

# 周期随机捕食-食饵系统的周期解的存在性

黄幼林, 魏春金, 张树文

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 利用随机分析的方法, 研究捕食者具有 Holling II 增长函数的周期随机捕食-食饵系统的周期解的存在性。通过李雅普诺夫泛函方法证明, 对于给定的任意正初始值, 系统都存在唯一的全局正解。给出系统存在非平凡的正周期解的充分条件, 得到系统持久性与灭绝的充分条件。最后, 给出数值模拟来验证主要结果。

[关键词] 捕食-食饵系统; Holling II 增长函数; 全局正解; 存在唯一性; 周期解; 持久与灭绝

[中图分类号] O 175

## The Existence of Periodic Solution of Periodic Stochastic Predator-Prey Model

HUANG Youlin, WEI Chunjin, ZHANG Shuwen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** In this paper, the existence of periodic solutions for a periodic stochastic predator-prey model with Holling II growth function in the predator was studied by stochastic analysis. It was proved that the system had a unique global positive solution for any given positive initial value by the Lyapunov functional method. Then some sufficient conditions for the existence of nontrivial positive periodic solutions were given, and the persistence and extinction of the population were proved. Finally, some numerical simulations were given to verify the main results.

**Keywords:** predator-prey system; Holling II growth function; global positive solution; the existence and uniqueness; periodic solution; persistence and extinction

## 0 引言

近年来, 种群关系是生物数学研究的一个方向, 对捕食-食饵模型的研究已经成为生物数学领域的热点之一, 许多学者对其进行了深入的研究, 并取得丰富的成果<sup>[1-4]</sup>。但实际上, 各种随机干扰随处可见, 它是生态系统中必不可少的重要组成部分。出生率、死亡率、环境最大承载量和其他参数都会受随机扰动的影响<sup>[5]</sup>。具有随机扰动的种群动力系统具有丰富的动力学行为, 因此受到生物数学研究者的青睐。

在实际的生态系统中, 周期现象普遍存在。比如种群受到昼夜更替、四季更替、个体生命周期、

[收稿日期] 2019-12-16

[基金项目] 国家自然科学基金项目(11971405); 福建省自然科学基金项目(2018J01418); 集美大学国家自然科学基金培育项目(ZP2020064)

[作者简介] 黄幼林(1995—), 女, 硕士生, 从事生物数学方向研究。通信作者: 张树文(1963—), 男, 教授, 硕导, 从事生物数学方向研究。E-mail: zhangsw\_123@163.com

食物供应等的影响<sup>[6]</sup>, 出生率、死亡率和其他系数并不是保持一成不变的, 而是可能会呈现一定的周期性<sup>[5]</sup>。因此, 研究具有周期系数的动力学系统也是非常重要的。

文献 [7] 在研究害虫管理时提出了一个捕食-食饵模型假设: 随着食饵密度的增加, 捕食者种群将会逐渐消耗更小比例的食饵。该基础模型为

$$\begin{cases} dx = x(r - by) dt, \\ dy = y[\lambda bx/(1 + b hx) - d] dt, \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x, y$  分别表示食饵和捕食者在  $t$  时刻的种群密度;  $r$  表示食饵的内禀增长率;  $b$  表示捕食者的捕获率;  $d$  表示捕食者的死亡率;  $\lambda bx/(1 + b hx)$  是 Holling II 功能反应函数,  $\lambda$  和  $h$  分别表示营养转化率和处理时间; 所有参数都是正数。文献 [7-9] 在这个基础模型上考虑脉冲作用, 进一步研究了系统的种群动力学行为。基于模型 (1) 和上述工作, 考虑了密度制约项, 即

$$\begin{cases} dx = x(r - rx/K - by) dt, \\ dy = y[\lambda bx/(1 + b hx) - d] dt, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $K > 0$  表示最大环境容纳量。Sun 等<sup>[2]</sup> 在系统 (2) 中考虑经济阈值, 研究系统的动力学性质, 对害虫管理提供了一定的参考。

本文考虑下列带有密度制约与随机干扰的捕食-食饵模型的非自治系统, 有

$$\begin{cases} dx = x[r(t) - r(t)x/K(t) - b(t)y] dt + \sigma_1(t)x dB_1(t), \\ dy = y[\lambda(t)b(t)x/(1 + b(t)h(t)x) - u(t)y - d(t)] dt + \sigma_2(t)y dB_2(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中:  $\sigma_i^2 (i = 1, 2)$  表示白噪声强度;  $B_1(t), B_2(t)$  是相互独立的标准布朗运动;  $r(t), K(t), b(t), \lambda(t), h(t), u(t), d(t), \sigma_1(t), \sigma_2(t)$  均为正的、有界的、连续的正  $T$  周期函数。

文中, 总假设  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$  是一个带有滤子  $\mathcal{F}_t$  并且满足通常条件 (即  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  是右连续单调递增, 且  $\mathcal{F}_0$  包含所有零测集) 的完备概率空间。

## 1 预备知识

给出本文所需要的一些记号如下: 1)  $\mathbf{R}_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ ; 2) 对于一个在  $\mathbf{R}_+$  上连续有界的函数  $f(t)$ , 定义  $\check{f} = \inf_{t \in \mathbf{R}_+} f(t)$ ,  $\hat{f} = \sup_{t \in \mathbf{R}_+} f(t)$ ; 3) 对于一个在  $t \in [0, \infty)$  的函数  $z(t)$ , 定义  $\langle z(t) \rangle^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t z(s) ds$ ,  $\langle z(t) \rangle_* = \liminf_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t z(s) ds$ ; 4) 定义  $m_1 = T^{-1} \int_0^T [r(s) - \sigma_1^2(s)/2] ds$ ,  $m_2 = T^{-1} \int_0^T [\hat{\lambda}/\hat{h} - \sigma_2^2(s)/2 - d(s)] ds$ ,  $\lambda_1 = \hat{\lambda}b(\hat{r} + \check{r}) - 4\check{r}m_2/\hat{K}$ ,  $\lambda_2 = \check{u}\check{h}m_1/(\hat{\lambda} - \check{d}\hat{h}) - \hat{b}$ 。

随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t) dt + g(x(t), t) dB(t) \quad (4)$$

的解记作  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) (t \geq 0)$ , 其中:  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$ ;  $g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}^{n \times m})$ ;  $B(t)$  是  $n$  维布朗运动。

**定理 1**<sup>[10]</sup> (存在唯一性定理) 假设  $f(x(t), t)$  和  $g(x(t), t)$  关于  $x(t)$  满足下列条件: 1) 局部 Lipschitz 条件, 存在  $c_k > 0 (k = 1, 2, \dots)$ , 使得  $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$  且  $|x| \vee |y| \leq k$  有不等式  $|f(x, t) - f(y, t)| \vee |g(x, t) - g(y, t)| \leq c_k |x - y|$  成立; 2) 线性增长条件, 存在  $c > 0$ , 使得  $|f(x, t)| \vee |g(x, t)| \leq c(1 + |x|)$ ,  $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ , 则初始条件为  $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$  的系统 (4) 存在唯一连续的局部解  $x(t) (t \in [0, \tau_e), \tau_e$  是爆破时间)。

**定理 2**<sup>[10]</sup> (Itô 公式) 设  $x(t) (t \geq 0)$  是 Itô 过程, 其随机微分为  $dx(t) = f(t) dt + g(t) dB(t)$ , 其中:  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^n)$ ;  $g \in \mathcal{L}^2(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^{n \times m})$ 。若  $V(x(t), t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R})$ , 则  $V(x(t), t)$  仍然是

Itô 过程, 具有如下随机微分:  $dV(x(t), t) = V_t(x(t), t)dt + V_x(x(t), t)dx(t) + dx^T(t)V_{xx}(x(t), t)dx(t)/2$ 。

**定义 1**<sup>[11-12]</sup> 设  $x(t)$  是系统 (3) 的任意解, 则: 1) 若  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , 则称种群  $x(t)$  灭绝; 2) 若  $\langle x(t) \rangle^* > 0$ , 则称种群  $x(t)$  弱平均持久; 3) 若  $\langle x(t) \rangle_* > 0$ , 则称种群  $x(t)$  强平均持久。

**引理 1**<sup>[13]</sup> 设  $M = \{M_t\}_{t \geq 0}$  是一个实值连续局部鞅, 则有: 1) 如果  $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle M, M \rangle_t = \infty$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} [M_t / \langle M, M \rangle_t] = 0$ ; 2) 如果  $\limsup_{t \rightarrow \infty} [\langle M, M \rangle_t / t] = \infty$ , 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} (M_t / t) = 0$ 。

**引理 2**<sup>[14-15]</sup> 对  $x \in C[0, \infty) \times \Omega, (0, \infty))$ , 存在  $F \in C[0, \infty) \times \Omega, \mathbf{R}]$  及  $\lim_{t \rightarrow \infty} (F(t)/t) = 0$ 。1) 如果对任意的  $t \geq 0$ , 存在常数  $\lambda$  和正常数  $T, \lambda_0$ , 使得对所有的  $t \geq T$ , 都有  $\ln x(t) \leq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t x(s)ds + F(t)$ , 则  $\begin{cases} \langle x(t) \rangle^* \leq \lambda / \lambda_0, & \text{如果 } \lambda \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, & \text{如果 } \lambda < 0 \end{cases}$ ; 2) 如果对任意的  $t \geq 0$ , 存在常数  $\lambda$  和正

常数  $T, \lambda_0$ , 使得对所有的  $t \geq T$ , 几乎都有  $\ln x(t) \geq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t x(s)ds + F(t)$ , 则  $\langle f(t) \rangle^* \geq \lambda / \lambda_0$ 。

考虑方程

$$X(t) = X(t_0) + \int_0^t b(s, X(s))ds + \sum_{r=1}^k \int_{t_0}^t \sigma_r(s, X(s))dB_r(s), X \in \mathbf{R}^l. \quad (5)$$

假设下列条件成立:

$$|b(s, X) - b(s, Y)| + \sum_{r=1}^k |\sigma_r(s, X) - \sigma_r(s, Y)| \leq B|X - Y|, \quad (6)$$

$$|b(s, X)| + \sum_{r=1}^k |\sigma_r(s, X)| \leq B(1 + |X|), \quad (7)$$

其中  $B$  是一个常数。

**引理 3**<sup>[16]</sup> 设方程 (5) 的所有系数关于  $t$  是  $T$  周期的, 且在每个柱形  $I \times U$  中条件 (6) 和 (7) 成立, 并且假设存在一个  $C^2$ -函数  $V(t, x)$  关于  $t$  是  $T$  周期的, 且下列条件在某个紧集外成立:

$$\inf_{|x| > \mathbf{R}} V \rightarrow \infty, \mathbf{R} \rightarrow \infty, \quad (8)$$

$$LV(t, x) \leq -1, \quad (9)$$

则方程 (5) 存在一个  $T$  周期解, 即该解是一个  $T$  周期的 Markov 过程。

## 2 主要结果及其证明

**定理 3** 对任意给定的初值  $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$ , 系统 (3) 在  $t \in [0, \infty)$  上存在唯一正解  $(x(t), y(t))$ , 并且该解以概率 1 存在于  $\mathbf{R}_+^2$  中。

**证明** 首先考虑如下方程

$$\begin{cases} du(t) = [r(t) - r(t)e^{u(t)}/K(t) - b(t)e^{v(t)} - \sigma_1^2(t)/2]dt + \sigma_1(t)dB_1(t), \\ dv(t) = [\lambda(t)b(t)e^{u(t)}/(1 + b(t)h(t)e^{u(t)}) - u(t)e^{v(t)} - d(t) - \sigma_2^2(t)/2]dt + \sigma_2(t)dB_2(t), \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $u(0) = \ln x(0), v(0) = \ln y(0)$ 。显然, 系统 (10) 满足局部 Lipschitz 条件, 则系统存在唯一的局部解  $(u(t), v(t)) \in \mathbf{R}_+^2, t \in [0, \tau_e)$ , 其中  $\tau_e$  是爆破时间。由 Itô 公式得,  $(x(t), y(t)) = (e^{u(t)}, e^{v(t)})$  是模型 (3) 存在满足初始条件  $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$  的唯一局部解。为了证明该解是全局的, 只需证明  $\tau_e = +\infty$ 。

令  $k_0 > 0$  足够大, 使得  $(x(t), y(t)) \in D_k = [1/k_0, k_0] \times [1/k_0, k_0]$ , 对于任意的正数  $k \geq k_0$ , 定义一个停时序列  $\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e) : \min\{x(t), y(t)\} \leq 1/k \text{ 或 } \max\{x(t), y(t)\} \geq k\}$ 。定义  $\inf \emptyset = \infty$  ( $\emptyset$  代表一个空集)。显然, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\tau_k$  是单调递增的, 且  $\tau_k < \tau_e$ , 因此有  $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$ , 其中

$\tau_\infty \leq \tau_e$ , 本文只需证明  $\tau_\infty \rightarrow \infty$ 。

假设  $\tau_\infty \rightarrow \infty$  成立, 否则存在常数  $T > 0$ ,  $\varepsilon \in (0, 1)$  和一个正整数  $k_1 \geq k_0$ , 有  $P\{\tau_k \leq T\} \geq \varepsilon$ ,  $\forall k \geq k_1$ 。

定义一个非负  $C^2$ -函数  $V(x, y): \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ , 使  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \setminus D_k} V(x, y) = +\infty$  和  $LV(x, y) \leq M$  成立, 其中  $M$  是一个正常数。令  $V(x, y) = (x + 1 - \ln x) + (y + 1 - \ln y)$ 。则由 Itô 公式可得  $dV = LV dt + \sigma_1(t)(x - 1)dB_1(t) + \sigma_2(t)(y - 1)dB_2(t)$ , 其中,

$$LV = r(t)x - r(t)x^2/K(t) - b(t)xy - r(t) + r(t)x/K(t) + b(t)y + \lambda(t)b(t)xy/(1 + b(t)h(t)x) - u(t)y^2 - d(t)y + u(t)y - \lambda(t)b(t)x/(1 + b(t)h(t)x) + d(t) + \sigma_1^2(t)/2 + \sigma_2^2(t)/2 \leq (\hat{r} + \hat{r}/\hat{K})x + (\hat{b} + \hat{\lambda}/\hat{h} + \hat{u})y + \hat{d} - \check{r} + \hat{\sigma}_1^2/2 + \hat{\sigma}_2^2/2。$$

根据文献 [16] 中的引理 4.1 得  $x_i \leq 2(x_i + 1 - \ln x_i) - (4 - 2 \ln 2) \leq 2(x_i + 1 - \ln x_i)$ 。因此, 不等式  $(\hat{r} + \hat{r}/\hat{K})x + (\hat{b} + \hat{\lambda}/\hat{h} + \hat{u})y \leq 2(\hat{r} + \hat{r}/\hat{K})(x + 1 - \ln x) + 2(\hat{b} + \hat{\lambda}/\hat{h} + \hat{u})(y + 1 - \ln y)$  成立。

令  $C_1 = \hat{d} - \check{r} + \hat{\sigma}_1^2/2 + \hat{\sigma}_2^2/2$  和  $C_2 = \max\{\hat{r} + \hat{r}/\hat{K}, \hat{b} + \hat{\lambda}/\hat{h} + \hat{u}\}$ , 并取  $C_3 = \max\{C_1, 2C_2\}$ , 故  $dV \leq C_3(V + 1)dt + \sigma_1(t)(x - 1)dB_1(t) + \sigma_2(t)(y - 1)dB_2(t)$ 。将上式从 0 到  $\tau_k \wedge T$  积分并取期望以及应用 Grownwall 不等式得,

$$EV(x(\tau_k \wedge T), y(\tau_k \wedge T)) \leq V(x(0), y(0)) + E \int_0^{\tau_k \wedge T} C_3[V(x(s), y(s)) + 1] ds \leq$$

$$V(x(0), y(0)) + C_3T + C_3 \int_0^{\tau_k \wedge T} EV(x(s), y(s)) ds \leq [V(x(0), y(0)) + C_3T]e^{C_3T} = M。$$

因此,  $V(x(\tau_k \wedge T), y(\tau_k \wedge T)) \geq (k - 1 - \ln k) \wedge (1/k - 1 - \ln 1/k)$ 。则  $M \geq E[1_{\Omega_k}(\theta)V(x(\tau_k \wedge T), y(\tau_k \wedge T))] \geq \varepsilon([k - 1 - \ln k] \wedge [1/k - 1 - \ln 1/k])$ , 其中  $1_{\Omega_k}(\theta)$  是在  $\Omega_k$  上的一个指示函数。令  $k \rightarrow \infty$ , 则  $\infty > M = \infty$ 。这与假设相矛盾, 证毕。

**定理 4** H1)  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ; H2)  $\lambda_1 > 0$ ,  $(\lambda_1/\hat{\lambda}\hat{b})^2 > (\hat{r} + \check{r})^2/8 - \check{r}^2\check{K}m_1/(2\hat{r}\hat{K})$ ; H3)  $\lambda_2 > 0$ ,  $\check{r}\check{K}\lambda_2/\hat{r} > 4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}(\hat{u} - \check{u}\check{h}m_2/(\hat{\lambda} - \check{d}\check{h}))$ , 若条件 H1) ~ H3) 成立, 则系统 (3) 存在一个正  $T$  周期解。

**证明** 根据引理 3, 只要找到一个  $C^2$ -函数  $V(t, x, y)$  和一个闭集  $U \in \mathbf{R}_+^2$ , 使式 (8) 和式 (9) 成立即可。定义一个非负的  $C^2$ -函数  $V(t, x, y) = x - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1} \ln x + \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}\omega_1 - 4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2} \ln y + 4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}\omega_2 + py = V_1 + V_2 + V_3$ , 其中:  $V_1 = x - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1} \ln x + \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}\omega_1$ ;  $V_2 = -4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2} \ln y + 4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}\omega_2$ ;  $V_3 = py$ ;  $p = 2\check{u}\check{h}^2(\hat{\lambda} - \check{d}\check{h})^{-2}(\check{r}\hat{K}m_1\hat{r}^{-1}/2 + 2\lambda_1m_2\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2})$ ;  $\omega_1(t)$  和  $\omega_2(t)$  是定义在  $[0, \infty)$  上的函数且满足  $\omega_1(t)' = r(t) - \sigma_1^2(t)/2 - m_1$ ,  $\omega_2(t)' = \hat{\lambda}/\check{h} - \sigma_2^2(t)/2 - d(t) - m_2$  和  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ 。容易证明  $\omega_1(t)$  和  $\omega_2(t)$  都是  $T$ -周期函数, 且  $\omega_1(t + T) - \omega_1(t) = 0$  和  $\omega_2(t + T) - \omega_2(t) = 0$ 。因此得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \setminus U_k} V(t, x, y) = +\infty$ , 其中  $U_k = \{(x, y): (x, y) \in (1/k, k) \times (1/k, k)\}$ 。所以  $V(t, x, y)$  是一个  $T$ -周期函数且满足式 (8)。下面只需要找到一个闭集  $U \in \mathbf{R}_+^2$ , 使当  $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \setminus U$  时, 有  $LV(t, x, y) \leq -1$  即可。由 Itô 公式得:

$$LV_1 = r(t)x - r(t)x^2/K(t) - b(t)xy - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}[r(t) - r(t)x/K(t) - b(t)y - \sigma_1^2(t)/2] + \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}\omega_1'(t) \leq -\check{r}\hat{K}^{-1}x^2 + \hat{r}x - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}r(t) + \check{r}x + \check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1}y + \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}\sigma_2^2(t)/2 + \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}\omega_2'(t) = -\check{r}\hat{K}^{-1}x^2 + (\check{r} + \hat{r})x + \check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1}y - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1,$$

$$LV_2 = -4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}[\lambda(t)b(t)x/(1 + b(t)h(t)x) - d(t) - u(t)y - \sigma_2^2(t)/2] + 4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}\omega_2'(t) \leq 4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}(\hat{\lambda}\hat{b}x/2 - \hat{\lambda}\check{h}^{-1}) + 4\lambda_1\hat{u}\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}y + 4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}(d(t) +$$



$$\sigma_2^2(t)/2 + \omega'_2(t) = 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1} x + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} y - 4\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} m_2,$$

$$LV_3 = p[\lambda(t)b(t)xy/(1+b(t)h(t)x) - d(t)y - u(t)y^2] \leq -\check{p}\check{u}y^2 + (p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})y.$$

因此,  $LV \leq -\check{r}\hat{K}^{-1}x^2 + (\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})x - \check{p}\check{u}y^2 + (\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})y - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1 - 4\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2$ 。定义一个闭集  $U_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : \varepsilon \leq x \leq 1/\varepsilon, \varepsilon \leq y \leq 1/\varepsilon\}$ , 其中  $\varepsilon$  是一个充分小的数, 使下列不等式成立:  $(\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})\varepsilon < [\check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1 + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2 - (\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})^2/(4\check{p}\check{u})]/2$ ;  $(\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})\varepsilon < [\check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1 + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2 - \hat{K}(\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})^2/(4\check{r})]/2$ ;  $-\check{r}/2\hat{K}\varepsilon^2 + K_3 < -1$ ;  $-\check{p}\check{u}/2\varepsilon^2 + K_4 < -1$ , 其中  $K_3$  和  $K_4$  都是正常数, 将在下面的证明中给出。定义:  $D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : 0 < x < \varepsilon\}$ ;  $D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : 0 < y < \varepsilon\}$ ;  $D_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : x > 1/\varepsilon\}$ ;  $D_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : y > 1/\varepsilon\}$ , 则  $\mathbf{R}_+^2 \setminus U_\varepsilon = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ 。现在证明对任意的  $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \setminus U_\varepsilon$ , 都有  $LV \leq -1$ 。

当  $(x, y) \in D_1$  时, 有  $LV \leq -\check{p}\check{u}[y - (\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})/(2\check{p}\check{u})]^2 + (\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})\varepsilon + (\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})^2/(4\check{p}\check{u}) - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1 - 4\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2 \leq (\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})^2/(8\check{p}\check{u}) - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1/2 - 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2 = K_1$ 。

由于  $\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d} - 2\sqrt{2\check{p}\check{u}(\check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1/2 + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2)} = 4\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}[\hat{u} - \check{u}h m_2/(\hat{\lambda} - \check{d}h)] - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}\lambda_2 < 0$ , 所以  $LV \leq K_1 < 0$ 。

当  $(x, y) \in D_2$  时, 有  $LV \leq -\check{r}\hat{K}^{-1}[x - \check{r}^{-1}\hat{K}(\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})/2]^2 + \check{r}^{-1}\hat{K}(\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})^2/4 + (\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})\varepsilon - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1 - 4\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2 \leq \check{r}^{-1}\hat{K}(\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})^2/8 - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1/2 - 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2$ 。因为  $K_2 = \check{r}^{-1}\hat{K}(\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})^2/8 - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1/2 - 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2 = \check{r}^{-1}\hat{K}[(\hat{r} + \check{r})^2/8 - \check{r}^2\hat{K}\hat{r}^{-1}\hat{K}^{-1}m_1/2 - (\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})^2] < 0$ , 所以  $LV < 0$ 。

当  $(x, y) \in D_3$  时, 有  $LV \leq -\check{r}x^2/(2\hat{K}) + K_3 \leq -\check{r}/(2\hat{K}\varepsilon^2) + K_3 < -1$ , 其中  $K_3 = \sup_{(x, y) \in \mathbf{R}^2} \{-\check{r}\hat{K}^{-1}x^2/2 + (\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})x - \check{p}\check{u}y^2 + (\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})y - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1 - 4\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2\}$ 。

当  $(x, y) \in D_4$  时, 有  $LV \leq -\check{p}\check{u}y^2/2 + K_4 \leq -\check{p}\check{u}/(2\varepsilon^2) + K_4 < -1$ 。其中  $K_4 = \sup_{(x, y) \in \mathbf{R}^2} \{-\check{r}\hat{K}^{-1}x^2 + (\check{r} + \hat{r} + 2\lambda_1 \hat{\lambda}^{-1} \hat{b}^{-1})x - \check{p}\check{u}y^2/2 + (\check{r}\hat{K}\hat{b}\hat{r}^{-1} + 4\lambda_1 \hat{u} \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2} + p\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - p\check{d})y - \check{r}\hat{K}\hat{r}^{-1}m_1 - 4\lambda_1 \hat{\lambda}^{-2} \hat{b}^{-2}m_2\}$ 。

令  $K_0 = \min\{K_1, K_2, -1\}$ , 则对任意的  $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \setminus U_\varepsilon$ , 都有  $LV \leq -1$ 。证毕。

**引理 4** 对任意给定的初值  $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$ , 系统 (3) 中的种群  $x(t)$  和  $y(t)$  有下列性质:  
 $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln x(t) \leq 0$ ;  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln y(t) \leq 0$ 。

**证明** 由系统 (3) 的第一个方程得:  $d \ln x = [r(t) - r(t)x/K(t) - b(t)y - \sigma_1^2(t)/2]dt + \sigma_1(t)dB_1(t) \leq (\hat{r} - \check{r}\hat{K}^{-1}x - \check{\sigma}_1^2/2)dt + \sigma_1(t)dB_1(t)$ 。

构造一个比较系统

$$\begin{cases} d \ln X = (\hat{r} - \check{r}\hat{K}^{-1}X - \check{\sigma}_1^2/2)dt + \sigma_1(t)dB_1(t), \\ X_0 = x(0). \end{cases}$$

则  $d(e' \ln X) = e'(\ln X + \hat{r} - \check{r}\hat{K}^{-1}X - \check{\sigma}_1^2/2)dt + e'\sigma_1(t)dB_1(t)$ 。两边同时从 0 到  $t$  积分, 得  $e' \ln X(t) -$

$$\ln X_0 = \int_0^t e^s [\ln X(s) + \hat{r} - \check{r}\hat{K}^{-1}X(s) - \check{\sigma}_1^2/2] ds + \int_0^t e^s \sigma_1(s) dB_1(s)。$$

令  $M_0(t) = \int_0^t e^s \sigma_1(s) dB_1(s)$ ，则二次变分  $\langle M_0(t), M_0(t) \rangle = \int_0^t e^{2s} \sigma_1^2(s) ds$ 。根据指数鞅不等式，对任意  $T_0 > 0$ ,  $c_1 > 0$  和  $c_2 > 0$ ，都有  $P\{\sup_{0 \leq t \leq T_0} [M_0(t) - c_1 \langle M_0(t), M_0(t) \rangle / 2] > c_2\} \leq e^{-c_1 c_2}$ 。

与文献 [17] 的方法相似，令  $T_0 = \lambda_0 v$ ,  $c_1 = \varepsilon e^{-\lambda_{0v}}$ ,  $c_2 = \theta e^{\lambda_{0v}} \varepsilon^{-1} \ln \lambda_0$ ，其中  $\lambda_0 \in \mathbf{N}$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\theta > 1$ ,  $v > 0$ 。由于  $\sum_{\lambda_0=1}^{\infty} \lambda_0^{-\theta} < \infty$ ，则  $P\{\sup_{0 \leq t \leq \lambda_{0v}} [M_0(t) - \varepsilon e^{-\lambda_{0v}} \langle M_0(t), M_0(t) \rangle / 2] > \theta \varepsilon^{-1} e^{\lambda_{0v}} \ln \lambda_0\} \leq \lambda_0^{-\theta}$ 。

应用 Borel-Cantalli 引理，存在  $\Omega_i \in \Omega(P(\Omega_i) = 1)$ ，使对任意常数  $\bar{w} \in \Omega_i$ ，都存在一个常数  $\lambda_i = \lambda_i(\bar{w})$ ，则对所有的  $\lambda_0 > \lambda_i$ ，都有  $M_0(t) \leq e^{-\lambda_{0v}} \langle M_0(t), M_0(t) \rangle / 2 + \theta \varepsilon^{-1} e^{\lambda_{0v}} \ln \lambda_0$ ,  $0 \leq t \leq \lambda_{0v}$ 。

令  $\Omega_0 = \cap_{i=1}^2 \Omega_i$  且  $P(\Omega_0) = 1$ 。对任意  $\bar{w} \in \Omega_0$ ，取  $\lambda_0(\bar{w}) = \max\{\lambda_i(\bar{w}), i = 1, 2, \dots, n\}$ 。因此  $M_0(t) \leq \varepsilon e^{-\lambda_{0v}} \langle M_0(t), M_0(t) \rangle / 2 + \theta \varepsilon^{-1} e^{\lambda_{0v}} \ln \lambda_0$ ,  $0 \leq t \leq \lambda_{0v}$  成立。所以对所有  $0 \leq t \leq \lambda_{0v}$ ，有  $e^t \ln X(t) - \ln X_0 \leq \int_0^t e^s [\ln X(s) + \hat{r} - \check{r}\hat{K}^{-1}X(s) + \hat{\sigma}_1^2 \varepsilon e^{-\lambda_{0v}} / 2 - \check{\sigma}_1^2 / 2] ds + \theta \varepsilon^{-1} e^{\lambda_{0v}} \ln \lambda_0$ 。

显然，对于所有  $t \in [0, \lambda_{0v}]$  与  $s \in [0, t]$ ， $\ln X(s) + \hat{r} - \check{r}\hat{K}^{-1}X(s) + \hat{\sigma}_1^2 \varepsilon e^{-\lambda_{0v}} / 2 - \check{\sigma}_1^2 / 2$  有上界。因此，存在  $K_1$  使得对任意  $0 \leq t \leq \lambda_{0v}$  与  $\lambda_0 = \lambda_0(\bar{w})$ ，有  $e^t \ln X(t) - \ln X_0 \leq K_1(e^t - 1) + \theta \varepsilon^{-1} e^{\lambda_{0v}} \ln \lambda_0$ 。容易得到  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln X(t) \leq 0$ 。因此，应用随机微分方程的比较定理得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln x(t) \leq 0$ 。

同理可证  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln y(t) \leq 0$ 。

**定理 5** 对任意给定的初值  $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$ ,  $(x(0), y(0))$  是系统 (3) 的任意解，i) 若  $\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle^* < 0$ ，则种群  $x(t)$  和  $y(t)$  均灭绝；ii) 若  $\langle (r(t) - \sigma_1^2(t)/2)_* > 0$ ,  $\langle \lambda(t)/h(t) - d(t) - \sigma_2^2(t)/2 \rangle^* < 0$ ，则种群  $x(t)$  是弱平均持久的， $y(t)$  是趋于灭绝的；iii) 若  $\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* > 0$ ,  $\hat{u}\hat{b}^{-1} \langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* - \check{r}\hat{u}\hat{K}\hat{b}^{-1} \check{r}^{-1} \check{K}^{-1} \langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle^* + \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* - 2 \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle^* > 0$ ，则  $x(t)$  是弱平均持久的，种群  $y(t)$  是强平均持久的。

**证明** i) 构造

$$\begin{cases} d \ln X = [r(t) - \check{r}\hat{K}^{-1}X - \sigma_1^2(t)/2] dt + \sigma_1(t) dB_1(t), \\ X_0 = x(0). \end{cases}$$

两边同时从 0 到  $t$  积分，得到  $\ln X(t) - \ln X_0 = \int_0^t [r(s) - \sigma_1^2(s)/2] ds - \check{r}\hat{K}^{-1} \int_0^t X(s) ds + \int_0^t \sigma_1(s) dB_1(s)$ 。

对任意充分小的  $\varepsilon_1 > 0$ ，存在  $T_1 > 0$ ，使当  $t > T_1$  时，有  $t^{-1} \int_0^t [r(s) - \sigma_1^2(s)/2] ds < (r(t) - \sigma_1(t)/2)^* + \varepsilon_1$ 。上式可以写为  $\ln X(t) - \ln X_0 \leq (\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle^* + \varepsilon_1)t - \check{r}\hat{K}^{-1} \int_0^t X(s) ds + \int_0^t \sigma_1(s) dB_1(s)$ 。

令  $M_1(t) = \int_0^t \sigma_1(s) dB_1(s)$ ，则由引理 1 得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} M_1(t) = 0$ 。由引理 2 及  $\varepsilon_1$  的任意性可知  $\langle X(t) \rangle^* \leq \check{r}^{-1} \hat{K} \langle r(t) - \sigma_1(t)/2 \rangle^*$ 。因此，由随机微分方程的比较定理得  $\langle x(t) \rangle^* \leq \langle X(t) \rangle^* < 0$ ，则  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ 。

下面证明捕食者  $y(t)$  的灭绝性。显然, 对任意充分小的  $\varepsilon_2$ , 存在  $T_2 > 0$ , 使当  $t > T_2$  时, 有  $t^{-1} \int_0^t x(s) ds < \varepsilon_2 / (\hat{\lambda} \hat{b})$ 。由系统 (3) 的第二个方程得  $[\ln y(t) - \ln y(0)] \leq (-\check{d} - \check{\sigma}_2^2/2 + \varepsilon_2)t - \check{u} \int_0^t y(s) ds + \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s)$ 。

令  $M_2(t) = \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s)$ 。则由引理 1 得到  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} M_2(t) = 0$ 。由引理 2 与  $\varepsilon_2$  的任意性得  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 。

ii) 对任意充分小的  $\varepsilon_3$ , 存在  $T_3 > 0$ , 使当  $t > T_3$  时, 有:  $t^{-1} \int_0^t [d(s) + \sigma_2^2(s)/2] ds \geq \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* - \varepsilon_3$ ;  $t^{-1} \int_0^t [\lambda(s)/h(s) - d(s) - \sigma_2^2(s)/2] ds \leq \langle \lambda(t)/h(t) - d(t) - \sigma_2^2(t)/2 \rangle^* + \varepsilon_3$ 。

要证明种群  $x(t)$  是弱平均持久的, 只需证明存在  $m > 0$ , 使系统 (3) 的任意解都满足  $\langle x(t) \rangle^* \geq m$  即可。假设该结论不成立, 则有  $-\langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* + (1 + \hat{\lambda} \hat{b}) \varepsilon_3 < 0$ ,  $\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* - (1 + \hat{r} \check{K}^{-1}) \varepsilon_3 > 0$ 。

由于  $t^{-1} [\ln \bar{y}(t) - \ln \bar{y}(0)] \leq t^{-1} \int_0^t [-d(s) - \sigma_2^2(s)/2] ds + t^{-1} \hat{\lambda} \hat{b} \int_0^t \bar{x}(s) ds + t^{-1} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s)$ , 则  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \bar{y}(t) \leq -\langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* + (1 + \hat{\lambda} \hat{b}) \varepsilon_3 < 0$ , 所以  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{y}(t) = 0$ 。

同时得到  $d \ln \bar{x} = [r(t) - r(t) \bar{x}/K(t) - b(t) \bar{y} - \sigma_1^2(t)/2] dt + \sigma_1(t) dB_1(t) \geq [r(t) - \hat{r} \check{K}^{-1} \bar{x} - \hat{b} \bar{y} - \sigma_1^2(t)/2] dt + \sigma_1(t) dB_1(t)$ 。两边同时从 0 到  $t$  积分并除以  $t$  得到,  $t^{-1} [\ln \bar{x}(t) - \ln \bar{x}(0)] \geq t^{-1} \int_0^t [r(s) - \sigma_1^2(s)/2] ds - t^{-1} \int_0^t \hat{r} \check{K}^{-1} \bar{x}(s) ds - t^{-1} \int_0^t \hat{b} \bar{y}(s) ds + t^{-1} M(t) \geq \langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* - \varepsilon_3 - t^{-1} \int_0^t \hat{r} \check{K}^{-1} \bar{x}(s) ds - t^{-1} \int_0^t \hat{b} \bar{y}(s) ds + t^{-1} M(t)$ 。则  $\limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \bar{x}(t) \geq \langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* - (1 + \hat{r} \check{K}^{-1}) \varepsilon_3 > 0$ 。这与引理 4 矛盾, 因此假设成立。

由模型 (3) 的第二个方程得  $t^{-1} [\ln y(t) - \ln y(0)] \leq t^{-1} \int_0^t [\lambda(s)/h(s) - d(s) - \sigma_2^2(s)/2] ds + t^{-1} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s) \leq \langle \lambda(t)/h(t) - d(t) - \sigma_2^2(t)/2 \rangle^* + \varepsilon_3 + t^{-1} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s)$ 。因此  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \ln y(t)/t < \langle \lambda(t)/h(t) - d(t) - \sigma_2^2(t)/2 \rangle^* < 0$ , 故  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 。

iii) 如果  $\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* > 0$  成立, 则种群  $x(t)$  是弱平均持久的。下面证明种群  $y(t)$  的持久性。显然, 对一个任意充分小的  $\varepsilon_4$ , 存在  $T_4$ , 使当  $t > T_4$  时, 有  $t^{-1} \ln x(t) \leq \hat{b} \varepsilon_4 / (4\check{u})$ ;  $t^{-1} \int_0^t x(s) ds \leq \check{r}^{-1} \hat{K} \langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle^* + \hat{b} \check{K} \varepsilon_4 / (3\check{u} \hat{r})$ ;  $t^{-1} \int_0^t [r(s) - \sigma_1^2(s)/2] ds \geq \langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* - \hat{b} \varepsilon_4 / (3\check{u})$ ;  $t^{-1} \int_0^t [d(s) + \sigma_2^2(s)/2] ds \geq \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* - \varepsilon_4/3$ ;  $t^{-1} \int_0^t [d(s) + \sigma_2^2(s)/2] ds \leq \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* + \varepsilon_4/4$ 。

由系统 (3) 容易得到

$$\begin{aligned} \ln x(t) - \ln x(0) &\geq (\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* - \hat{b} \varepsilon_4 / (3\check{u}))t - \hat{r} \check{K}^{-1} \int_0^t x(s) ds - \hat{b} \int_0^t y(s) ds + \int_0^t \sigma_1(s) dB_1(s); \\ \ln y(t) - \ln y(0) &\leq 2 \int_0^t \lambda(s) b(s) x(s) / (1 + b(s) h(s) x(s)) ds - \\ &\quad \check{u} \int_0^t y(s) ds - (\langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* - \varepsilon_4/3)t + \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s). \end{aligned}$$

则  $\check{u}[\ln x(t) - \ln x(0)] - \hat{b}[\ln y(t) - \ln y(0)] \geq \check{u}M_1(t) - \hat{b}M_2(t) + (\check{u}\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* + \hat{b}\langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* - \check{r}\check{u}\check{K}\check{r}^{-1}\check{K}^{-1}\langle r(t) - \sigma_1(t)/2 \rangle_* - \hat{b}\varepsilon_4)t - 2\hat{b}\int_0^t \lambda(s)b(s)x(s)/(1+b(s)h(s)x(s))ds$ 。因此,

$$\int_0^t \lambda(s)b(s)x(s)/(1+b(s)h(s)x(s))ds \geq -\check{u}\hat{b}^{-1}[\ln x(t) - \ln x(0)]/2 + [\ln y(t) - \ln y(0)]/2 + \check{u}\hat{b}^{-1}M_1(t)/2 - M_2(t)/2 + (\check{u}\hat{b}^{-1}\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_*/2 + \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_*/2 - \check{r}\check{u}\check{K}\hat{b}^{-1}\check{r}^{-1}\check{K}^{-1}\langle r(t) - \sigma(t)/2 \rangle_*/2 - \varepsilon_4/2)t。$$

由系统 (3) 的第二个方程容易证得,

$$\begin{aligned} \ln y(t) - \ln y(0) &= \int_0^t \lambda(s)b(s)x(s)/[1+b(s)h(s)x(s)]ds - \int_0^t u(s)y(s)ds - \int_0^t [d(s) + \sigma_2^2(s)/2]ds + \int_0^t \sigma_2(s)dB_2(s) \\ &\geq \check{u}\hat{b}^{-1}\ln x(0) + [\check{u}\hat{b}^{-1}\langle r(t)\sigma_1^2(t)/2 \rangle_* - \check{r}\check{u}\check{K}\hat{b}^{-1}\check{r}^{-1}\check{K}^{-1}\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* + \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* - 2\langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* - 2\varepsilon_4]t - 2\check{u}\int_0^t y(s)ds + \check{u}\hat{b}^{-1}M_1(t) + M_2(t)。 \end{aligned}$$

则由引理 1 和引理 2 以及  $\varepsilon_4$  的任意性得,  $\langle y(t) \rangle_* \geq [\check{u}\hat{b}^{-1}\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* - \check{r}\check{u}\check{K}\hat{b}^{-1}\check{r}^{-1}\check{K}^{-1}\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle_* + \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_* - 2\langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle_*] / (2\check{u})$ 。

### 3 数值模拟

为了验证理论结果, 采用 Milstein 高阶方法<sup>[18]</sup>对模型 (3) 进行数值模拟。

取初值  $(x(0), y(0)) = (1.436, 0.282)$ , 参数  $r = 0.8 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $K = 1.5 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $\lambda = 1.6 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $b = 0.12 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $h = 2 + 0.1\sin(\pi t/5)$ ,  $d = 0.16 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $u = 0.16 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $\sigma_1 = 0.01 + 0.001\sin(\pi t/5)$ ,  $\sigma_2 = 0.01 + 0.001\sin(\pi t/5)$ 。所有参数都是以  $T=10$  的周期函数, 系统 (3) 及其确定性模型模拟如图 1 所示。

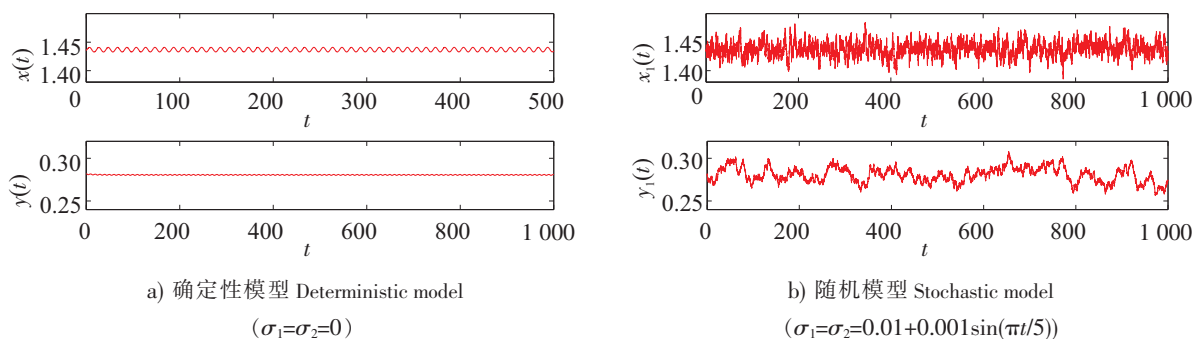


图 1 随机模型(3)和相对应的确定性模型(2)的时间序列图

Fig.1 The series plots of the stochastic model(3)and the corresponding deterministic model(2)

在其他参数保持不变的情况下, 取  $\sigma_1 = 0.0001 + 0.00001\sin(\pi t/5)$ ,  $\sigma_2 = 0.0001 + 0.00001\sin(\pi t/5)$ 。通过计算得:  $m_1 = T^{-1}\int_0^T [r(s) - \sigma_1^2(s)/2]ds \approx 0.8000 > 0$ ;  $m_2 = T^{-1}\int_0^T [\hat{\lambda}\check{h}^{-1} - \sigma_2^2(s)/2 - d(s)]ds \approx 0.6874 > 0$ ;  $\lambda_1 = 4\check{r}m_2/\hat{K} - \hat{\lambda}\hat{b}(\hat{r} + \check{r}) \approx 1.1036$ ;  $\lambda_2 = \check{u}\check{h}m_1/(\hat{\lambda} - \check{d}\check{h}) - \hat{b} \approx 0.0524$ , 且  $(\lambda_1/\hat{\lambda}\hat{b})^2 - (\hat{r} + \check{r})^2/8 - \check{r}^2\check{K}m_1/(2\hat{r}\hat{K}) \approx 27.7860 > 0$ ,  $\check{r}\check{K}\lambda_2/\hat{r} - 4\lambda_1\hat{\lambda}^{-2}\hat{b}^{-2}[\hat{u} - \check{u}\check{h}m_2/(\hat{\lambda} - \check{d}\check{h})] \approx 1.3072 > 0$ 。

故满足定理 4 的条件, 系统 (3) 存在一个正周期解 (如图 2)。

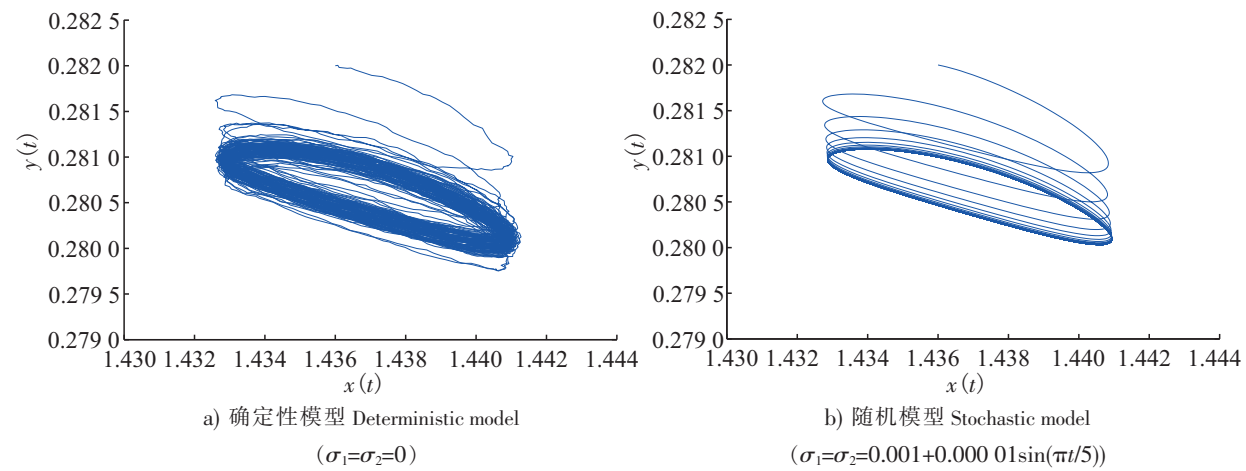


图 2 随机模型(3)和相对应的确定性模型(2)的以(1.436,0.282)为初始值的解 $(x(t),y(t))$ 的周期图  
Fig.2 The periodic plot of  $(x(t),y(t))$  which is respectively the solution of the model (3) and the model (2) for initial value(1.436,0.282)

在保持其他参数不变和初值的前提下, 1) 取  $\sigma_1 = 1.3 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $\sigma_2 = 0.1 + 0.01\sin(\pi t/5)$ , 则  $\langle r(t) - \sigma_1(t)/2 \rangle^* \approx -0.022\ 1 < 0$  满足定理 5 的条件 i), 因此模型 (3) 的种群  $x(t)$  和  $y(t)$  均趋于灭绝 (如图 3a 所示)。2) 取  $\sigma_1 = 0.3 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $\sigma_2 = 1.5 + 0.01\sin(\pi t/5)$ , 通过计算可得,  $\langle r(t) - \sigma_1(t)/2 \rangle^* \approx 0.742\ 0 > 0$ ;  $\langle \lambda(t)/h(t) - d(t) - \sigma_2(t)/2 \rangle^* \approx -0.412\ 7 < 0$ 。显然, 系数满足定理 5 的条件 ii), 则种群  $x(t)$  是弱平均持久生存的,  $y(t)$  是趋于灭绝的 (如图 3b 所示)。3) 为了满足定理 5 的条件 iii), 取  $b = 1.0 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $\sigma_1 = 0.3 + 0.01\sin(\pi t/5)$ ,  $\sigma_2 = 0.3 + 0.01\sin(\pi t/5)$ , 此时  $\langle r(t) - \sigma_1(t)/2 \rangle^* \approx 0.742\ 0 > 0$ ,  $\hat{u}\hat{b}^{-1}\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle^* - \hat{r}\hat{u}\hat{K}\hat{b}^{-1}\hat{r}^{-1}\hat{K}^{-1}\langle r(t) - \sigma_1^2(t)/2 \rangle^* + \langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle^* - 2\langle d(t) + \sigma_2^2(t)/2 \rangle^* \approx 0.078\ 4 > 0$ 。因此种群  $x(t)$  是弱平均持久生存的,  $y(t)$  是强平均持久生存的 (如图 3c 所示)。

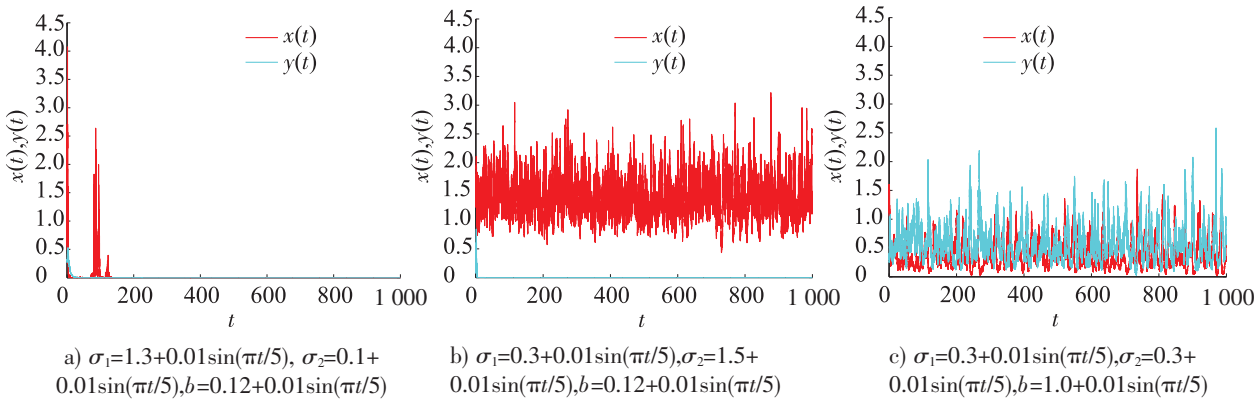


图 3 系统(3)的种群  $x(t)$  和  $y(t)$  的灭绝性与持久性  
Fig.3 The extinction and persistence of the population  $x(t)$  and  $y(t)$  of the system(3)

从生态学上看, 白噪声的强度对种群  $x(t)$  和  $y(t)$  的生存具有负面作用。如果噪声强度足够小, 种群可能持久; 如果噪声强度足够大, 则种群可能趋于灭绝。

## 4 结论

本文研究了捕食者带有 Holling II 增长函数的随机非自治捕食-食饵系统。证明了对于任意的初始

值  $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$ , 系统 (3) 存在唯一的全局正解, 得到了系统 (3) 存在周期解、种群灭绝及持久的充分条件。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] JIAO J F, WANG R Q, CHANG H C, et al. Codimension bifurcation analysis of a modified Leslie-Gower predator-prey model with two delays [J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, 28(5): 1850060. DOI:10.1142/S0218127418500608.
- [2] SUN K B, ZHANG T H, TIAN Y. Dynamics analysis and control optimization of a pest management predator-prey model with an integrated control strategy [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 292:253-271. DOI:10.1016/j.amc.2016.07.046.
- [3] XU J, TIAN Y, GUO H J, et al. Dynamical analysis of a pest management Leslie-Gower model with ratio-dependent functional response [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 93:705-720. DOI:10.1007/s11071-018-4219-9.
- [4] LEE S H, KANG H, KWON O. Effects of hunting and escaping behavior on an ecosystem consisting of one-predator and two-prey species [J]. *Journal of Biological Systems*, 2016, 24(4): 1-12. DOI:10.1142/S0218339016500236.
- [5] MAY R, MACDONALD N. Stability and complexity in model ecosystems [J]. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetic*, 1974, 8(10): 779. DOI:10.2307/4084495.
- [6] JI C Y, JIANG D Q, SHI N Z. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, 359(2): 482-498. DOI:10.1016/j.jmaa.2009.05.039.
- [7] TANG S Y, XIAO Y N, CHEN L S. Integrated pest management models and their dynamical behaviour [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2005, 67(1): 115-135. DOI:10.1016/j.bulm.2004.06.005.
- [8] NIE L F, TENG Z D, HU P L, et al. Existence and stability of periodic solution of a Lotka-Volterra predator-prey model with state dependent impulsive effects [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2011, 224(2): 544-555. DOI:10.1016/j.cam.2008.05.041.
- [9] TIAN Y, SUN K B, CHEN L S. Modelling and qualitative analysis of a predator-prey system with state-dependent impulsive effects [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2011, 82:318-331. DOI:10.1016/j.matcom.2011.08.003.
- [10] 王克. 随机生物数学模型 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [11] LI S, WANG X P. Analysis of a stochastic predator-prey model with disease in the predator and Beddington-DeAngelis functional response [J]. *Advances in Difference Equations*, 2015(1): 224. DOI:10.1186/s13662-015-0448-0.
- [12] LIU M, WANG K. Persistence and extinction in stochastic non-autonomous Logistic systems [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 375(2): 443-457. DOI:10.1016/j.jmaa.2010.09.058.
- [13] LIU J M, CHEN L J, WEI F Y. The persistence and extinction of a stochastic SIS epidemic model with Logistic growth [J]. *Advances in Difference Equations*, 2018, 2018:68. DOI:10.1186/s13662-018-1528-8.
- [14] CAI Y L, JIAO J J, GUI Z J, et al. Environmental variability in a stochastic epidemic model [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2018, 329:210-226. DOI:10.1016/j.amc.2018.02.009.
- [15] WEI C J, LIU J N, ZHANG S W. Analysis of a stochastic eco-epidemiological model with modified Leslie-Gower functional response [J]. *Advances in Difference Equations*, 2018, 2018:119. DOI:10.1186/s13662-018-1540-z.
- [16] KHASMINSKIIR. Stochastic stability of differential equations [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.
- [17] ZHU C, YIN G. On competitive Lotka-Volterra model in random environments [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, 357(1): 154-170. DOI:10.1016/j.jmaa.2009.03.066.
- [18] HIGHAM D. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations [J]. *SIAM Review*, 2001, 43(3): 525-546. DOI:10.1137/S0036144500378302.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)