

具有非线性恢复率的随机 SIQR 模型的阈值动力学

孙乾乾¹, 赵宇², 谭德君¹, 张树文²

(1. 厦门工学院数据科学与智能工程学院, 福建 厦门 361021; 2. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究具有饱和发生率和非线性恢复率的随机 SIQR 流行病模型。证明对于任意给定的初始值, 随机模型总是存在唯一的全局正解。得到随机模型的基本再生数 R_0^s , 证明该基本再生数是决定疾病灭绝与持久的阈值参数: 当 $R_0^s < 1$ 时, 疾病将以概率 1 灭绝; 当 $R_0^s > 1$ 时, Markov 过程是正常返的, 即疾病是持久的。

[关键词] SIQR 模型; 非线性恢复率; 正常返; 阈值

[中图分类号] O 211.63

Threshold Dynamics of Stochastic SIQR Epidemic Model with Nonlinear Recovery Rate

SUN Qianqian¹, ZHAO Yu², TAN Dejun¹, ZHANG Shuwen²

(1. Data Science and Intelligent Engineering School, Xiamen Institute of Technology, Xiamen 361021, China;

2. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, a stochastic SIQR epidemic model with saturation incidence rate and nonlinear recovery rate was studied. It was firstly proved that there exists a unique global positive solution for any given initial value. Then, the basic reproduction number R_0^s was obtained, and it was shown that this basic reproduction number is the threshold parameter that determines the extinction and persistence of the disease: when $R_0^s < 1$, the disease is extinct with probability 1; when $R_0^s > 1$, the Markov process is positive recurrence which indicates that the disease will prevail.

Keywords: SIQR model; nonlinear recovery rate; positive recurrence; threshold

0 引言

疫情的暴发对人们的生活产生了深远的影响^[1]。纵观历史, 也有许多其他大型流行疾病对人类的生命健康构成严重威胁, 如 1918 年西班牙的大流感^[2]、欧洲 20 世纪中世纪的大瘟疫^[3]等。由于无法及时生产有效的疫苗以及病毒的快速变异, 隔离被认为是控制传染病传播的有效方法^[4-7]。此外, 有效治疗是保障人类生命安全和减少疾病传播的重要方法^[8]。但在疾病暴发期间, 医护人员数量、医疗设备、医院床位和药品的数量都是非常有限的^[9-11]。因此, 为了刻画医疗资源对疾病的影响, 文献[11]提出非线性恢复率 $\gamma(b, I) = \gamma_0 + (\gamma_1 - \gamma_0)b/(I + b)$, 其中: γ_1 、 γ_0 分别是最大和最小的

[收稿日期] 2022-10-16

[基金项目] 厦门工学院中青年科研基金项目(KYT2022013); 福建省自然科学基金项目(2018J01418); 集美大学国家自然科学基金培育项目(ZP2020064)

[作者简介] 孙乾乾(1992—), 女, 助教, 从事生物数学方向研究。通信作者: 张树文(1963—), 男, 教授, 硕导, 从事生物数学方向研究。E-mail: zhangsw_123@126.com

恢复率; I 是染病者的数量; b 是医疗资源。本文将在文献[5,11]研究的基础上,提出 SIQR 模型为

$$\begin{cases} dS = (A - \beta SI/N - \mu S) dt, \\ dI = (\beta SI/N - (\gamma(b, I) + \delta + \mu + \alpha_1) I) dt, \\ dQ = (\delta I - (\varepsilon + \mu + \alpha_2) Q) dt, \\ dR = (\gamma(b, I) I + \varepsilon Q - \mu R) dt, \end{cases} \quad (1)$$

其中: S 、 Q 、 R 分别是易感者、隔离者、恢复者的数量; $N = S + I + Q + R$ 是总人口的数量; A 是新的易感者的输入率; β 是疾病的传播速率; μ 是自然死亡率; δ 是隔离率; α_1 和 α_2 分别是染病者和隔离者的因病死亡率; ε 是隔离者的恢复率。

此外,大量实验和流行病学研究表明,病毒的活性、感染力与周围空气的湿度、温度等密切相关^[12-15]。因此,在流行病的传播过程中,疾病的传播速率不可避免会受到环境随机波动的影响^[16-19]。本文假设模型(1)的疾病传播速率 β 受到白噪声的干扰,即 $\beta dt \rightarrow \beta dt + \sigma dB(t)$, 然后得到的模型为

$$\begin{cases} dS = (A - \beta SI/N - \mu S) dt - \sigma SI/N dB, \\ dI = (\beta SI/N - (\gamma(b, I) + \delta + \mu + \alpha_1) I) dt + \sigma SI/N dB, \\ dQ = (\delta I - (\varepsilon + \mu + \alpha_2) Q) dt, \\ dR = (\gamma(b, I) I + \varepsilon Q - \mu R) dt, \end{cases} \quad (2)$$

其中: σ 是白噪声的波动强度; B 是一维标准布朗运动。

1 主要结果及证明

令 (Ω, F, P) 是一个带有滤子 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 并且满足通常条件 (即 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 是右连续单调递增, 且 F_0 包含所有零测集) 的完备概率空间。为方便起见, 约定记号: $\mathbf{R}_+^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}^n \mid x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$ 。

在流行病模型的研究中,基本再生数 R_0 是一个重要的量,它表示发病初期在一个全部是易感人群的环境中,一个染病者在平均患病期内所传染的人数。利用下一代矩阵可得到模型(1)的基本再生数为

$$R_0 = \beta / (\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1)。 \quad (3)$$

由此可知定理 1。

定理 1 模型(1)总是存在无病平衡点 $E_0 = (A/\mu, 0, 0, 0)$ 。如果 $R_0 < 1$, 则模型(1)的无病平衡点 E_0 是局部渐近稳定的; 如果 $R_0 > 1$, 则 E_0 是不稳定的。

定理 2 如果 $R_0 > 1$, 则模型(1)存在唯一的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, Q^*, R^*)$ 。

证明 由于模型(1)的地方病平衡点 $E^*(S^*, I^*, Q^*, R^*)$ 满足方程

$$\begin{cases} A - \beta S^* I^* / N^* - \mu S^* = 0, \\ \beta S^* I^* / N^* - (\gamma(b, I^*) + \delta + \mu + \alpha_1) I^* = 0, \\ \delta I^* - (\varepsilon + \mu + \alpha_2) Q^* = 0, \\ \gamma(b, I^*) I^* + \varepsilon Q^* - \mu R^* = 0. \end{cases} \quad (4)$$

容易验证 I^* 满足方程

$$\alpha_1 - \alpha_2 I^{*2} - \alpha_3 I^* = 0, \quad (5)$$

其中: $\alpha_1 = Ab(\beta - (\delta + \mu + \alpha_1 + \gamma_1))$; $\alpha_2 = \{\beta - [1 - (\mu + \varepsilon)/(\varepsilon + \mu + \alpha_2)]\delta - \alpha_1\}(\delta + \mu + \alpha_1 + \gamma_0)$; $\alpha_3 = \{\beta - [1 - (\mu + \varepsilon)/(\varepsilon + \mu + \alpha_2)]\delta - \alpha_1\}(\delta + \mu + \alpha_1 + \gamma_1)b - A[\beta - (\delta + \mu + \alpha_1 + \gamma_0)]$ 。当 $R_0 > 1$ 时, 有 $\alpha_1 > 0$ 且 $\alpha_2 > 0$ 。由二次方程求根公式可知, 方程(5)存在唯一的正解, 即当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1)存在唯一的地方病平衡点, 定理 2 证毕。

显然, 当 $R_0 < 1$ 时, 方程(5)可能存在两个正解, 即模型(1)可能存在两个正平衡点。因此, 模型(1)可能存在后向分岔。接下来应用中心流形定理来证明模型(1)在 $R_0 = 1$ 时发生后向分岔。

首先, 选择 β 作为分岔参数。然后, 由 $R_0 = 1$ 可得 $\beta = \beta^* = \gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1$ 。令 J_{β^*} 为具有 $\beta = \beta^*$

的模型(1)在 $E_0 = (A/\mu, 0, 0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵, 即 $J_{\beta^*} = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & -(\varepsilon + \mu + \alpha_2) & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \varepsilon & -\mu \end{pmatrix}$ 。

显然, 0 是 J_{β^*} 的一个简单特征值。 J_{β^*} 关于特征值 0 的一个右特征向量 w 和左特征向量 v 分别为 $[-(\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1)(\varepsilon + \mu + \alpha_2)/(\delta\mu), (\varepsilon + \mu + \alpha_2)/\delta, 1, (\alpha_2\gamma_1 + \delta\varepsilon + \gamma_1\mu + \gamma_1\varepsilon)/(\delta\mu)]^T$ 、 $(0, 1, 0, 0)^T$ 。令 φ_k 为模型(1)的第 k 个方程的右边, 其中 $k = 1, 2, 3, 4$, x_1, x_2, x_3, x_4 分别为模型(1)的状态变量 S 、

I 、 Q 、 R 。令 $\phi = \beta - \beta^*$, 定义 $\Lambda_1 = \sum_{k,i,j}^4 [v_k w_i w_j (\partial^2 \varphi_k) / (\partial x_i \partial x_j)]$ 、 $\Lambda_2 = \sum_{k,i}^4 [v_k w_i (\partial^2 \varphi_k) / (\partial x_i \partial \phi)]$ 。

通过计算可得

$$\Lambda_1 = 2(\varepsilon + \mu + \alpha_2)/\delta \{ [-(\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1)\mu/A - \varepsilon/\mu] + (\varepsilon + \mu + \alpha_2)/\delta [-(\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1)\mu/A - \gamma_1/\mu + (\gamma_1 - \gamma_0)/b] \}, \tag{6}$$

且 $\Lambda_2 = (\varepsilon + \mu + \alpha_2)/\delta > 0$ 。然后, 根据文献[20]中的定理 4.1 可得定理 3。

定理 3 如果 $\Lambda_1 > 0$, 则模型(1)在 $R_0 = 1$ 处发生后向分岔。

为了方便理解, 给出例 1。

例 1 首先取如下参数: $A = 30$, $\mu = 0.1$, $\gamma_0 = 0.009\ 8$, $\gamma_1 = 0.239\ 4$, $b = 0.072$, $\delta = 0.104\ 6$, $\alpha_1 = 0.001\ 7$, $\varepsilon = 0.239\ 4$, $\alpha_2 = 0.001\ 1$, 且令 β 在区间 $[0.133\ 71, 0.467\ 985]$ 内变化, 使得 R_0 在区间 $[0.30, 1.05]$ 内变化。由式(6)可得, $\Lambda_1 = 1.219\ 07 > 0$ 。因此, 根据定理 3 可知, 模型(1)在 $R_0 = 1$ 处发生后向分岔 (见图 1)。

此外, 令 $\beta = 0.231\ 76$, 此时 $R_0 = 0.52$ 。根据定理 3 可知, 模型(1)的解要么被地方病平衡点 $E^*(282.160\ 667\ 5, 8.179\ 298\ 012, 2.512\ 641\ 915, 6.980\ 705\ 454)$ 所吸引, 要么被无病平衡点 $E^*(300, 0, 0, 0)$ 所吸引。这意味着, R_0 不足以完全确定基本的动力学行为, 还需要考虑初始条件等其他流行病学因素 (见图 2)。

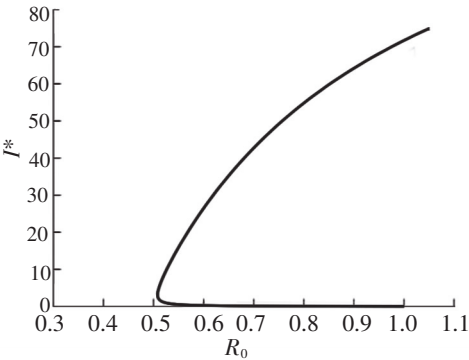


图 1 模型(1)的后向分岔曲线
Fig.1 Backward bifurcation curve of model (1)

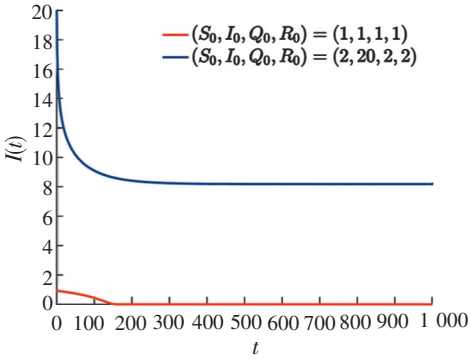


图 2 模型(1)的 $I(t)$ 时间序列
Fig.2 Time series of $I(t)$ of model (1)

定理 4 对任意的初始值 $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) \in \mathbf{R}_+^4$, 模型(2)在 $[0, \infty)$ 上存在唯一解 $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$, 并且该解始终在区域 \mathbf{R}_+^4 上。同时, 该解还具有如下性质: 对任意 $w \in \Omega$, 存在 $t_0 = t_0(w) > 0$, 使得当 $t \geq t_0$ 时, 有 $A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2) < S(t, w) + I(t, w) + Q(t, w) + R(t, w) < A/\mu$ 。

定理 4 的证明比较简单, 详细的证明过程可参考文献[21]。

注1 定义 $\Gamma = \{(S(t), I(t), Q(t), R(t)) \in \mathbf{R}_+^4 : A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2) < S(t) + I(t) + Q(t) + R(t) < A/\mu\}$ 。

由定理4可知,对于任意的初值 $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) \in \mathbf{R}_+^4$, 存在 $t_0 > 0$, 使得当 $t \geq t_0$ 时, 有 $(S(t), I(t), Q(t), R(t)) \in \Gamma$ 。因此, 下面仅在集合 Γ 上研究模型(2)的动力学行为。

定理5 假设 $R_0^* < 1$, 则任意初始值 $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) \in \Gamma$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), Q(t), R(t)) = (A/\mu, 0, 0, 0)$, 其中, $R_0^* = \beta/(\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1 + \sigma^2/2)$ 。

证明 首先证明, 对于任意的 $\epsilon > 0$, 总是存在 $\xi > 0$, 使得对于任意的 $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) \in \Gamma \cap O_\xi$, 其中, $O_\xi = (A/\mu - \xi, A/\mu) \times (0, \xi)^3$, 有

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), Q(t), R(t)) = (A/\mu, 0, 0, 0)\} = 1 - \epsilon. \quad (7)$$

定义: $f_1(S, I, Q, R) = A - \beta SI/N - \mu S$, $g(S, I, Q, R) = \sigma SI/N$; $f_2(S, I, Q, R) = \beta SI/N - (\gamma(b, I) + \delta + \mu + \alpha_1)I$, $\lambda = \beta - (\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1)$ 。 $f_1(S, I, Q, R)$ 、 $f_2(S, I, Q, R)$ 和 $g(S, I, Q, R)$ 在无病平衡点 $E_0 = (A/\mu, 0, 0, 0)$ 的偏导数分别为: $(\partial f_1)/(\partial S)(E_0) = -\mu$; $(\partial f_1)/(\partial I)(E_0) = -\beta$; $(\partial f_1)/(\partial Q)(E_0) = 0$; $(\partial f_1)/(\partial R)(E_0) = 0$; $(\partial f_2)/(\partial S)(E_0) = 0$; $(\partial f_2)/(\partial I)(E_0) = \lambda$; $(\partial f_2)/(\partial Q)(E_0) = 0$; $(\partial f_2)/(\partial R)(E_0) = 0$; $(\partial g)/(\partial S)(E_0) = 0$; $(\partial g)/(\partial I)(E_0) = \sigma$; $(\partial g)/(\partial Q)(E_0) = 0$; $(\partial g)/(\partial R)(E_0) = 0$ 。因此, $f_1(S, I, Q, R)$ 、 $f_2(S, I, Q, R)$ 和 $g(S, I, Q, R)$ 在无病平衡点 E_0 附近的泰勒展开分别为

$$f_1 = -\mu S - \beta I + o; f_2 = \beta I - (\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1)I + o; g = \sigma I + o, \quad (8)$$

其中 $o := o(\sqrt{(S - A/\mu)^2 + I^2 + Q^2 + R^2})$, 并且 $\lim_{(S, I, Q, R) \rightarrow (A/\mu, 0, 0, 0)} o(\sqrt{(S - A/\mu)^2 + I^2 + Q^2 + R^2}) / (\sqrt{(S - A/\mu)^2 + I^2 + Q^2 + R^2}) = 0$ 。

由 Itô 公式、 $R_0^* < 1$ 和式(8)可得, 对于任意的 $(S, I, Q, R) \in \Gamma \cap O_\xi$, 都有 $L \ln I = \beta - (\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1 + 0.5\sigma^2) + o < 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 。然后类似文献[21]中定理1的证明可得, $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = A/\mu$, 即对于任意的 $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) \in \Gamma \cap O_\xi$, 等式(7)总是成立的。

接下来证明, 对于任意的 $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) \in \Gamma$, 模型(2)的解 $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$ 总会在某一时刻进入区域 $\Gamma \cap O_\xi$ 。定义停时 $\tau_\xi = \inf\{t \geq 0 : S(t) \geq A/\mu - \xi\}$, 并定义函数 $V_1(S, I, Q, R) = C_1 - (1 + S)^{C_2}$, 其中 C_1 和 C_2 是两个正常数, 并且满足如下条件: 1) 对于任意的 $(S, I, Q, R) \in \Gamma$, 都有 $V_1 > 0$; 2) $C_2 > 2$; 3) 对于任意的 $S \in (0, A/\mu - \xi]$, 有 $(1 + S)(A - \beta SI/N - \mu S) + 0.5\sigma^2(C_2 - 1)S^2 I^2/N^2 \geq 0.5\xi$ 。

由 Itô 公式, $LV_1 = -C_2(1 + S)^{C_2-2}\{(1 + S)(A - \beta SI/N - \mu S) + 0.5\sigma^2(C_2 - 1)S^2 I^2/N^2\} \leq -0.5\xi$ 。然后, 根据 Dynkin 公式可得: $E[V_1(S(\tau_\xi \wedge t), I(\tau_\xi \wedge t), Q(\tau_\xi \wedge t), R(\tau_\xi \wedge t))] \leq V_1((S(0), I(0), Q(0), R(0))) - 0.5\xi E(\tau_\xi \wedge t)$ 。令 $t \rightarrow \infty$, 并根据 Fatou 引理可得: $E[V_1(S(\tau_\xi), I(\tau_\xi), Q(\tau_\xi), R(\tau_\xi))] \leq V_1((S(0), I(0), Q(0), R(0))) - 0.5\xi E(\tau_\xi)$ 。

注意到, 对于任意的 $(S, I, Q, R) \in \Gamma$, V_1 是有界的, 因此有

$$E(\tau_\xi) < \infty. \quad (9)$$

最后, 根据强 Markov 性质, 由式(7)和式(9)可得, 对任意的 $\epsilon > 0$, $P\{\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t), Q(t), R(t)) = (A/\mu, 0, 0, 0) = 1 - \epsilon$, 对于任意的 $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) \in \Gamma$ 。定理5证毕。

定理6 假设 $R_0^* > 1$, 则 Markov 过程 $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$ 关于 D_ϵ 是正常返的, 其中, $D_\epsilon = \{(S, I, Q, R) \in \Gamma : \epsilon \leq S \leq A/\mu, \epsilon \leq I \leq A/\mu, \epsilon^2 \leq Q \leq A/\mu, \epsilon^3 \leq R \leq A/\mu, A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2) + \epsilon^2 \leq N \leq A/\mu - \epsilon^2\}$, 并且 ϵ 是一个充分小的正常数。

证明 定义函数 $H(S, I, Q, R) = M[\ell_1(S + I + Q + R) - \ln I - \ell_2 \ln S] - \ln S - \ln Q - \ln R - \ln(N - A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2)) - \ln(A/\mu - N) := MV_1 + V_2$, 其中: $V_1 = \ell_1(S + I + Q + R) - \ln I - \ell_2 \ln S$; $V_2 = -[\ln S +$

$\ln Q + \ln R + \ln (N - A/(\mu + \alpha + \alpha)) + \ln (A/\mu - N)]$; $\ell_1 = (\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1 + 0.5\sigma^2)/A$; $\ell_2 = (\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1 + 0.5\sigma^2)/\mu$; M 是一个充分大的常数, 使得

$$-3M(\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1 + 0.5\sigma^2)(\sqrt[3]{R_0^*} - 1) + \beta + \mu + 0.5\sigma^2 + \varepsilon + \mu + \alpha_2 + \mu + \mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \mu \leq 2. \quad (10)$$

显然, 存在某一确定的点 $(S_*, I_*, Q_*, R_*) \in \mathbb{R}_+^4$, 使得函数 H 在该点取得最小值, 即 $H(S, I, Q, R) \geq H(S_*, I_*, Q_*, R_*)$ 。定义 $V(S, I, Q, R) = H(S, I, Q, R) - H(S_*, I_*, Q_*, R_*)$ 。因此, $V(S, I, Q, R) \geq 0$ 。由 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} LV_1 &\leq -\beta S/N + (\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1 + 0.5\sigma^2) + \ell_2(-A/S + \beta I/N + \mu + \sigma^2 I^2/(2N^2)) + \ell_1 A - \ell_2 \mu N \\ &\leq -3(\gamma_1 + \delta + \mu + \alpha_1 + 0.5\sigma^2)(\sqrt[3]{R_0^*} - 1) + \ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) I/A + 0.5\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I^2/A^2. \end{aligned} \quad (11)$$

并且有

$$\begin{aligned} LV_2 &\leq -A/S + \beta + \mu + 0.5\sigma^2 - \delta I/Q + (\varepsilon + \mu + \alpha_2) - \varepsilon Q/R + \mu - (\alpha_1 I + \alpha_2 Q)/(A/\mu - N) - \\ &\quad (\alpha_1 (S + Q + R) + \alpha_2 (S + I + R))/(N - A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2)) + \mu + \alpha_1 + \alpha_2 + \mu. \end{aligned} \quad (12)$$

根据式(10)~式(12)可得: $LV = MLV_1 + LV_2 \leq -2 + M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) I/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I^2/A^2 - A/S - \delta I/Q - \varepsilon Q/R - \alpha_2 I/(N - A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2)) - \alpha_1 I/(A/\mu - N)$ 。令 ε 是一个充分小的正常数, 使得 $-2 + M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) \varepsilon/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \varepsilon^2/A^2 \leq -1$, $M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)/\mu + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2/\mu^2 - \min\{A, \delta, \varepsilon, \alpha_1, \alpha_2\}/\varepsilon < -1$ 。

然后将 $\Gamma \setminus D_\varepsilon$ 分成 6 个区域, 即 $\Gamma \setminus D_\varepsilon = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6$, 其中: $D_1 = \{(S, I, Q, R) \in \Gamma: 0 < I < \varepsilon\}$; $D_2 = \{(S, I, Q, R) \in \Gamma: 0 < S < \varepsilon\}$; $D_3 = \{(S, I, Q, R) \in \Gamma: 0 < Q < \varepsilon^2, I \geq \varepsilon\}$; $D_4 = \{(S, I, Q, R) \in \Gamma: 0 < R < \varepsilon^3, Q \geq \varepsilon^2\}$; $D_5 = \{(S, I, Q, R) \in \Gamma: A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2) < N < A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2) + \varepsilon^2, I \geq \varepsilon\}$; $D_6 = \{(S, I, Q, R) \in \Gamma: A/\mu - \varepsilon^2 < N < A/\mu, I \geq \varepsilon\}$ 。

对于任意的 $(S, I, Q, R) \in D_1$, 有

$$\begin{aligned} LV &\leq -2 + M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) I/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I^2/A^2 \\ &\leq -2 + M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) \varepsilon/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 \varepsilon^2/A^2 \leq -1. \end{aligned} \quad (13)$$

对于任意的 $(S, I, Q, R) \in D_2$, 有

$$\begin{aligned} LV &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) I/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I^2/A^2 - A/S \\ &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)/\mu + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2/\mu^2 - A/\varepsilon \leq -1. \end{aligned} \quad (14)$$

对于任意的 $(S, I, Q, R) \in D_3$, 有

$$\begin{aligned} LV &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) I/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I^2/A^2 - \delta I/Q \\ &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha + \alpha)/\mu + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha + \alpha)^2/\mu^2 - \delta \varepsilon/\varepsilon^2 \leq -1. \end{aligned} \quad (15)$$

对于任意的 $(S, I, Q, R) \in D_4$, 有

$$\begin{aligned} LV &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) I/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I^2/A^2 - \varepsilon Q/R \\ &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)/\mu + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2/\mu^2 - \varepsilon \varepsilon^2/\varepsilon^3 \leq -1. \end{aligned} \quad (16)$$

对于任意的 $(S, I, Q, R) \in D_5$, 有

$$\begin{aligned} LV &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) I/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I^2/A^2 - \alpha_2 I/(N - A/(\mu + \alpha_1 + \alpha_2)) \\ &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)/\mu + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2/\mu^2 - \alpha_2 \varepsilon/\varepsilon^2 \leq -1. \end{aligned} \quad (17)$$

对于任意的 $(S, I, Q, R) \in D_6$, 有

$$\begin{aligned} LV &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2) I/A + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2 I^2/A^2 - \alpha_1 I/(A/\mu - N) \\ &\leq M\ell_2 \beta (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)/\mu + 0.5M\ell_2 \sigma^2 (\mu + \alpha_1 + \alpha_2)^2/\mu^2 - \alpha_1 \varepsilon/\varepsilon^2 \leq -1. \end{aligned} \quad (18)$$

由式(13)~式(18)可得, 对于任意的 $(S(t), I(t), Q(t), R(t)) \in \Gamma \setminus D_\varepsilon$, 有 $LV \leq -1$ 。因此, Markov 过程 $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$ 关于 D_ε 是正常返的, 定理 6 证毕。

注 2 定理 5 和定理 6 表明, 随机模型(2)的动力学行为完全由 R_0^* 所决定, 而确定性模型(1)的动

力学行为, 不仅依赖于基本再生数 R_0^s , 还依赖于初始条件等其他流行病学因素(见定理 3 和图 2)。

注 3 容易发现 $R_0^s < R_0$ 。如果 $R_0^s < 1 < R_0$, 此时确定性模型(1)预测的结果是疾病流行, 而随机模型(2)预测的结果刚好与之相反, 这意味着白噪声可以抑制疾病的流行。

2 数值模拟

根据 COVID-19 的实际参数值来验证并扩展本文的理论结果。首先假设, 武汉某一地区的常住人口总规模为 10 000 人, 每个人的平均寿命为 80 a, 且每千人拥有 5 张病床, 则自然死亡率 $\mu = 1/(365 \times 80) = 3.424\ 65 \times 10^{-5}$, 医院病床数 $b = 50$ 。假定新的易感者的输入率 $A = 30$, 疾病的传播速率 $\beta = 1.5$ 。其他的参数取自文献 [22]。总的参数取值为: $A = 30, \beta = 1.5, \mu = 3.424\ 65 \times 10^{-5}, \gamma_0 = 0.009\ 8, \gamma_1 = 1/14, b = 50, \delta = 0.104\ 6, \alpha_1 = 0.001\ 7, \varepsilon = 0.239\ 4, \alpha_2 = 0.001\ 1$ 。

接下来, 假设随机模型(2)的初值 $(S(0), I(0), Q(0), R(0)) = (7\ 000, 1\ 000, 1\ 000, 1\ 000)$, 并考虑白噪声强度 σ 对模型(2)动力学的影响。

例 2 令 $\sigma = 0.5$, 容易得到 $R_0^s = 4.954\ 373\ 228\ 157\ 128 > 1$ 。根据定理 6 可知, Markov 过程 $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$ 是正常返的, 即疾病是持久的(见图 3)。接下来, 令 $\sigma = 1.7$, 可得 $R_0^s = 0.924\ 35 < 1$, 且 $R_0 = 8.438\ 21$ 。根据定理 1 和定理 5 可知, 随机模型(2)预测了疾病将被根除, 而确定性模型(1)预测的结果却与之相反(见图 4)。

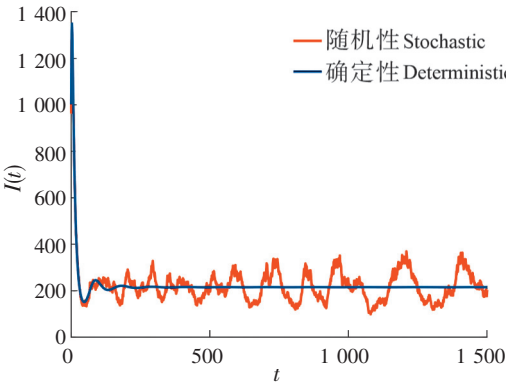


图 3 模型(2)和模型(1)的 $I(t)$ 时间序列图 ($\sigma=0.5$)
Fig.3 Time series of $I(t)$ of model (2) and model (1) ($\sigma=0.5$)

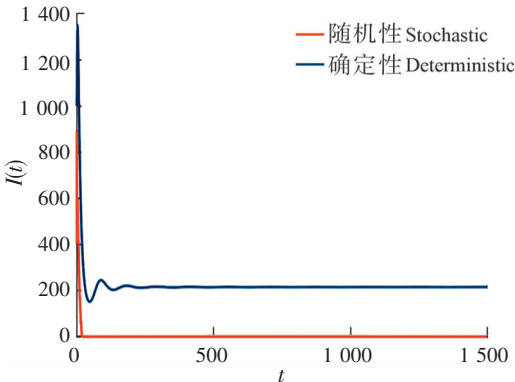


图 4 模型(2)和模型(1)的 $I(t)$ 时间序列图 ($\sigma=1.7$)
Fig.4 Time series of $I(t)$ of model (2) and model (1) ($\sigma=1.7$)

3 结论

本文研究了具有饱和发生率和非线性恢复率的随机 SIQR 流行病模型。证明了对于任意给定的初始值, 随机模型(2)总是存在唯一的全局正解; 得到了随机模型(2)的基本再生数 R_0^s , 并证明了该基本再生数是决定疾病灭绝与持久的阈值参数: 当 $R_0^s < 1$ 时, 疾病将以概率 1 灭绝; 当 $R_0^s > 1$ 时, Markov 过程 $(S(t), I(t), Q(t), R(t))$ 是正常返的, 即疾病是持久的。

[参考文献]

[1] World Health Organization. Coronavirus disease (COVID-19) pandemic [EB/OL]. (2020-12-28) [2022-10-13]. <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019>.

[2] BOOTSMA M C J, FERGUSON N M. The effect of public health measures on the 1918 influenza pandemic in US cities[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 2007, 104(18): 7588-7593.

[3] BRITANNICA E. Black death [EB/OL]. [2022-10-13]. <https://www.britannica.com/event/Black-Death>.

[4] FENG Z, THIEME H R. Recurrent outbreaks of childhood diseases revisited: the impact of isolation[J]. Mathematical Biosci-

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

- ences, 1995, 128(1/2):93-130.
- [5] HETHCOTE H, MA Z E, LIAO S B. Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases[J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, 180(1/2):141-160.
- [6] WU L I, FENG Z L. Homoclinic bifurcation in an SIQR model for childhood diseases[J]. *Journal of Differential Equations*, 2000, 168(1):150-167.
- [7] ERDEM M, SAFAN M, CASTILLO-CHAVEZ C. Mathematical analysis of an SIQR influenza model with imperfect quarantine [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2017, 79:1612-1636.
- [8] WANG W D. Backward bifurcation of an epidemic model with treatment[J]. *Mathematical Biosciences*, 2006, 201(1/2):58-71.
- [9] WANG W D, RUAN S G. Bifurcations in an epidemic model with constant removal rate of the infectives[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, 291(2):775-793.
- [10] ECKALBAR J C, ECKALBAR W L. Dynamics of an epidemic model with quadratic treatment[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2011, 12(1):320-332.
- [11] SHAN C H, ZHU H P. Bifurcations and complex dynamics of an SIR model with the impact of the number of hospital beds [J]. *Journal of Differential Equations*, 2014, 257(5):1662-1688.
- [12] TAN J G, MU L W, HUANG J X, et al. An initial investigation of the association between the SARS outbreak and weather: with the view of the environmental temperature and its variation[J]. *Journal of Epidemiology & Community Health*, 2005, 59(3):186-192.
- [13] LAMBRECHTS L, PAAIJMANS K P, FANSIRI T, et al. Impact of daily temperature fluctuations on dengue virus transmission by *Aedes aegypti* [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2011, 108(18):7460-7465.
- [14] WEI F Y, CHEN F X. Stochastic permanence of an SIQS epidemic model with saturated incidence and independent random perturbations[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2016, 453:99-107.
- [15] LIU M, BAI C Z, WANG K. Asymptotic stability of a two-group stochastic SEIR model with infinite delays[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2014, 19(10):3444-3453.
- [16] SHAMAN J, KOHN M. Absolute humidity modulates influenza survival, transmission, and seasonality[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2009, 106(9):3243-3248.
- [17] LOWEN A C, STEEL J. Roles of humidity and temperature in shaping influenza seasonality[J]. *Journal of Virology*, 2014, 88(14):7692-7695.
- [18] 赵彦军, 孙晓辉, 苏丽, 等. 具有 Logistic 增长和 Beddington-DeAngelis 发生率的随机 SIRS 传染病模型定性分析[J]. *数学物理学报*, 2022, 42(6):1861-1872.
- [19] 秦闯亮, 杜金姬, 陈海波, 等. 一随机 COVID-19 传染病模型的动力学行为[J]. *应用数学*, 2022, 35(3):553-562.
- [20] CASTILLO-CHAVEZ C, SONG B. Dynamical models of tuberculosis and their applications[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2004, 1(2):361-404.
- [21] LI D, CUI J A, LIU M, et al. The evolutionary dynamics of stochastic epidemic model with nonlinear incidence rate[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2015, 77:1705-1743.
- [22] ZHOU W K, WANG A L, WANG X, et al. Impact of hospital bed shortages on the containment of COVID-19 in Wuhan[J]. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 2020, 17(22):8560.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)