

非瞬时脉冲牵引控制的多智能体一致性分析

李智勇, 黄振坤, 宾红华, 赵玲

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究只对一个智能体进行非瞬时脉冲牵引控制的多智能体一致性问题。在通讯拓扑是无向连通图的情况下, 应用矩阵论、代数图论和 Lyapunov 稳定性理论, 给出使多智能体系统达到一致性的 2 个充分条件。与传统的脉冲方法相比, 本文的方法具有较大的优势, 特别是在脉冲强度适中且智能体数量很多时, 可以有效减少脉冲次数。最后, 仿真实例验证了理论结果的有效性。

[关键词] 多智能体系统; 一致性; 非瞬时脉冲牵引控制; 矩阵论

[中图分类号] O 193

Consensus Analysis of Multiagents with Noninstantaneous Impulsive Pinning Control

LI Zhiyong, HUANG Zhenkun, BIN Honghua, ZHAO Ling

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The consensus problem of multiagents with noninstantaneous impulsive pinning control confined to one agent was investigated. Based on matrix theory, algebraic graph theory and Lyapunov stability theory, two sufficient conditions for multiagent systems to reach consensus were provided when the communication topologies were undirected connected graphs. Compared with the traditional impulsive method, the proposed method had great advantages, it could effectively reduce the number of impulses especially when the impulsive strength was moderate and the number of agents was large. Finally, some simulations were provided to illustrate the effectiveness of the theoretical results.

Keywords: multiagent systems; consensus; noninstantaneous impulsive pinning control; matrix theory

0 引言

多智能体系统的一致性问题是一个经典问题, 它在跟踪问题、编队控制、蜂拥算法、传感器网络和卫星姿态控制等领域中都有广泛的应用^[1-6]。一致性控制协议的主要思想就是每个智能体只需要和邻居节点通信并交流状态信息就可以制定一种合适的控制协议, 最终所有智能体的状态将趋于一个常数^[7-8]。为了达到一致性控制的目的, 许多学者提出了一些重要的控制方法, 如鲁棒控制、牵引控制、基于观测器的控制和事件触发控制等^[9-12]。这些控制方法都需要在整个响应时间内获取实时的状态信息, 成本较高。脉冲控制作为一种简单高效的控制方法, 因其反应速度快、成本较低和易操作等优点而获得了许多学者的关注。而且, 脉冲控制器不需要被控制的对象传递实时信息, 避免了信息冗余, 大大

[收稿日期] 2020-04-08

[基金项目] 国家自然科学基金项目 (61573005); 福建省自然科学基金项目 (2018J01417, 2019J01330); 福建省教育厅项目 (JAT190323, JAT210240)

[作者简介] 李智勇 (1981—), 男, 讲师, 硕士, 从事神经网络与优化研究, E-mail: zhiyongli@jmu.edu.cn。

降低了通信成本，同时还提高了系统的抗干扰能力。于是，许多学者把脉冲控制成功地应用于神经网络、航天器控制和多智能体等领域^[13-17]。在多智能体系统中，为了达到一致性，大部分文献中的脉冲控制方法都需要对所有智能体进行脉冲控制。

在实际应用中，有时要求所有智能体的状态都收敛到某个给定的常数，比如在军事系统中，如果想使用许多导弹攻击敌人的某个目标，那么就要求来自不同军事基地的所有导弹最终都要打中同一点^[18]。由于多智能体系统的一致性问题是神经网络同步问题的一种特殊情况^[19-20]，所以文献 [7, 21] 结合牵引控制和脉冲控制，提出了脉冲牵引控制的方法。这种方法只需对一个智能体实行脉冲控制，但是它也有一个不足之处，即所有智能体的状态的加权平均值只有在脉冲的瞬间才会变化。这必然会导致在脉冲强度适中但智能体数量很多的情况下所需的脉冲次数将会很多。为了解决这个问题，结合非瞬时脉冲微分方程^[22-27]，本文提出了用非瞬时脉冲牵引控制的方法研究多智能体系统的一致性。

当病人接受静脉注射治疗时，用经典的瞬时脉冲微分方程已不能很好地刻画药物被人体吸收和代谢的过程，于是文献 [22] 提出了一类新的非瞬时脉冲微分方程。这思想一经提出，便得到许多学者的关注，现有的研究成果主要集中在非瞬时脉冲微分方程的初值问题、边值问题、稳定性和最优控制等^[23-27]，主要用于药物动力学和生态系统，而用于多智能体的文献则比较少。受文献 [7, 21-27] 的启发，本文结合非瞬时脉冲和脉冲牵引控制，提出了用非瞬时脉冲牵引控制的方法研究多智能体系统的一致性，并给出了多智能体系统达到一致性的 2 个充分条件，还给出了一些非瞬时区间长度和有效初始脉冲时刻的设计。

1 预备知识

人们通常用图来描述多智能体系统的网络拓扑结构。假设无向图 $G = (V, E, A)$ ，其中顶点集 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ，边的集合 $E \subseteq V \times V$ ，加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 。若 $(v_j, v_i), (v_i, v_j) \in E$ ，则 $a_{ij} = a_{ji} > 0$ ，否则 $a_{ij} = a_{ji} = 0$ ，且 $a_{ii} = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 。设 $d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ ， $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ，无向图 G 的拉普拉斯矩阵 $L = D - A$ ，则 L 是实对称矩阵。记 $\mathbf{1}_n = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbf{R}^n$ ，其中 $\mathbf{1}_n^T$ 表示 $\mathbf{1}_n$ 的转置，则 $L \cdot \mathbf{1}_n = 0$ 。记 $L = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{21}^T \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$ ，其中 $L_{11} \in \mathbf{R}$ ，则 $L_{21} + L_{22} \cdot \mathbf{1}_{n-1} = 0$ 。如果边的集合 $\{(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots, (v_{i_k}, v_{i_{k+1}})\} \subseteq E$ ，且顶点 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_{k+1}}$ 各不相同，则称该集合为 v_{i_1} 与顶点 $v_{i_{k+1}}$ 之间的一条路。若无向图中的任意两个顶点之间都至少有一条路，则称该图为连通图。记 $\hat{\mathbf{x}} = (x_2, x_3, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^{n-1}$ ， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ 。

本文总是假设网络通讯拓扑结构图 G 是无向连通的，所以有下面的引理 1 和命题 1 成立。

引理 1^[28] 拉普拉斯矩阵 L 有单重特征根 0，其余特征根均大于 0。

命题 1 L_{22} 是正定的。

考虑如下的只对一个智能体进行非瞬时脉冲牵引控制的多智能体系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = - \sum_{j=1}^n (l_{ij}x_j(t)), i = 2, 3, \dots, n, \\ \dot{x}_1(t) = - \sum_{j=1}^n (l_{1j}x_j(t)), t \in (t_k, s_k), k \in \mathbf{N}, \\ x_1(t) = (1 - b_k)x_1(s_k^-), t \in [s_k, t_{k+1}], k \in \mathbf{N}, \\ x_1(s_k^+) = x_1(s_k), k \in \mathbf{N}, \\ x_1(t_k^+) = x_1(t_k), k \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{1}$$

其中： $0 \leq t_k < s_k \leq t_{k+1}; k \in \mathbf{N} := \{0, 1, 2, \dots\}; n \geq 2; b_k$ 是在时间 s_k 处的脉冲强度； $x_i(t) \in \mathbf{R}$ 且初始值 $\mathbf{x}(t_0^+) = \mathbf{x}(t_0)$ 。

为了方便,文中所有的范数 $\|\cdot\|$ 都是指 $\|\cdot\|_2$ 。设 $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{j \times m}$, 则 $\|\mathbf{B}\| = (\lambda_{\max}(\mathbf{B}^T \mathbf{B}))^{1/2}$, $\|\mathbf{x}\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ 。 \mathbf{I} 表示单位矩阵。由命题 1 可知,存在正交矩阵 $\mathbf{V} = [v_{ij}]_{(n-1) \times (n-1)}$, 使得 $\mathbf{L}_{22} = \mathbf{V} \hat{\mathbf{J}} \mathbf{V}^T$, 其中 $\hat{\mathbf{J}} = \text{diag}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_{n-1})$, $0 < \hat{\lambda}_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_{n-1}$ 。设 $\hat{\mathbf{T}}(t) = \text{diag}(e^{-\hat{\lambda}_1 t}, e^{-\hat{\lambda}_2 t}, \dots, e^{-\hat{\lambda}_{n-1} t})$, $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{1}_n^T \cdot \mathbf{x}(t)/n$, $\hat{\mathbf{x}}(t) = (x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))^T$, $V_1(t) = \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t) \cdot \mathbf{1}_n\|^2$, $V_2(t) = \|\hat{\mathbf{x}}(t) - x_1(t) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\|^2$ 。

定义 1^[7] 若存在常数 s , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = s, i = 1, 2, \dots, n$, 则称系统 (1) 在 s 上达到一致性。

注 1 令 $y_i(t) = x_i(t) + s, i = 1, 2, \dots, n$, 因为 $\mathbf{L} \cdot \mathbf{1}_n = 0$, 所以把 $x_i(t) = y_i(t) - s (i = 1, 2, \dots, n)$ 代入系统 (1) 可得到关于 $\mathbf{y}(t)$ 的新系统

$$\begin{cases} \dot{y}_i(t) = - \sum_{j=1}^n (l_{ij} y_j(t)), i = 2, 3, \dots, n, \\ \dot{y}_1(t) = - \sum_{j=1}^n (l_{1j} y_j(t)), t \in (t_k, s_k), k \in \mathbf{N}, \\ y_1(t) = (1 - b_k) y_1(s_k^-) + b_k s, t \in [s_k, t_{k+1}], k \in \mathbf{N}, \\ y_1(s_k^+) = y_1(s_k), k \in \mathbf{N}, \\ y_1(t_k^+) = y_1(t_k), k \in \mathbf{N}. \end{cases} \quad (2)$$

易知系统 (2) 在 s 上达到一致性等价于系统 (1) 在 0 上达到一致性。为了方便,本文只研究系统 (1)。

注 2 若 $\forall k \in \mathbf{N}$, 都有 $s_k = t_{k+1}$, 则系统 (2) 就是文献 [21] 所研究的系统。

当 $t \in (t_k, s_k)$ 时, 系统 (1) 可化为 $\dot{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{L} \cdot \mathbf{x}(t)$, 由文献 [28] 可得引理 2。

引理 2 $\forall t \in (t_k, s_k)$, 都有 $V_1(t) \leq V_1(t_k^+) e^{-2\lambda_2(t-t_k)} = V_1(t_k) e^{-2\lambda_2(t-t_k)}$, 且 $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}^*(t_k^+) = \mathbf{x}^*(t_k)$, 其中 λ_2 为 \mathbf{L} 的最小正特征根。

引理 3 $\forall t \in [s_k, t_{k+1}]$, 都有 $V_2(t) \leq V_2(s_k) e^{-2\hat{\lambda}_1(t-s_k)}$ 。

证明 当 $t \in [s_k, t_{k+1}]$ 时, 系统 (1) 可化为

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(s_k) = (1 - b_k) x_1(s_k^-), \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = -\mathbf{L}_{21} \cdot x_1(s_k) - \mathbf{L}_{22} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t). \end{cases} \quad (3)$$

因为 $x_1(t) = x_1(s_k)$ 且 $\dot{x}_1(t) = 0$, 所以由 $\mathbf{L}_{21} = -\mathbf{L}_{22} \cdot \mathbf{1}_{n-1}$ 可知, $\dot{V}_2(t) = 2(\hat{\mathbf{x}}(t) - x_1(t) \cdot \mathbf{1}_{n-1})^T \cdot \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = -2(\hat{\mathbf{x}}(t) - x_1(t) \cdot \mathbf{1}_{n-1})^T \cdot \mathbf{L}_{22}(\hat{\mathbf{x}}(t) - x_1(t) \cdot \mathbf{1}_{n-1}) \leq -2\hat{\lambda}_1 V_2(t)$ 。所以结论成立。

命题 2 $\forall k \in \mathbf{N}$, 都有 $\sqrt{V_1(t_k)} \leq 2\sqrt{V_2(t_k)}$ 。

证明 因为 $\|\mathbf{x}(t_k) - x_1(t_k) \cdot \mathbf{1}_n\| = \|\hat{\mathbf{x}}(t_k) - x_1(t_k) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| = \sqrt{V_2(t_k)}$, 所以

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^*(t_k) - x_1(t_k)| &= |\mathbf{1}_n^T \cdot [\mathbf{x}(t_k) - x_1(t_k) \cdot \mathbf{1}_n]|/n \leq \\ &\|\mathbf{1}_n^T\| \|\mathbf{x}(t_k) - x_1(t_k) \cdot \mathbf{1}_n\|/n = \sqrt{V_2(t_k)}/\sqrt{n}. \end{aligned} \quad (4)$$

进而有

$$\begin{aligned} \sqrt{V_1(t_k)} &= \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}^*(t_k) \cdot \mathbf{1}_n\| \leq \|x(t_k) - x_1(t_k) \cdot \mathbf{1}_n\| + |x_1(t_k) - \mathbf{x}^*(t_k)| \|\mathbf{1}_n\| \leq \\ &\sqrt{V_2(t_k)} + \sqrt{V_2(t_k)} \sqrt{n}/\sqrt{n} = 2\sqrt{V_2(t_k)}. \end{aligned}$$

2 主要结果及其证明

定理 1 任取 $\bar{\omega}_1 \in (0, 1)$, 若存在 $k_0 \in \mathbf{N}$ 和常数 $b, \bar{b}, \bar{\delta}, \bar{\delta}, \eta, \bar{\eta}, \bar{\alpha} \in \mathbf{R}$, 满足 $0 < \eta \leq \bar{\eta} < 1$,

$0 < \bar{\alpha} < \bar{\alpha}_2 / \bar{\alpha}_1, \sqrt{V_1(s_{k_0}^-)} \leq \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(s_{k_0}^-)| \neq 0$, 且 $\forall k \geq k_0$, 都有下面4个条件成立: 1) $0 < \underline{b} \leq b_k \leq \bar{b} < 2n$; 2) $0 \leq \underline{\delta} \leq t_{k+1} - s_k \leq \bar{\delta} < +\infty$; 3) $\underline{\eta} \leq |1 - b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)/n| \leq \bar{\eta}$; 4) $\bar{\omega} \leq s_{k+1} - t_{k+1} < +\infty$, 则系统(1)在0上达到一致性且 $\{|\mathbf{x}^*(s_k^-)| | k \geq k_0\}$ 单调递减, 其中: $\mathbf{H}_k = \mathbf{I} - \mathbf{V} \hat{\mathbf{T}}(t_{k+1} - s_k) \mathbf{V}^T$; $\bar{h} = 1 - e^{-\hat{\lambda}_{n-1} \bar{\delta}}$; $\bar{b} = \max\{|1 - \underline{b}|, |1 - \bar{b}|\}$; $\bar{\alpha}_1 = \bar{h} \sqrt{n-1} + \bar{b} \bar{h}(n-1) + \bar{b}$; $\bar{\alpha}_2 = \min\{n(1 - \bar{\eta}), n \underline{\eta}\}$; $\bar{\omega}_2 = \min\{\bar{\omega}_1, (\underline{\eta} - \bar{\alpha} \bar{\alpha}_1/n) \bar{\alpha} e^{\hat{\lambda}_1 \bar{\delta}} / [2(\bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1} \bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1})]\}$; $\bar{\omega} = (-\ln \bar{\omega}_2) / \lambda_2$ 。

证明 下面用数学归纳法证明: $\forall k \geq k_0$, 都有

$$\sqrt{V_1(s_k^-)} \leq \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(s_k^-)|. \quad (5)$$

当 $k = k_0$ 时, 式(5)显然成立。

假设对某个 $k \in \mathbf{N}$ 且 $k \geq k_0$, 式(5)成立。下面证明 $\sqrt{V_1(s_{k+1}^-)} \leq \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(s_{k+1}^-)|$ 也成立。

由条件2)可知, $\|\mathbf{H}_k\| = \|\mathbf{I} - \mathbf{V} \hat{\mathbf{T}}(t_{k+1} - s_k) \mathbf{V}^T\| = \|\mathbf{V}(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{T}}(t_{k+1} - s_k)) \mathbf{V}^T\| = \|\mathbf{I} - \hat{\mathbf{T}}(t_{k+1} - s_k)\| \leq \bar{h}$, 所以,

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} - b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)| &= |(1 - b_k) \mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} - b_k| \leq |1 - b_k| \cdot \\ &\|\mathbf{1}_{n-1}^T \cdot\| \cdot \|\mathbf{H}_k\| \cdot \|\mathbf{1}_{n-1}\| + b_k \leq |1 - b_k| \bar{h}(n-1) + b_k. \end{aligned} \quad (6)$$

因为

$$\|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \mathbf{1}_{n-1}\| \leq \sqrt{V_1(s_k^-)} \leq \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(s_k^-)|, \quad (7)$$

所以,

$$|\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k (\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \mathbf{1}_{n-1})| \leq \|\mathbf{1}_{n-1}^T\| \cdot \|\mathbf{H}_k\| \cdot \|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \mathbf{1}_{n-1}\| \leq \sqrt{n-1} \bar{h} \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(s_k^-)|. \quad (8)$$

当 $t \in [s_k, t_{k+1}]$ 时, 系统(1)可化为系统(3)。由 $\mathbf{L}_{21} + \mathbf{L}_{22} \mathbf{1}_{n-1} = 0$ 可知 $-\mathbf{L}_{22}^{-1} \mathbf{L}_{21} = \mathbf{1}_{n-1}$ 。求解系统(3)可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &= e^{-\mathbf{L}_{22}(t-s_k)} (\hat{\mathbf{x}}(s_k) + \mathbf{L}_{22}^{-1} \mathbf{L}_{21} x_1(s_k)) - \mathbf{L}_{22}^{-1} \mathbf{L}_{21} x_1(s_k) = \\ &(\mathbf{I} - \mathbf{V} \hat{\mathbf{T}}(t - s_k) \mathbf{V}^T) \cdot \mathbf{1}_{n-1} \cdot x_1(s_k) + \mathbf{V} \hat{\mathbf{T}}(t - s_k) \mathbf{V}^T \hat{\mathbf{x}}(s_k). \end{aligned} \quad (9)$$

因为 $x_1(t_{k+1}) = x_1(s_k) = (1 - b_k)x_1(s_k^-)$, $\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) = \hat{\mathbf{x}}(s_k)$, $[\mathbf{1}_{n-1}^T \hat{\mathbf{x}}(s_k^-) + x_1(s_k^-)]/n = \mathbf{x}^*(s_k^-)$, 所以由引理2和式(9)可知, $\mathbf{x}^*(s_{k+1}^-) = \mathbf{x}^*(t_{k+1}) = \mathbf{1}_n^T \mathbf{x}(t_{k+1})/n = (\mathbf{1}_{n-1}^T \hat{\mathbf{x}}(t_{k+1}) + x_1(t_{k+1}))/n = [\mathbf{1}_{n-1}^T (\mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} x_1(s_k) + (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}}(s_k)) + x_1(t_{k+1})]/n = [\mathbf{1}_{n-1}^T (\mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} (1 - b_k)x_1(s_k^-) + (\mathbf{I} - \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{x}}(s_k^-)) + (1 - b_k)x_1(s_k^-)]/n = [\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} (x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-)) - \mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k (\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \mathbf{1}_{n-1}) - b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)(x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) + \mathbf{x}^*(s_k^-)) + \mathbf{1}_{n-1}^T \hat{\mathbf{x}}(s_k^-) + x_1(s_k^-)]/n = [\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} - b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)](x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-))/n - [\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k (\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \mathbf{1}_{n-1})]/n + [1 - b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)/n] \mathbf{x}^*(s_k^-)$ 。又因为

$$|x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-)| \leq \sqrt{V_1(s_k^-)} \leq \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(s_k^-)|. \quad (10)$$

所以由 $|b| - |a| \leq |a + b| \leq |b| + |a|$ 、式(6)、式(8)、式(10)和条件3)可知,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^*(s_{k+1}^-)| &\leq [\underline{\eta} + \bar{\alpha}(\bar{h} \sqrt{n-1} + |1 - b_k| \bar{h}(n-1) + b_k)/n] |\mathbf{x}^*(s_k^-)| \leq \\ &(\underline{\eta} + \bar{\alpha} \bar{\alpha}_1/n) |\mathbf{x}^*(s_k^-)|, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^*(s_{k+1}^-)| &\geq [\underline{\eta} - \bar{\alpha}(\bar{h} \sqrt{n-1} + |1 - b_k| \bar{h}(n-1) + b_k)/n] |\mathbf{x}^*(s_k^-)| \geq \\ &(\underline{\eta} - \bar{\alpha} \bar{\alpha}_1/n) |\mathbf{x}^*(s_k^-)|. \end{aligned} \quad (12)$$

由式(7)和式(10)可知,

$$\sqrt{V_2(s_k)} = \|\hat{\mathbf{x}}(s_k) - x_1(s_k) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| = \|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - (1 - b_k)x_1(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| =$$

$$\begin{aligned} & \|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1} + (1 - b_k)(\mathbf{x}^*(s_k^-) - x_1(s_k^-)) \cdot \mathbf{1}_{n-1} + b_k \mathbf{x}^*(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| \leq \\ & \|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| + \bar{b} \cdot |\mathbf{x}^*(s_k^-) - x_1(s_k^-)| \sqrt{n-1} + \bar{b} |\mathbf{x}^*(s_k^-)| \sqrt{n-1} \leq \\ & (\bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1} \bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1}) |\mathbf{x}^*(s_k^-)|. \end{aligned} \quad (13)$$

由 $\bar{\alpha} < \bar{\alpha}_2/\bar{\alpha}_1 \leq n(1 - \bar{\eta})/\bar{\alpha}_1$ 可知,

$$\bar{\eta} + \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1/n < 1, \quad (14)$$

由 $\bar{\alpha} < \bar{\alpha}_2/\bar{\alpha}_1 \leq n \cdot \bar{\eta}/\bar{\alpha}_1$ 和式 (14) 可知,

$$0 < \bar{\eta} - \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1/n < 1. \quad (15)$$

由条件 4) 可知, $s_{k+1} - t_{k+1} \geq \bar{\omega} = (-\ln \bar{\omega}_2)/\lambda_2 \geq -\ln[(\bar{\eta} - \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1/n)\bar{\alpha}e^{\hat{\lambda}_1\bar{\delta}}/[2(\bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1} \bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1})]]/\lambda_2$, 所以

$$2e^{-\hat{\lambda}_1\bar{\delta}}e^{-\lambda_2(s_{k+1}-t_{k+1})}(\bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1} \bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1}) \leq (\bar{\eta} - \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1/n)\bar{\alpha}. \quad (16)$$

由命题 2 和引理 3 可知,

$$\sqrt{V_1(t_{k+1})} \leq 2\sqrt{V_2(t_{k+1})} \leq 2e^{-\hat{\lambda}_1(t_{k+1}-s_k)}\sqrt{V_2(s_k)}. \quad (17)$$

由引理 2、式 (12) ~ 式 (13) 和式 (16) ~ 式 (17) 可知, $\sqrt{V_1(s_{k+1}^-)} \leq e^{-\lambda_2(s_{k+1}-t_{k+1})}\sqrt{V_1(t_{k+1})} \leq e^{-\lambda_2(s_{k+1}-t_{k+1})}2e^{-\hat{\lambda}_1(t_{k+1}-s_k)}\sqrt{V_2(s_k)} \leq e^{-\lambda_2(s_{k+1}-t_{k+1})}2e^{-\hat{\lambda}_1\bar{\delta}}(\bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1} \bar{\alpha} + \bar{b} \sqrt{n-1})|\mathbf{x}^*(s_k^-)| \leq (\bar{\eta} - \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1/n)\bar{\alpha}|\mathbf{x}^*(s_k^-)| \leq \bar{\alpha}|\mathbf{x}^*(s_{k+1}^-)|$ 。所以由数学归纳法可知 $\forall k \geq k_0$, 都有式 (5) 成立。

由式 (11) 可知,

$$|\mathbf{x}^*(s_{k+1}^-)| \leq (\bar{\eta} + \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1/n)|\mathbf{x}^*(s_k^-)| \leq (\bar{\eta} + \bar{\alpha}\bar{\alpha}_1/n)^{k-k_0+1}|\mathbf{x}^*(s_{k_0}^-)|, \quad (18)$$

由式 (14) 可知,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^*(s_k^-)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^*(s_{k+1}^-)| = 0. \quad (19)$$

由式 (13) 和式 (19) 可知,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{V_2(s_k)} = 0. \quad (20)$$

由式 (17) 和式 (20) 可知,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{V_1(t_k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{V_1(t_{k+1})} = 0. \quad (21)$$

由式 (10) 和式 (19) 可知,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-)| = 0. \quad (22)$$

又因为 $|x_1(s_k)| = |1 - b_k| \cdot |x_1(s_k^-)| \leq (1 + \bar{b})(|x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-)| + |\mathbf{x}^*(s_k^-)|)$, 所以由式 (19) 和式 (22) 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(s_k)| = 0. \quad (23)$$

当 $t \in (t_k, s_k)$ 时, 由引理 2 可知, $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}^*(t_k) = \mathbf{x}^*(t_k^+) = \mathbf{x}^*(s_k^-)$, $V_1(t) \leq V_1(t_k)e^{-2\lambda_2(t-t_k)} \leq V_1(t_k)$ 。所以, $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t) \cdot \mathbf{1}_n\| + \|\mathbf{x}^*(t) \cdot \mathbf{1}_n\| = \sqrt{V_1(t)} + \|\mathbf{x}^*(t) \cdot \mathbf{1}_n\| \leq \sqrt{V_1(t_k)} + \|\mathbf{x}^*(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_n\|$ 。所以由式 (19) 和式 (21) 可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$ 。

当 $t \in [s_k, t_{k+1}]$ 时, 由引理 3 可知, $V_2(t) \leq V_2(s_k)e^{-2\hat{\lambda}_1(t-s_k)} \leq V_2(s_k)$ 。注意到 $x_1(t) \equiv x_1(s_k)$, $\forall t \in [s_k, t_{k+1}]$, 所以, $\|\hat{\mathbf{x}}(t)\| \leq \|\hat{\mathbf{x}}(t) - x_1(t) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| + \|x_1(t) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| = \sqrt{V_2(t)} + \|x_1(t) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| \leq \sqrt{V_2(s_k)} + \|x_1(s_k) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\|$ 。由式 (20) 和式 (23) 可知, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(t)\| = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_1(s_k)| = 0$ 。

系统 (1) 在 0 上达到一致性, 且由式 (11) 和式 (14) 可知 $\{|\mathbf{x}^*(s_k^-)| \mid k \geq k_0\}$ 单调递减。

注3 取 $\bar{\delta}=0$ (由注2可知系统 (1) 变成了文献 [7, 21] 所研究的具有脉冲牵引控制的系统), $\varepsilon>0$ 为最大允许误差。若所有 $b_k=\underline{b}=\bar{b}$, $\bar{\alpha}$ 为很小的正数, 且定理1的条件成立, 则 $\underline{h}=\bar{h}=0$, 且由式 (18) 可知, $|\mathbf{x}^*(s_{k_0}^-)| \leq \varepsilon$ 所需的脉冲次数为 $K+1-k_0 \approx [\ln(\varepsilon/|\mathbf{x}^*(s_{k_0}^-)|)]/\ln \bar{\eta} = [\ln(\varepsilon/|\mathbf{x}^*(s_{k_0}^-)|)]/\ln|1-\underline{b}/n|$ 。所以在这种情况下, 当 b_k 都较接近于 n 时, 系统 (1) 在 0 上达到一致性所需的脉冲次数较少。

2.1 非瞬时区间长度的设计

情形1 $0 < b_k < n, k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$ 。

命题3 任取 $\bar{M} \in (0, +\infty)$ 、 $\bar{\delta} \in [0, \bar{\delta}_1)$ 、 $\bar{\delta} \in [0, \bar{\delta}]$, 若存在 $k_0 \in \mathbf{N}$ 和常数 \underline{b} 、 $\bar{b} \in \mathbf{R}$ 满足 $\forall k \geq k_0$, 都有 $0 < \underline{b} \leq b_k \leq \bar{b} < n$ 且 $0 \leq \bar{\delta} \leq t_{k+1} - s_k \leq \bar{\delta} < +\infty$, 则 $0 < \underline{\eta} \leq \bar{\eta} < 1$ 且 $\forall k \geq k_0$, 都有 $\underline{\eta} \leq 1 - b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)/n \leq \bar{\eta}$, 其中 \mathbf{H}_k 、 \bar{h} 与定理1中的定义一样, $\underline{h} = 1 - e^{-\hat{\lambda}_1 \bar{\delta}}$, $\underline{\eta} = 1 - \bar{b}(\bar{h}(n-1) + 1)/n$, $\bar{\eta} = 1 - \underline{b}(\underline{h}(n-1) + 1)/n$, $\bar{\delta}_1 = \begin{cases} -[\ln(1 - (n/\bar{b} - 1)/(n-1))]/\hat{\lambda}_{n-1}, \bar{b} > 1, \\ \bar{M}, \bar{b} \leq 1. \end{cases}$

证明 由 $\bar{b} < n$ 可知 $\bar{\delta}_1 > 0$ 。下面证明 $\underline{\eta} > 0$ 。当 $\bar{b} > 1$ 时, 由 $\bar{\delta} < \bar{\delta}_1 = -[\ln(1 - (n/\bar{b} - 1)/(n-1))]/\hat{\lambda}_{n-1}$ 可知, $e^{-\hat{\lambda}_{n-1} \bar{\delta}} > 1 - (n/\bar{b} - 1)/(n-1)$, 所以 $\bar{h} = 1 - e^{-\hat{\lambda}_{n-1} \bar{\delta}} < (n/\bar{b} - 1)/(n-1)$, $\bar{h}(n-1) + 1 < n/\bar{b}$ 。故 $\underline{\eta} = 1 - \bar{b}(\bar{h}(n-1) + 1)/n > 0$ 。

当 $\bar{b} \leq 1$ 时, 由 $0 \leq \bar{h} < 1$ 可知 $\bar{h}(n-1) + 1 < (n-1) + 1$, 所以 $\bar{b}(\bar{h}(n-1) + 1)/n < \bar{b} \leq 1$, 故 $\underline{\eta} > 0$ 。由 $0 < \underline{b} \leq b_k \leq \bar{b}$ 和 $0 \leq \underline{h} \leq \bar{h}$ 可知 $\underline{\eta} \leq \bar{\eta} < 1$, 所以 $0 < \underline{\eta} \leq \bar{\eta} < 1$ 。因为 $\forall k \geq k_0$ 都有 $\underline{h}(n-1) \leq \mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} \leq \bar{h}(n-1)$, 所以 $\underline{\eta} \leq 1 - b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)/n \leq \bar{\eta}$ 。

情形2 $n < b_k < 2n, k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \dots$ 。

命题4 任取 $\bar{\delta} \in [0, \bar{\delta}_1)$ 、 $\bar{\delta} \in [0, \bar{\delta}]$, 若存在 $k_0 \in \mathbf{N}$ 和常数 \underline{b} 、 $\bar{b} \in \mathbf{R}$ 满足 $\forall k \geq k_0$, 都有 $n < \underline{b} \leq b_k \leq \bar{b} < 2n$ 且 $0 \leq \bar{\delta} \leq t_{k+1} - s_k \leq \bar{\delta} < +\infty$, 则 $0 < \underline{\eta} \leq \bar{\eta} < 1$, 且 $\forall k \geq k_0$, 都有 $\underline{\eta} \leq b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)/n - 1 \leq \bar{\eta}$, 其中: \mathbf{H}_k 、 \bar{h} 、 \underline{h} 与命题3中的定义一样; $\underline{\eta} = \underline{b}(\underline{h}(n-1) + 1)/n - 1$; $\bar{\eta} = \bar{b}(\bar{h}(n-1) + 1)/n - 1$; $\bar{\delta}_1 = -[\ln(1 - (2n/\bar{b} - 1)/(n-1))]/\hat{\lambda}_{n-1}$ 。

证明 由 $n < \bar{b} < 2n$ 可知 $\bar{\delta}_1 > 0$ 。由 $\bar{\delta} < \bar{\delta}_1 = -[\ln(1 - (2n/\bar{b} - 1)/(n-1))]/\hat{\lambda}_{n-1}$ 可知, $e^{-\hat{\lambda}_{n-1} \bar{\delta}} > 1 - (2n/\bar{b} - 1)/(n-1)$ 。所以 $\bar{h} = 1 - e^{-\hat{\lambda}_{n-1} \bar{\delta}} < (2n/\bar{b} - 1)/(n-1)$, $\bar{h}(n-1) + 1 < 2n/\bar{b}$ 。故 $\bar{\eta} = \bar{b}(\bar{h}(n-1) + 1)/n - 1 < 2 - 1 = 1$ 。又由 $n < \underline{b} \leq \bar{b}$ 和 $0 \leq \underline{h} \leq \bar{h}$ 可知 $0 < \underline{\eta} \leq \bar{\eta} < 1$ 。因为 $\forall k \geq k_0$, 都有 $\underline{h}(n-1) \leq \mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} \leq \bar{h}(n-1)$, 所以 $\underline{\eta} \leq b_k(\mathbf{1}_{n-1}^T \mathbf{H}_k \mathbf{1}_{n-1} + 1)/n - 1 \leq \bar{\eta}$ 。

注4 文献 [21] 要求所有 $b_k = b \in (0, 2)$, 文献 [7] 要求所有 $b_k \in [\eta_1, \eta_2]$, 其中 η_1, η_2 是常数且满足 $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < n$, 所以定理1对脉冲强度 b_k 的要求比较低。

2.2 有效初始脉冲时刻 k_0 的设计

命题5 假设 $\mathbf{x}^*(t_0) \neq 0$ 且 $V_1(t_0) \neq 0$, 任取 $\bar{\alpha} \in (0, +\infty)$, 任取 $\bar{\beta}_2 \in (0, +\infty)$, 若 $t_0 + \bar{\beta} \leq s_0$, 则 $\sqrt{V_1(s_0^-)} \leq \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(s_0^-)|$, 其中: $\bar{\beta} = \max\{\bar{\beta}_2, \bar{\beta}_1\}$; $\bar{\beta}_1 = -[\ln(\bar{\alpha} \cdot |\mathbf{x}^*(t_0)|/\sqrt{V_1(t_0)})]/\lambda_2$ 。

证明 由 $s_0 - t_0 \geq \bar{\beta} \geq \bar{\beta}_1 = -[\ln(\bar{\alpha} \cdot |\mathbf{x}^*(t_0)|/\sqrt{V_1(t_0)})]/\lambda_2$ 可知, $e^{-\lambda_2(s_0-t_0)} \leq \bar{\alpha} \cdot |\mathbf{x}^*(t_0)|/\sqrt{V_1(t_0)}$, 所以由引理2可知, $\sqrt{V_1(s_0^-)} \leq \sqrt{V_1(t_0)} e^{-\lambda_2(s_0-t_0)} \leq \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(t_0)| = \bar{\alpha} |\mathbf{x}^*(s_0^-)|$ 。

注5 若 $\mathbf{x}^*(t_0) \neq 0$ 且 $V_1(t_0) = 0$, $\bar{\alpha} \in (0, +\infty)$, 任取 $s_0 \in (t_0, +\infty)$, 则由引理2可知命题5的结论成立。若 $\mathbf{x}^*(t_0) = 0$, 只需取 $s_0 = +\infty$, 则系统 (1) 在 0 上达到一致性。

定理 2 若存在 $k_1 \in \mathbf{N}$ 和常数 $\tilde{b}, \tilde{\bar{b}}, \tilde{\omega}, \tilde{\alpha} \in \mathbf{R}$ 满足 $0 < \tilde{a} < \tilde{\alpha}_2 / \tilde{\alpha}_1$, 且 $\sqrt{V_2(t_{k_1})} \leq \tilde{\alpha} |x_1(t_{k_1})| \neq 0$, 而且 $\forall k \geq k_1$, 都有下面 3 个条件成立: 1) $0 < |1 - \tilde{b}| \leq |1 - b_k| \leq |1 - \tilde{\bar{b}}| < 1$; 2) $0 < \tilde{\omega} \leq s_k - t_k < +\infty$; 3) $\tilde{\delta} \leq t_{k+1} - s_k < +\infty$, 则系统 (1) 在 0 上达到一致性且 $\{|x_1(t_k)| | k \geq k_1\}$ 单调递减, 其中: $\tilde{\alpha}_1 = 2e^{-\lambda_2 \tilde{\omega}} + 1/\sqrt{n}$; $\tilde{\alpha}_2 = \min\{1, 1/|1 - \tilde{\bar{b}}| - 1\}$; $\tilde{\delta}_1 = (1 + \sqrt{n-1})2\tilde{\alpha}e^{-\lambda_2 \tilde{\omega}} + (|1 - \tilde{\bar{b}}| + 1)\sqrt{n-1}(1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha})$; $\tilde{\delta} = [-\ln(|1 - \tilde{b}|(1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha})\tilde{\alpha}/\tilde{\delta}_1)]/\hat{\lambda}_1$ 。

证明 下面用数学归纳法证明: $\forall k \geq k_1$, 都有

$$\sqrt{V_2(t_k)} \leq \tilde{\alpha} |x_1(t_k)|. \quad (24)$$

当 $k = k_1$ 时, 式 (24) 显然成立。

假设对某个 $k \in \mathbf{N}$ 且 $k \geq k_1$, 式 (24) 成立, 下面证明 $\sqrt{V_2(t_{k+1})} \leq \tilde{\alpha} |x_1(t_{k+1})|$ 也成立。

由引理 2 和命题 2 可知,

$$|x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-)| \leq \sqrt{V_1(s_k^-)} \leq e^{-\lambda_2 \tilde{\omega}} \sqrt{V_1(t_k)} \leq 2e^{-\lambda_2 \tilde{\omega}} \sqrt{V_2(t_k)} \leq 2e^{-\lambda_2 \tilde{\omega}} \cdot \tilde{\alpha} |x_1(t_k)|, \quad (25)$$

由式 (4) 可知,

$$|\mathbf{x}^*(t_k) - x_1(t_k)| \leq \sqrt{V_2(t_k)}/\sqrt{n} \leq \tilde{\alpha} |x_1(t_k)|/\sqrt{n}. \quad (26)$$

由引理 2 可知, $\mathbf{x}^*(t_k) = \mathbf{x}^*(s_k^-)$, 所以, $|x_1(s_k^-)| = |[x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-)] + \mathbf{x}^*(s_k^-)| = |[x_1(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-)] + [\mathbf{x}^*(t_k) - x_1(t_k)] + x_1(t_k)|$ 。故由 $|b| - |a| \leq |a+b| \leq |b| + |a|$ 和式 (25) ~ 式 (26) 可知

$$|x_1(s_k^-)| \leq (1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}) |x_1(t_k)|. \quad (27)$$

$$|x_1(s_k^-)| \geq (1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}) |x_1(t_k)|. \quad (28)$$

又因为 $|x_1(t_{k+1})| = |x_1(s_k)| = |1 - b_k| \cdot |x_1(s_k^-)|$ 且 $|1 - \tilde{b}| \leq |1 - b_k| \leq |1 - \tilde{\bar{b}}|$, 所以

$$|x_1(t_{k+1})| \leq |1 - \tilde{\bar{b}}| (1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}) |x_1(t_k)|, \quad (29)$$

$$|x_1(t_{k+1})| \geq |1 - \tilde{b}| (1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}) |x_1(t_k)|. \quad (30)$$

由式 (25) 可知, $\|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| \leq \sqrt{V_1(s_k^-)} \leq 2e^{-\lambda_2 \tilde{\omega}} \cdot \tilde{\alpha} |x_1(t_k)|$ 。 $\|[\mathbf{x}^*(s_k^-) - x_1(s_k^-)] \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| \leq \|\mathbf{1}_{n-1}\| |\mathbf{x}^*(s_k^-) - x_1(s_k^-)| \leq 2\sqrt{n-1} \cdot e^{-\lambda_2 \tilde{\omega}} \cdot \tilde{\alpha} |x_1(t_k)|$ 。又因为 $|b_k| \leq |b_k - 1| + 1 \leq |1 - \tilde{\bar{b}}| + 1$, 注意到式 (13) 和式 (27), 所以

$$\begin{aligned} \sqrt{V_2(s_k)} &= \|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - (1 - b_k)x_1(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| = \\ &\|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1} + [\mathbf{x}^*(s_k^-) - x_1(s_k^-)] \cdot \mathbf{1}_{n-1} + b_k x_1(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| \leq \\ &\|\hat{\mathbf{x}}(s_k^-) - \mathbf{x}^*(s_k^-) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| + \|[\mathbf{x}^*(s_k^-) - x_1(s_k^-)] \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| + |b_k| |x_1(s_k^-)| \|\mathbf{1}_{n-1}\| \leq \\ &[(1 + \sqrt{n-1})2\tilde{\alpha}e^{-\lambda_2 \tilde{\omega}} + |b_k| \sqrt{n-1}(1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha})] \cdot |x_1(t_k)| \leq \tilde{\delta}_1 \cdot |x_1(t_k)|. \end{aligned} \quad (31)$$

由 $\tilde{\alpha} < \tilde{\alpha}_2 / \tilde{\alpha}_1$ 和 $\tilde{\alpha}_2 \leq 1/|1 - \tilde{\bar{b}}| - 1$ 可知,

$$|1 - \tilde{\bar{b}}| (1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}) < 1. \quad (32)$$

由 $\tilde{\alpha} < \tilde{\alpha}_2 / \tilde{\alpha}_1 \leq 1/\tilde{\alpha}_1$ 可知

$$1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha} > 0. \quad (33)$$

因为 $|1 - \tilde{b}| \leq |1 - \tilde{\bar{b}}| < 1$ 和 $2\sqrt{n-1} > \sqrt{n} > 1/\tilde{\alpha}_1 \geq \tilde{\alpha}_2 / \tilde{\alpha}_1 > \tilde{\alpha}$, 所以 $\tilde{\delta}_1 > (|1 - \tilde{\bar{b}}| + 1)\sqrt{n-1}(1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}) > 2|1 - \tilde{b}|\sqrt{n-1}(1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}) > |1 - \tilde{b}|(1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha})\tilde{\alpha}$, $\tilde{\delta} > 0$ 。因为 $t_{k+1} - s_k \geq \tilde{\delta} = [-\ln(|1 - \tilde{b}|(1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha})\tilde{\alpha}/\tilde{\delta}_1)]/\hat{\lambda}_1$, 所以 $e^{-\hat{\lambda}_1(t_{k+1}-s_k)} \cdot \tilde{\delta}_1 \leq e^{-\hat{\lambda}_1 \tilde{\delta}} \cdot \tilde{\delta}_1 = |1 - \tilde{b}|(1 - \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha})\tilde{\alpha}$ 。又由引理 3 和式 (30) ~ 式 (31) 可知, $\sqrt{V_2(t_{k+1})} \leq \sqrt{V_2(s_k)} \cdot e^{-\hat{\lambda}_1(t_{k+1}-s_k)} \leq \tilde{\delta}_1 \cdot |x_1(t_k)| \cdot e^{-\hat{\lambda}_1(t_{k+1}-s_k)} \leq \tilde{\alpha} |x_1(t_{k+1})|$ 。所以由数

学归纳法可知 $\forall k \geq k_1$ ，都有式 (24) 成立。

由式 (29) 可知，

$$|x_1(t_{k+1})| \leq |1 - \tilde{b}|(1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha}) |x_1(t_k)| \leq [|1 - \tilde{b}|(1 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{\alpha})]^{k-k_1+1} |x_1(t_{k_1})|, \tag{34}$$

所以由式 (32) 可知，

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(t_k)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_1(t_{k+1})| = 0. \tag{35}$$

又注意到命题 2、式 (24) 和式 (31)，可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} V_2(s_k) = 0$ ， $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{V_1(t_k)} = 0$ 。由式 (26) 可知， $|\mathbf{x}^*(t_k)| \leq |\mathbf{x}^*(t_k) - x_1(t_k)| + |x_1(t_k)| \leq (\tilde{\alpha}/\sqrt{n} + 1) |x_1(t_k)|$ ，所以，由式 (35) 可知， $\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbf{x}^*(t_k)| = 0$ 。

与定理 1 的证明类似，可证明系统 (1) 在 0 上达到一致性。

由式 (29) 和式 (32) 可知 $\{|x_1(t_k)| | k \geq k_1\}$ 单调递减。

注 6 取 $\varepsilon > 0$ 为最大允许误差，若所有 $b_k = \tilde{b} = \bar{b}$ ， $\tilde{\alpha}$ 为很小的正数，且定理 2 的条件成立，则由式 (34) 可知， $|x_1(t_{K+1})| \leq \varepsilon$ 所需的非瞬时脉冲次数为 $K + 1 - k_1 \approx [\ln(\varepsilon/|x_1(t_{k_1})|)]/\ln|1 - \tilde{b}|$ 。所以在这种情况下，当 b_k 都较接近于 1 时，系统 (1) 在 0 上达到一致性所需的非瞬时脉冲次数较少。若某个 $b_k = 1$ ，只需取 $t_{k+1} = +\infty$ ，则系统 (1) 在 0 上达到一致性。

2.3 有效初始脉冲时刻 k_1 的设计

命题 6 假设 $\mathbf{x}^*(t_0) \neq 0$ 且 $V_1(t_0) \neq 0$ ，任取 $\tilde{\alpha} \in (0, +\infty)$ ，若 $t_0 + \tilde{\beta} \leq \tilde{t}_0 < s_0$ ，则 $\sqrt{V_2(\tilde{t}_0)} \leq \tilde{\alpha} |x_1(\tilde{t}_0)|$ ，其中： $\tilde{\beta} = \max\{0, \tilde{\beta}_1\}$ ； $\tilde{\beta}_1 = [-\ln(\tilde{\alpha} \cdot |\mathbf{x}^*(t_0)| / ((1 + \sqrt{n-1} + \tilde{\alpha}) \sqrt{V_1(t_0)}))] / \lambda_2$ 。

证明 由 $\tilde{t}_0 - t_0 \geq \tilde{\beta} \geq \tilde{\beta}_1 = [-\ln(\tilde{\alpha} \cdot |\mathbf{x}^*(t_0)| / ((1 + \sqrt{n-1} + \tilde{\alpha}) \sqrt{V_1(t_0)}))] / \lambda_2$ 可知 $e^{-\lambda_2(\tilde{t}_0 - t_0)} \leq \tilde{\alpha} \cdot |\mathbf{x}^*(t_0)| / ((1 + \sqrt{n-1} + \tilde{\alpha}) \sqrt{V_1(t_0)})$ ，

所以由引理 2 和式 (36) 可知， $(1 + \sqrt{n-1} + \tilde{\alpha}) \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)} \leq (1 + \sqrt{n-1} + \tilde{\alpha}) \sqrt{V_1(t_0)} e^{-\lambda_2(\tilde{t}_0 - t_0)} \leq \tilde{\alpha} |\mathbf{x}^*(t_0)|$ 。所以

$$(1 + \sqrt{n-1}) \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)} \leq \tilde{\alpha} [|\mathbf{x}^*(t_0)| - \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)}]. \tag{37}$$

由引理 2 可知 $\mathbf{x}^*(\tilde{t}_0) = \mathbf{x}^*(t_0)$ 。又因为

$$|\mathbf{x}^*(\tilde{t}_0)| - |x_1(\tilde{t}_0)| \leq |\mathbf{x}^*(\tilde{t}_0) - x_1(\tilde{t}_0)| \leq \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)}, \tag{38}$$

所以

$$|x_1(\tilde{t}_0)| \geq |\mathbf{x}^*(\tilde{t}_0)| - \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)} = |\mathbf{x}^*(t_0)| - \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)}. \tag{39}$$

所以由式 (37) ~ 式 (39) 可知， $\sqrt{V_2(\tilde{t}_0)} = \|\hat{\mathbf{x}}(\tilde{t}_0) - \mathbf{x}^*(\tilde{t}_0) \cdot \mathbf{1}_{n-1} + (\mathbf{x}^*(\tilde{t}_0) - x_1(\tilde{t}_0)) \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| \leq \|\mathbf{x}(\tilde{t}_0) - \mathbf{x}^*(\tilde{t}_0) \cdot \mathbf{1}_n\| + \|[\mathbf{x}^*(\tilde{t}_0) - x_1(\tilde{t}_0)] \cdot \mathbf{1}_{n-1}\| = \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)} + |\mathbf{x}^*(\tilde{t}_0) - x_1(\tilde{t}_0)| \cdot \sqrt{n-1} \leq (1 + \sqrt{n-1}) \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)} \leq \tilde{\alpha} [|\mathbf{x}^*(t_0)| - \sqrt{V_1(\tilde{t}_0)}] \leq \tilde{\alpha} |x_1(\tilde{t}_0)|$ 。

注 7 只需把 $t_0, \mathbf{x}(t_0)$ 分别重新定义为 $\tilde{t}_0, \mathbf{x}(\tilde{t}_0)$ ，则通过命题 6 容易找到一些常数，使它们满足定理 2 的条件。

3 仿真实例

考虑由 100 个智能体组成的系统 (1)，其网络通讯拓扑结构图 G 如图 1 所示。假设每条边的权重都是 1，则其对应的拉普拉斯矩阵，即

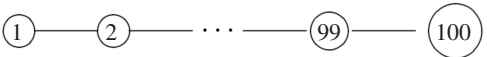


图 1 网络图 G

Fig.1 Network graph G

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{100 \times 100}。$$

在下面 4 个仿真实验里，都取 $t_0 = 0$ 、 $x_1(t_0) = 0.3$ 、 $x_2(t_0) = 0.5$ 、 $x_3(t_0) = \cdots = x_{50}(t_0) = 0.7$ 、 $x_{51}(t_0) = \cdots = x_{99}(t_0) = 0.9$ 、 $x_{100}(t_0) = 1.1$ ，都取 $\varepsilon = 0.01$ 为 $\|\mathbf{x}(t)\|$ 的最大允许误差。为了方便，终止准则（即停止脉冲的准则）都为 $\|\mathbf{x}(t_k)\| \leq \varepsilon$ 。

1) 取所有 $b_k = \underline{b} = \bar{b} = 0.8$ ，取 $\bar{M} = 0.000\ 1$ ，则 $\bar{\delta}_1 = 0.000\ 1$ 。取 $\underline{\delta} = \bar{\delta} = 0$ （由注 2 可知系统（1）变成了文献 [7, 21] 所研究的具有脉冲牵引控制的系统），取所有 $t_{k+1} - s_k = \underline{\delta} = \bar{\delta} = 0$ ，则 $\bar{h} = 0$ 、 $\underline{h} = 0$ 、 $\underline{\eta} = \bar{\eta} = 0.992\ 0$ 、 $\bar{b} = 0.2$ 、 $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 0.8$ 、 $\bar{\alpha}_2/\bar{\alpha}_1 = 1$ 。取 $\bar{\alpha} = 0.98$ ，则 $\bar{\beta}_1 = 421.554\ 3$ 。取 $\bar{\beta}_2 = 0.01$ ，则 $\bar{\beta} = 421.554\ 3$ ，所以可取 $s_0 = 422$ 。取 $\bar{\omega}_1 = 0.9$ ，则 $\bar{\omega}_2 = 0.044\ 3$ ， $\bar{\omega} = 3\ 158.6$ ，所以可取所有 $s_{k+1} - t_{k+1} = 3\ 159$ 。取 $k_0 = 0$ ，由命题 3 和命题 5 可知定理 1 的条件成立。部分智能体的状态轨迹如图 2 所示，满足终止准则所需的脉冲次数为 833。

2) 取所有 $b_k = \underline{b} = \bar{b} = 0.8$ ， $\bar{M} = 3\ 000$ ，则 $\bar{\delta}_1 = 3\ 000$ 。取 $\underline{\delta} = \bar{\delta} = 2\ 999$ 、所有 $t_{k+1} - s_k = \underline{\delta} = \bar{\delta} = 2\ 999$ ，则 $\bar{h} = 1$ 、 $\underline{h} = 0.526\ 4$ 、 $\underline{\eta} = 0.2$ 、 $\bar{\eta} = 0.575\ 1$ 、 $\bar{b} = 0.2$ 、 $\bar{\alpha}_1 = 30.549\ 9$ 、 $\bar{\alpha}_2 = 42.491\ 7$ 、 $\bar{\alpha}_2/\bar{\alpha}_1 = 0.654\ 7$ 。取 $\bar{\alpha} = 0.327\ 3$ ，则 $\bar{\beta}_1 = 1\ 532.7$ 。取 $\bar{\beta}_2 = 0.01$ ，则 $\bar{\beta} = 1\ 532.7$ 。所以可取 $s_0 = 1\ 533$ 。取 $\bar{\omega}_1 = 0.9$ ，则 $\bar{\omega}_2 = 0.003\ 9$ ， $\bar{\omega} = 5\ 629.3$ 。所以可取所有 $s_{k+1} - t_{k+1} = 5\ 630$ 。取 $k_0 = 0$ ，由命题 3 和命题 5 可知定理 1 的条件成立。部分智能体的状态轨迹如图 3 所示，满足终止准则所需的脉冲次数为 10。

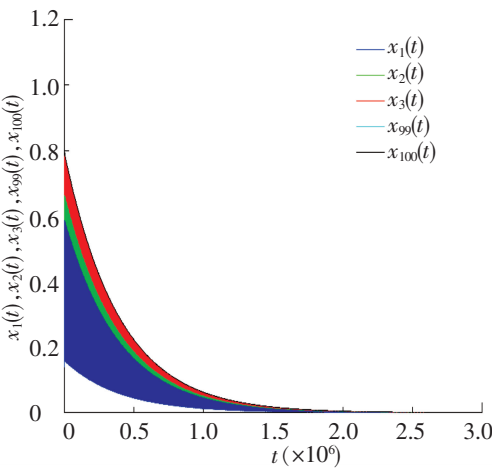


图 2 部分智能体的状态轨迹(情形 1)

Fig.2 The state trajectories of some agents(case 1)

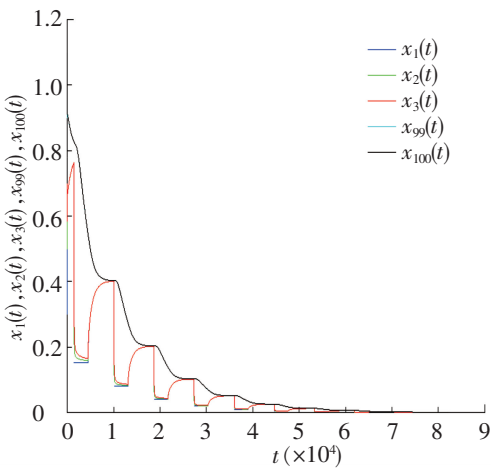


图 3 部分智能体的状态轨迹(情形 2)

Fig.3 The state trajectories of some agents(case 2)

3) 取所有 $b_k = \underline{b} = \bar{b} = 101$ ，则 $\bar{\delta}_1 = 0.002\ 5$ 。取 $\underline{\delta} = \bar{\delta} = 0.001\ 2$ ，所有 $t_{k+1} - s_k = \underline{\delta} = \bar{\delta} = 0.001\ 2$ ，则 $\bar{h} = 0.004\ 8$ 、 $\underline{h} = 2.990\ 7 \times 10^{-7}$ 、 $\underline{\eta} = 0.01$ 、 $\bar{\eta} = 0.488\ 7$ 、 $\bar{b} = 100$ 、 $\bar{\alpha}_1 = 148.442\ 0$ 、 $\bar{\alpha}_2 = 1.003\ 0$ 、 $\bar{\alpha}_2/\bar{\alpha}_1 = 0.006\ 8$ 。取 $\bar{\alpha} = 0.003\ 3$ ，则 $\bar{\beta}_1 = 6\ 190.9$ 。取 $\bar{\beta}_2 = 1.182\ 5$ ，则 $\bar{\beta} = 6\ 190.9$ ，所以可取 $s_0 = 6\ 191$ 。取 $\bar{\omega}_1 = 0.9$ ，则 $\bar{\omega}_2 = 8.397\ 6 \times 10^{-9}$ ， $\bar{\omega} = 18\ 843$ ，所以可取所有 $s_{k+1} - t_{k+1} = 18\ 843$ 。取 $k_0 = 0$ ，由命题 4 和命题 5 可知定理 1 的条件成立。部分智能体的状态轨迹如图 4 所示，满足终止准则所需的脉冲次数为 3。

4) 取所有 $b_k = \tilde{b} = \bar{b} = 0.8$, 所有 $s_{k+1} - t_{k+1} = \tilde{\omega} = 0.001$, 则 $\tilde{\alpha}_1 = 2.100\ 0$ 、 $\tilde{\alpha}_2 = 1$ 、 $\tilde{\alpha}_2/\tilde{\alpha}_1 = 0.476\ 2$, 故可取 $\tilde{\alpha} = 0.4$, 所以 $\tilde{\delta}_1 = 30.729\ 2$, $\tilde{\delta} = 31\ 231$ 。因此可取所有 $t_{k+1} - s_k = 31\ 232$ 。因为 $\tilde{\beta}_1 = 3\ 791.1$, 故 $\tilde{\beta} = 3\ 791.1$, 所以可取 $\tilde{t}_0 = 3\ 792$ 。把 $t_0, \mathbf{x}(t_0)$ 分别重新定义为 $\tilde{t}_0, \mathbf{x}(\tilde{t}_0)$, 取 $s_0 = \tilde{t}_0 + \tilde{\omega} = 3\ 792.001$ 、 $k_1 = 0$, 由命题 6 可知定理 2 的条件成立。部分智能体的状态轨迹如图 5 所示, 满足终止准则所需的脉冲次数为 5。

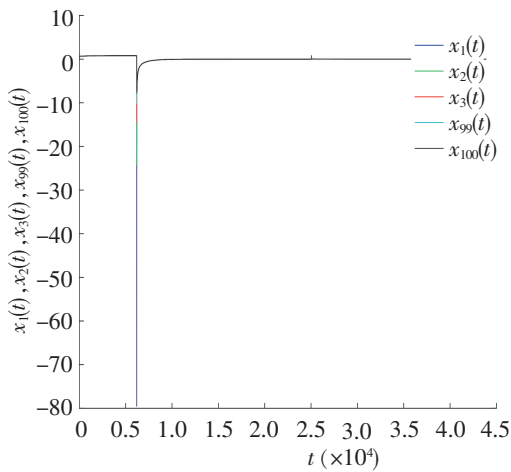


图 4 部分智能体的状态轨迹(情形 3)

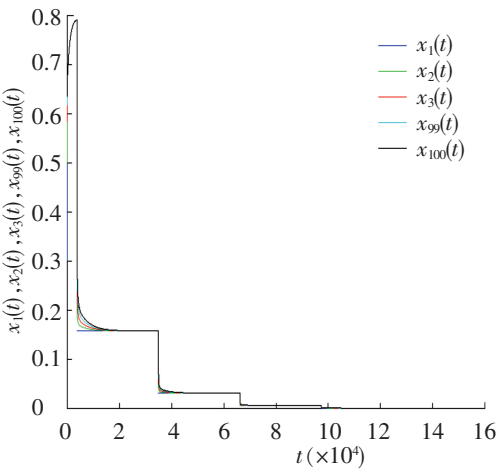


图 5 部分智能体的状态轨迹(情形 4)

Fig.4 The state trajectories of some agents(case 3) Fig.5 The state trajectories of some agents(case 4)

由仿真实例可知, 在脉冲强度适中但智能体数量很多的情况下, 用本文的方法所需的脉冲次数比用文献 [7, 21] 的要少得多。

4 结论

本文研究了只对一个智能体进行非瞬时脉冲牵引控制的多智能体系统的一致性问题。在通讯拓扑是无向连通图的情况下, 给出了使多智能体系统在 0 上达到一致性的 2 个充分条件。在一定条件下, 用定理 2 所需的脉冲次数虽然比用定理 1 所需的少, 但是受脉冲的智能体有时要忍受较长时间的掉队, 而且定理 2 对脉冲强度的要求比定理 1 的高。在智能体数量很多且脉冲强度都较接近于 1 但小于 1 的情况下, 选择恰当的非瞬时区间长度和初始脉冲时刻, 将大大减少使多智能体达到一致性所需的脉冲次数。本文还给出了一些非瞬时区间长度和有效初始脉冲时刻的设计, 并用仿真实例验证了这些结果。

[参 考 文 献]

[1] HONG Y G, HU J P, GAO L X. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology [J]. Automatica, 2006, 42: 1177-1182.

[2] SU S Z, LIN Z L. Connectivity enhancing coordinated tracking control of multiagent systems with a state-dependent jointly-connected dynamic interaction topology [J]. Automatica, 2019, 101: 431-438.

[3] SUN F L, WANG R, ZHU W, et al. Flocking in nonlinear multi-agent systems with time-varying delay via event-triggered control [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 350: 66-77. DOI:10.1016/j.amc.2018.12.056.

[4] CONSOLINI L, MORBIDI F, PRATTICCHIZZO D, et al. Leader-follower formation control of nonholonomic mobile robots with input constraints [J]. Automatica, 2008, 44: 1343-1349.

[5] ZHANG H T, CHEN M Z Q, STAN G B. Fast consensus via predictive pinning control [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2011, 58(9): 2247-2258. DOI:10.1109/TCSI.2011.2123450.

[6] CHEN Y, LU J H, YU X H, et al. Multi-agent systems with dynamical topologies: consensus and applications [J].

- IEEE Transactions on Circuits and Systems Magazine, 2013, 13(3): 21-34. DOI:10.1109/MCAS.2013.2271443.
- [7] LIU B, LU W L, CHEN T P. Pinning consensus in networks of multiagents via a single impulsive controller [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2013, 24(7): 1141-1149.
- [8] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533. DOI:10.1109/TAC.2004.834113.
- [9] SHARIATI A, TAVAKOLI M. A descriptor approach to robust leader-following output consensus of uncertain multi-agent systems with delay [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2017, 62(10): 5310-5317.
- [10] WANG Y, MA Z J, ZHENG S, et al. Pinning control of lag-consensus for second order nonlinear multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 47(8): 2203-2211. DOI:10.1109/TCYB.2016.2591518.
- [11] MAO J, KARIMI H R, XIANG Z R. Observer-based adaptive consensus for a class of nonlinear multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 49(9): 1893-1900.
- [12] WU Z G, XU Y, LU R Q, et al. Event-triggered control for consensus of multi-agent systems with fixed/switching topologies [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2018, 48(10): 1736-1746.
- [13] LIU X Z, WILLMS A R. Impulsive controllability of linear dynamical systems with applications to maneuvers of spacecraft [J]. Mathematical Problems in Engineering, 1996, 2(4): 277-299.
- [14] YANG Z C, XU D Y. Stability analysis of delay neural networks with impulsive effects [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2005, 52(8): 517-521. DOI:10.1109/TCSII.2005.849032.
- [15] TAN X G, CAO J D, LI X D. Consensus of leader-following multiagent systems: a distributed event-triggered impulsive control strategy [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(3): 792-801.
- [16] MA T D, ZHANG Z L, CUI B. Adaptive consensus of multi-agent systems via odd impulsive control [J]. Neurocomputing, 2018, 321: 139-145. DOI:10.1016/j.jfranklin.2018.07.030.
- [17] LIU X Z, ZHANG K X, XIE W C. Consensus of multi-agent systems via hybrid impulsive protocols with time-delay [J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2018, 30: 134-146. DOI:10.1016/j.nahs.2018.05.005.
- [18] LIU B, HILL D J. Impulsive consensus for complex dynamical networks with nonidentical nodes and coupling time-delays [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2011, 49(2): 315-338. DOI:10.1137/080722060.
- [19] CHEN T P, LIU X W, LU W L. Pinning complex networks by a single controller [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2007, 54(6): 1317-1326. DOI:10.1109/TCSI.2007.895383.
- [20] HONG Y X, BIN H H, HUANG Z K. Synchronization of state-switching hopfield-type neural networks: a quantized level set approach [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2019, 129: 16-24. DOI:10.1016/j.chaos.2019.08.016.
- [21] 颜青, 马米花, 吴海亮. 具有引导者的多智能体网络系统的脉冲一致性 [J]. 动力学与控制学报, 2012, 10(2): 152-156.
- [22] HERNÁNDEZ E, O'REGAN D. On a new class of abstract impulsive differential equations [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2013, 141(5): 1641-1649.
- [23] WANG J R. Stability of noninstantaneous impulsive evolution equations [J]. Applied Mathematics Letters, 2017, 73: 157-162. DOI:10.1016/j.aml.2017.04.010.
- [24] AGARWAL R, O'REGAN D, HRISTOVA S. Monotone iterative technique for the initial value problem for differential equations with noninstantaneous impulses [J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 298: 45-56.
- [25] AGARWAL R, O'REGAN D, HRISTOVA S. Stability by Lyapunov like functions of nonlinear differential equations with non-instantaneous impulses [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2017, 53: 147-168.
- [26] SHAH S O, ZADA A. Existence, uniqueness and stability of solution to mixed integral dynamic systems with instantaneous and noninstantaneous impulses on time scales [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 359: 202-213.
- [27] LIU S D, WANG J R, ZHOU Y. Optimal control of noninstantaneous impulsive differential equations [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354: 7668-7698. DOI:10.1016/j.jfranklin.2017.09.010.
- [28] YU W W, WEN G H, CHEN G R, et al. Distributed cooperative control of multiagent systems [M]. Singapore: John Wiley & Sons Singapore Pte Ltd, 2016: 11-23.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)