset$ ($V^\circ \cap A \neq \emptyset$), 则称 x 是 A 的 θ -附着点 (δ -附着点), A 的所有 θ -附着点 (δ -附着点) 的集合称为 A 的 θ -闭包 (δ -闭包), 用 A_θ^- (A_δ^-) 表示。当 $A = A_\theta^-$ ($A = A_\delta^-$) 时, 称 A 是 θ -闭集 (δ -闭集)。

定义 6^[1] 设 D 是定向集, 则映射 $S: D \rightarrow X$ 称为 X 中的网。 $\forall n \in D$, 用 $S(n)$ 表示 S 在点 n 的值, 网 S 又可以记作 $S = \{S(n) \mid n \in D\}$ 。

定义 7^[1] 设 X 是拓扑空间, $S = \{S(n) \mid n \in D\}$ 是 X 中的网, $x \in X$ 。如果 $\forall U \in \mathcal{U}(x)$, 存在 $n_0 \in D$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $S(n) \in U$, 则称网 S 收敛于 x , 或称 x 是网 S 的极限点, 记作 $S \rightarrow x$, S 的所有极限点的集合, 记作 $\lim S$ 。

定义 8^[1] 设 A 是拓扑空间 X 的子集, $x \in X$ 。如果 $\forall V \in \mathcal{U}(x)$, 有 $V^- \cap A \neq \emptyset$ ($V^\circ \cap A \neq \emptyset$), 则称 x 是 A 的 θ -附着点 (δ -附着点), A 的所有 θ -附着点 (δ -附着点) 的集合称为 A 的 θ -闭包 (δ -闭包), 用 A_θ^- (A_δ^-) 表示。当 $A = A_\theta^-$ ($A = A_\delta^-$) 时, 称 A 是 θ -闭集 (δ -闭集)。

定义 9^[1] 设 (D, \leq) 是偏序集, 如果满足: $\forall x, y \in D$, 存在 $z \in D$ 使 $z \geq x$, 且 $z \geq y$, 则称 D 为定向集。

注 1 考虑拓扑空间 X 的点 x 的半邻域族 $\mathcal{U}_s(x)$, $\forall A, B \in \mathcal{U}_s(x)$, 定义 $A \leq B \Leftrightarrow B \subset A$, 则 $\mathcal{U}_s(x)$ 也是定向集。

定理 3^[1] 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 而 $x \in X$, 则 $x \in A_s^-$, 当且仅当对任意 $V \in \mathcal{U}_s(x)$, 有 $V \cap A \neq \emptyset$ 。

2 半弱连续映射及其基本性质

本节把拓扑空间中的半连续映射和弱连续映射进行推广, 引入半弱连续映射概念, 并系统研究半

弱连续映射的基本性质。

定义 10 设 X 和 Y 为两个拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是一个映射。1) 设 $x \in X$, 如果对 $\forall V \in \mathcal{U}^o(f(x))$, 有 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ \in \mathcal{U}_s(x)$, 则称 f 在点 x 处是半弱连续的。显然, $f: X \rightarrow Y$ 在 $x \in X$ 处是半弱连续的, 当且仅当对任意包含 $f(x)$ 的开集 V , $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 是 x 的半开邻域。2) 如果 f 在 X 中的任意一点处是半弱连续的, 则称 f 是半弱连续映射。

定理 4 设 X 和 Y 为两个拓扑空间, 则映射 $f: X \rightarrow Y$ 在点 $x \in X$ 处是半弱连续的当且仅当 $\forall V \in \mathcal{U}^o(f(x))$, 存在 $U \in \mathcal{U}_s(x)$, 使得 $f(U) \subseteq f((f^{-1}(V^-))_s^\circ)$ 。

证明 设映射 $f: X \rightarrow Y$ 在 $x \in X$ 处半弱连续, $\forall V \in \mathcal{U}^o(f(x))$, 则由定义 10 知 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ \in \mathcal{U}_s(x)$ 。从而存在 $U \in \mathcal{U}_s(x)$, 使得 $U \subseteq (f^{-1}(V^-))_s^\circ$, 于是由 f 的保序性知 $f(U) \subseteq f((f^{-1}(V^-))_s^\circ)$ 。反之, 对任意 $x \in X$, 由已知 $\forall V \in \mathcal{U}^o(f(x))$, 存在 $U \in \mathcal{U}_s(x)$, 使得 $f(U) \subseteq f((f^{-1}(V^-))_s^\circ)$, 则由 f 的原象保序性知 $U \subseteq (f^{-1}(V^-))_s^\circ$, 所以 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 是 x 的半开邻域, 即 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ \in \mathcal{U}_s(x)$, 由定义 10 知 f 是半弱连续的。

定理 5 设 (X, \mathcal{T}) 与 (Y, \mathcal{T}_1) 都是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$ 是映射, 则下列条件等价: 1) f 是半弱连续映射; 2) 对任意 $B \in \mathcal{T}_1$, $f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B^-))_s^\circ$; 3) 对任意 $A \in (\mathcal{T}_1)'$, $(f^{-1}(A^o))_s^- \subset f^{-1}(A)$; 4) 设 \mathcal{B} 是 (Y, \mathcal{T}_1) 的基, 则对任意 $A \in \mathcal{B}$, $(f^{-1}(A^o))_s^- \subset f^{-1}(A)$; 5) 设 \mathcal{B} 是 (Y, \mathcal{T}_1) 的基, 则对任意 $B \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B^-))_s^\circ$ 。

证明 1) \Rightarrow 2)。设 f 是半弱连续映射, 则对任意 $B \in \mathcal{T}_1$ 及对任意 $x \in f^{-1}(B)$, 有 $f(x) \in B$, 所以 B 是 $f(x)$ 的开邻域。因为 f 在 x 处半弱连续, 故由定义 10 知 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 是 x 的半邻域, 即存在 $U \in \mathcal{U}_s(x)$, 使得 $U \subseteq (f^{-1}(B^-))_s^\circ$ 。因此 $x \in U \subseteq (f^{-1}(B^-))_s^\circ$, 从而由 x 在 $f^{-1}(B)$ 的任意性知 $f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B^-))_s^\circ$ 。

2) \Rightarrow 3)。设 $A \in (\mathcal{T}_1)'$, 则 $A' \in \mathcal{T}_1$ 。根据条件 2), 有 $f^{-1}(A') \subset (f^{-1}(A'^-))_s^\circ$ 。因为 $f^{-1}(A') = (f^{-1}(A))^o$, $(f^{-1}(A'^-))_s^\circ = (f^{-1}(A'^o))_s^\circ = ((f^{-1}(A^o))')_s^\circ = ((f^{-1}(A^o))_s^-)'$, 所以有 $(f^{-1}(A^o))_s^- \subset f^{-1}(A)$ 。

3) \Rightarrow 4)。设 \mathcal{B} 是 (Y, \mathcal{T}_1) 的一个基, 因 \mathcal{B} 中的每个成员都是开集, 故对任意 $A \in \mathcal{B}$, 有 $A \in (\mathcal{T}_1)'$, 从而由条件 3) 知 $(f^{-1}(A^o))_s^- \subset f^{-1}(A)$ 。

4) \Rightarrow 5)。设 \mathcal{B} 是 (Y, \mathcal{T}_1) 的基, 则对任意 $B \in \mathcal{B}$, $B' \in \mathcal{B}'$ 。根据条件 4), 有 $(f^{-1}(B'^o))_s^- \subset f^{-1}(B')$ 。因为 $f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))^o$, $(f^{-1}(B'^o))_s^- = (f^{-1}(B'^-))_s^- = ((f^{-1}(B^-))')_s^- = ((f^{-1}(B^-))_s^o)'$, 所以, $f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B^-))_s^\circ$ 。

5) \Rightarrow 1)。对任意 $x \in X$, 任意 $V \in \mathcal{U}^o(f(x))$, 由 \mathcal{B} 是 (Y, \mathcal{T}_1) 的基知存在着 $\beta \subset \mathcal{B}$, 使得 $V = \bigcup_{B \in \beta} B$ 。因为 $f(x) \in V$, 故由择一原则知, 存在 $B \in \beta$, 使得 $B \subset V$ 且 $f(x) \in B$ 。由条件 5), $f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(B^-))_s^\circ \subset (f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 。令 $U = (f^{-1}(B^-))_s^\circ$, 则 $x \in f^{-1}(B) \subset U$, 因此, $U \in \mathcal{U}_s(x)$ 且 $f(U) \subset f((f^{-1}(V^-))_s^\circ)$ 。从而由定理 4 知 f 是半弱连续映射。

定理 6 $f: X \rightarrow Y$ 是半弱连续映射当且仅当 $\forall A \subset X, f(A_s^-) \subset (f(A))_\theta^-$ 。

证明 设 f 是半弱连续映射, $A \subset X, y \in f(A_s^-)$, 则存在 $x \in A_s^-$ 使得 $y = f(x)$ 。对任意 $V \in \mathcal{U}^o(f(x))$, 存在 $U \in \mathcal{U}_s(x)$, 使 $U \subset (f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 。由 $x \in A_s^-$ 及定理 3 知, $U \cap A \neq \emptyset$, 得 $\emptyset \neq f(U \cap A) \subset f(U) \cap f(A) \subset f((f^{-1}(V^-))_s^\circ) \cap f(A) \subset f(f^{-1}(V^-)) \cap f(A) \subset V^- \cap f(A)$ 。所以 $y = f(x) \in (f(A))_\theta^-$ 。因此证明 $f(A_s^-) \subset (f(A))_\theta^-$ 。

反过来, 设定理条件成立, 下证 f 是半弱连续映射。对任意 $x \in X$, 任意 $V \in \mathcal{U}^o(f(x))$, 只需证 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ \in \mathcal{U}_s(x)$ 。事实上, 因为 $((f^{-1}(V^-))_s^\circ)' = ((f^{-1}(V^-))')_s^- = (f^{-1}(V'^-))_s^- = (f^{-1}(V'^o))_s^-$, 由定理条件知 $f[(f^{-1}(V'^o))_s^-] \subset [f(f^{-1}(V'^o))]_\theta^- \subset (V'^o)_\theta^- \subset V'^-$, 所以 $(f^{-1}(V'^-))_s^- \subset$

$f^{-1}(V^-)$ 。这说明 $f^{-1}(V) \subset ((f^{-1}(V^{\circ}))_s^-)' = ((f^{-1}(V^-))_s^-)' = (((f^{-1}(V^-))_s^-)')' = (f^{-1}(V^-))_s^{\circ}$ 。由 $x \in f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))_s^{\circ}$ 知, $(f^{-1}(V^-))_s^{\circ} \in \mathcal{U}_s(x)$ 。因此 f 是半弱连续映射。

定理 7 对映射 $f: X \rightarrow Y$, 下列叙述是等价的: 1) f 是半弱连续映射; 2) 对每个开集 $A \subset Y$, $f^{-1}(A) \subset (f^{-1}(A^-))_s^{\circ}$; 3) 对每个闭集 $B \subset Y$, $(f^{-1}(B^{\circ}))_s^- \subset f^{-1}(B)$ 。

证明 1) \Rightarrow 2)。定理 5 的 1) \Rightarrow 2) 已证。

2) \Rightarrow 3)。对每个闭集 $B \subset Y$, 则 $B' \subset Y$ 为开集, 由条件 2) 知 $f^{-1}(B') \subset (f^{-1}(B'^-))_s^{\circ}$ 。因为 $f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$ 且 $(f^{-1}(B'^-))_s^{\circ} = (f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ} = ((f^{-1}(B^{\circ}))')_s^{\circ} = ((f^{-1}(B^{\circ}))_s^-)'$, 所以有 $(f^{-1}(B^{\circ}))_s^- \subset f^{-1}(B)$, 即证。

3) \Rightarrow 1)。对任意 $x \in X, V \in \mathcal{U}(f(x))$, 根据条件 3), 有 $(f^{-1}(V^{\circ}))_s^- \subset f^{-1}(V)$, 因为 $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V^-))'$ 且 $(f^{-1}(V^{\circ}))_s^- = (f^{-1}(V'^-))_s^- = ((f^{-1}(V^-))')_s^- = ((f^{-1}(V^-))_s^{\circ})'$, 所以有 $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V^-))_s^{\circ}$ 。令 $U = (f^{-1}(V^-))_s^{\circ}$, 则 $x \in U \subset (f^{-1}(V^-))_s^{\circ}$ 。因此 $U \in \mathcal{U}_s(x)$, 且 $f(U) \subset f((f^{-1}(V^-))_s^{\circ})$, 由定义 10 知 f 是半弱连续映射。

定理 8 对于任意 $A \subset X, A_s^- = A \cup A^{\circ}$ 。

证明 因为 A_s^- 是半闭集, 所以 $A^{\circ} \subset (A_s^-)^{\circ} \subset A_s^-$, 因此有 $A_s^- \supset A \cup A^{\circ}$ 。下面证明 $A_s^- \subset A \cup A^{\circ}$, 注意到 $A^{\circ} \subset A \cup A^{\circ} \subset A^-$, 这表明 $A \cup A^{\circ}$ 是半闭集, 所以有 $A_s^- \subset A \cup A^{\circ}$ 。综上, 即证 $A_s^- = A \cup A^{\circ}$ 。

定理 9 对于任意 $A \subset X, A_s^{\circ} = A \cap A^{\circ-}$ 。

证明 因为 A_s° 是半开集, 所以 $A_s^{\circ} \subset (A_s^{\circ})^{\circ-} \subset A^{\circ-}$, 因此 $A_s^{\circ} \subset A \cap A^{\circ-}$ 。下证引等式的反向包含关系。注意到 $A^{\circ} \subset A \cap A^{\circ-} \subset A^{\circ-}$, 这表明了 $A \cap A^{\circ-}$ 是半开集, 因此 $A \cap A^{\circ-} \subset A_s^{\circ}$ 。

定理 10 对于映射 $f: X \rightarrow Y$, 下列叙述是等价的: 1) f 是半弱连续映射; 2) 对于每个开集 $A \subset Y, f^{-1}(A) \subset (f^{-1}(A^-))_s^{\circ-}$; 3) 对于每个闭集 $B \subset Y, (f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ-} \subset f^{-1}(B)$ 。

证明 1) \Rightarrow 2)。令 $A \subset Y$ 为开集。因为 f 是半弱连续映射, 由定理 7 得出, $f^{-1}(A) \subset (f^{-1}(A^-))_s^{\circ}$ 。所以由定理 9 得出, $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A^-) \cap f^{-1}(A^-)^{\circ-}$ 。因此, $f^{-1}(A) \subset (f^{-1}(A^-))_s^{\circ-}$ 。

2) \Rightarrow 3)。令 $B \subset Y$ 为闭集, 则 $B' \subset Y$ 为开集, 由条件 2) 知 $f^{-1}(B') \subset (f^{-1}(B'^-))_s^{\circ-}$, 又因为 $f^{-1}(B') = (f^{-1}(B))'$ 且 $(f^{-1}(B'^-))_s^{\circ-} = (f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ-} = (f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ-} = (f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ-} = (f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ-}$, 所以 $(f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ-} \subset f^{-1}(B)$ 。

3) \Rightarrow 1)。令 $B \subset Y$ 为闭集, 则 $(f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ-} \subset f^{-1}(B)$, 又 $f^{-1}(B^{\circ}) \subset f^{-1}(B)$, 由定理 8, 有 $(f^{-1}(B^{\circ}))_s^- = f^{-1}(B^{\circ}) \cup (f^{-1}(B^{\circ}))_s^{\circ-} \subset f^{-1}(B)$, 所以由定理 7 得出 f 是半弱连续映射。

接下来, 为讨论半弱连续映射与连通的关系, 引入半隔离集和半连通的概念。

定义 11^[2] 如果 $A, B \subset X, A, B \neq \emptyset$, 且 $A \cap B_s^- = A_s^- \cap B = \emptyset$, 则 A 和 B 称为半隔离集。

定义 12^[2] $A \subset X$ 称为半连通的, 如果 A 不是两个半隔离集的并集。

定理 11 如果映射 $f: X \rightarrow Y$ 是半弱连续满射且 X 是半连通的, 则 Y 是连通的。

证明 反证法。设 Y 是不连通的, 则存在着在 Y 中的非空开集 V_1, V_2 , 使得 $Y = V_1 \cup V_2$ 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ 。因此 $f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = X$ 且 $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$ 。因为 f 是半弱连续的且是满射的, 由定理 10 得出 $\emptyset \neq f^{-1}(V_i) \subset (f^{-1}(V_i^-))_s^{\circ-}, i = 1, 2$ 。但 V_i 是既开且闭的, 所以 $f^{-1}(V_i) \subset (f^{-1}(V_i))_s^{\circ-}, i = 1, 2$ 。因此 $f^{-1}(V_i)$ 是半开集, $i = 1, 2$ 。这与 X 是半连通的假设矛盾, 因此 Y 是连通的。

紧接着, 为了研究半弱连续映射在网上的性质, 先将网的几个基本定义进行推广。

定义 13 设 X 是拓扑空间, $S = \{S(n) \mid n \in D\}$ 是 X 中的网, $x \in X$ 。如果 $\forall U \in \mathcal{U}_s(x)$, 存在 $n_0 \in D$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $S(n) \in U$, 则称网 S 半收敛于 x , 或称 x 是网 S 的半极限点。

定理 12 设 A 是拓扑空间 X 的子集, 则 $x \in A_s^-$ 当且仅当存在 A 的网 S 半收敛于 x 。

证明 充分性。设 $S = \{S(n) \mid n \in D\}$ 是 A 中的网且网 S 半收敛于 x 。根据定义 13 有, $\forall U \in$

$\mathcal{U}_s(x)$, 存在 $n_0 \in D$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $S(n) \in U$, 由于 $\forall n \in D, S(n) \in A$, 所以 $U \cap A \neq \emptyset$, 从而 $x \in A_s^-$ 。

必要性。 $\forall x \in A_s^-$, 由定理3, $\forall V \in \mathcal{U}_s(x), V \cap A \neq \emptyset$, 取 $S(V) \in V \cap A$, 且 $\forall A, B \in \mathcal{U}_s(x)$, 定义 $A \leq B$ 当且仅当 $B \subset A$, 则 $\mathcal{U}_s(x)$ 按序关系 “ \leq ” 构成定向集, 从而 $S = \{S(V) \in A \cap V \mid V \in \mathcal{U}_s(x)\}$ 是 A 中的网。下面验证网 S 半收敛于 x 。事实上, $\forall U \in \mathcal{U}_s(x)$, 由于 $\mathcal{U}_s(x)$ 是定向集, 所以存在 $V \in \mathcal{U}_s(x)$ 且 $V \geq U$, 即 $V \subset U$ 。由于 $S(V) \in V$, 所以 $S(V) \in U$, 因此网 S 半收敛于 x 。

定义 14^[1] 设 $S = \{S(n) \mid n \in D\}$ 是拓扑空间 X 中的网, $x \in X$ 。如果 $\forall U \in \mathcal{U}(x)$, 存在 $n_0 \in D$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $S(n) \in U^-$, 则称网 S 是 θ -收敛于 x 。

定理 13 设 $f: X \rightarrow Y$ 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射, 则 f 是半弱连续映射当且仅当 $\forall x \in X$, 对 X 中任意半收敛于 x 的网 $S = \{S(n) \mid n \in D\}$, $f(S)$ θ -收敛于 $f(x)$ 。

证明 必要性。设 f 是半弱连续映射, $x \in X, S = \{S(n) \mid n \in D\}$ 是 X 中半收敛于 x 的网。对任意 $V \in \mathcal{U}^\circ(f(x))$, 则 $(f^{-1}(V))_s^\circ \in \mathcal{U}_s(x)$ 。所以存在 $n_0 \in D$, 当 $n \geq n_0$ 时, 有 $S(n) \in (f^{-1}(V))_s^\circ$ 。这说明 $S(n) \in f^{-1}(V^-)$ 。由此可得 $f(S(n)) \in V^-$, 因此 $f(S)$ θ -收敛于 $f(x)$ 。

充分性。为了证明 f 是半弱连续映射, 由定理6, 只需证明 $\forall A \subset X, f(A_s^-) \subset (f(A))_\theta^-$ 。设 $y \in f(A_s^-)$, 则存在 $x \in A_s^-$ 使 $y = f(x)$ 。根据定理12, 存在 A 中的网 $S = \{S(n) \mid n \in D\}$ 半收敛于 x 。由定理条件, $f(S)$ θ -收敛于 $f(x)$, 于是 $y = f(x) \in (f(A))_\theta^-$ 。这就证明 $f(A_s^-) \subset (f(A))_\theta^-$ 。

3 半弱连续映射与其他几种弱形式连续映射的关系

定理 14 设 $f: X \rightarrow Y$ 是连续映射, 则 f 也是半弱连续映射。

证明 $\forall x \in X$, 设 V 是包含 $f(x)$ 的任一开集, 因为 f 是连续映射, 所以 $f^{-1}(V)$ 是 x 的开邻域, 从而 $f^{-1}(V)$ 也是 x 的半开邻域, 所以 $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V))_s^\circ$ 。又因为 $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V^-)$, 进而得到 $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V))_s^\circ \subset (f^{-1}(V^-))_s^\circ$, 所以推出 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 也是 x 的半邻域, 这就证明了 f 也是半弱连续映射。但反之不成立, 设 $f: X \rightarrow Y$ 是半连续映射, 则 f 不是连续映射。

例 1 设 $X = Y = [0, 1]$ 并取通常拓扑。令 $f: X \rightarrow Y$ 为: $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$, 则 f 是 X 到 Y 的半连续而不连续的映射。

定理 15 设 $f: X \rightarrow Y$ 是半弱连续映射, Y 是正则空间, 则 f 是半连续映射。

证明 $\forall x \in X$, 设 V 是包含 $f(x)$ 的任一开集, 因为 Y 是正则空间, 所以存在开集 U , 使 $f(x) \in U \subset U^- \subset V$ 。而由假设, f 是半弱连续映射, 所以 $(f^{-1}(U))_s^\circ$ 是 x 的半开邻域。又因为 $(f^{-1}(U))_s^\circ \subset f^{-1}(U^-)$, 从而 $f^{-1}(U^-)$ 是 x 的半邻域, 又因为 $U^- \subset V$, 所以 $f^{-1}(U^-) \subset f^{-1}(V)$, 进而 $f^{-1}(V)$ 也是 x 的半邻域, 这就证明了 f 是半连续映射。

定理 16 设 $f: X \rightarrow Y$ 是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的映射, 若对 Y 中任一开集 $V, f^{-1}(\partial V)$ 总是 X 中的闭集, 则 f 是半弱连续映射当且仅当 f 是连续映射, 这里 ∂V 表示 V 的边界。

证明 充分性。设 $\forall x \in X, V$ 是包含 $f(x)$ 的任一开集。由假设 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 是 x 的半开邻域, 所以存在开集 G , 使 $x \in G \subset (f^{-1}(V^-))_s^\circ \subset G^-$ 。因为 $V^- = V \cup \partial V, V \cap \partial V = \emptyset$, 故 $x \in f^{-1}(V), x \notin f^{-1}(\partial V)$ 。令 $U = G \setminus f^{-1}(\partial V)$, 则由 $f^{-1}(\partial V)$ 是 X 中的闭集知, $U = G \cap (f^{-1}(\partial V))'$ 是开集且 $x \in U, U \subset f^{-1}(V^-) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(\partial V)$ 。于是 $x \in U \subset f^{-1}(V)$, 所以 $f^{-1}(V)$ 是 x 的邻域, 这就证明了 f 是连续映射。又由定理14知必要性成立。

当然, 由于连续映射是半连续映射也是弱连续映射, 所以有以下的推论1和推论2。

推论 1 设 $f: X \rightarrow Y$ 是半弱连续映射, 若对 Y 中任一开集 $V, f^{-1}(\partial V)$ 总是 X 中的闭集, 则 f 是半连续映射, 这里 ∂V 表示 V 的边界。

推论 2 设 $f: X \rightarrow Y$ 是半弱连续映射, 若对 Y 中任一开集 $V, f^{-1}(\partial V)$ 总是 X 中的闭集, 则 f 是弱连续映射, 这里 ∂V 表示 V 的边界。

定理 17 设 $f: X \rightarrow Y$ 是半连续映射, 则 f 也是半弱连续映射。

证明 $\forall x \in X$, 设 V 是包含 $f(x)$ 的任一开集, 因为 f 是半连续映射, 所以 $f^{-1}(V)$ 是 x 的半开邻域, 从而有 $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V))_s^\circ$ 。又因为 $f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V^-)$, 进而得到 $f^{-1}(V) = (f^{-1}(V))_s^\circ \subset (f^{-1}(V^-))_s^\circ$, 故 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 也是 x 的半开邻域, 即 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 是 x 的半邻域, 这就证明了 f 也是半弱连续映射。

定理 18 设 $f: X \rightarrow Y$ 是弱连续映射, 则 f 也是半弱连续映射。

证明 $\forall x \in X$, 设 V 是包含 $f(x)$ 的任一开集, 因为 f 是弱连续映射, 所以 $(f^{-1}(V^-))^\circ$ 是 x 的邻域, 而 $(f^{-1}(V^-))^\circ \subset (f^{-1}(V^-))_s^\circ$, 所以 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 也是 x 的邻域, 即 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 是 x 的半邻域, 这就证明了 f 也是半弱连续映射。

定理 19 设 $f: X \rightarrow Y$ 是半弱连续映射, 则 f 也是弱半连续映射。

证明 $\forall x \in X$, 设 V 是包含 $f(x)$ 的任一开集, 因为 f 是半弱连续映射, 所以 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ$ 是 x 的半邻域, 而 $(f^{-1}(V^-))_s^\circ \subset f^{-1}(V^-)$, 故 $f^{-1}(V^-)$ 也是 x 的半邻域, 这就证明了 f 也是弱半连续映射。

最后, 本文用一个图表描述半弱连续映射与其他几种连续映射的关系, 如图 1 所示。

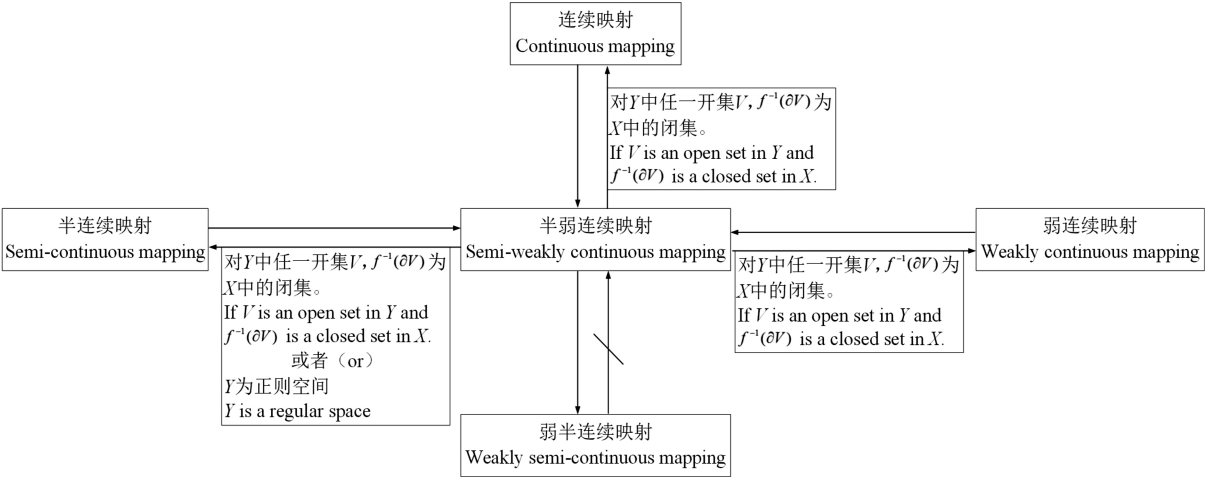


图 1 半弱连续映射与其他几种连续映射的关系

Fig. 1 Relationship between semi-continuous mapping and other continuous mapping

[参考文献]

[1] 程吉树, 陈水利. 点集拓扑学 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[2] ASHISH KAR. Properties of weakly semi-continuous functions [J]. Soochow Journal of Mathematics, 1989, 16(1): 65-77.

[3] 冯华容, 寇辉. T_0 拓扑空间的拟连续性与交连续性 [J]. 四川大学学报 (自然科学版), 2017, 54(5): 905-910.

[4] 靳敏倩, 朱培勇. 关于 R -半拓扑空间中连续性的一些结果 [J]. 四川理工学院学报 (自然科学版), 2018, 31(3): 96-100.

[5] 李阳. 广义拓扑空间中的开集与连续性的研究 [D]. 成都: 电子科技大学, 2016.

[6] CHEN S L, CHENG J S. The characterizations of semicontinuous and irresolute order-homomorphisms on fuzzes [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 63(6): 517-524.

[7] 程吉树. δ 连续序同态的若干性质 [J]. 模糊系统与数学, 1988, 11(4): 38-41.

[8] CHENG J S, CHEN S L. Properties of theta-continuous order homomorphisms [C] //IEEE. Sixth International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Hong Kong: IEEE, 2007: 2405-2410.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)