

# 具有 Markov 切换和偏利关系的捕食-食饵模型

林紫嫣, 魏春金, 张树文

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究具有 Markov 切换的含偏利关系的随机捕食-食饵模型的动力学。通过构造 Lyapunov 函数, 证明该系统的全局正解的存在唯一性, 并且给出种群平均持续生存和灭绝的充分条件; 证明系统存在唯一的平稳分布且具有遍历性。最后, 通过数值模拟来证实理论结果。

[关键词] 捕食-食饵系统; Markov 切换; 灭绝; 平均持续生存; 平稳分布; 遍历性

[中图分类号] O 211.63

## Predator-Prey System with Markov Switching and Partial Benefit Relationship

LIN Ziyang, WEI Chunjin, ZHANG Shuwen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** The dynamics of a stochastic predator-prey system with Markov switching and partial benefit relationship were investigated. By constructing Lyapunov functions, it was shown that the model had a global positive solution. Sufficient conditions of the system to be extinct and persistent in mean were also established. Then it was found that the system had a unique stationary distribution and ergodicity. Finally, some numerical simulations were provided to demonstrate the result.

**Keywords:** predator-prey system; Markov switching; extinction; persistent in the mean; stationary distribution; ergodicity

## 0 引言

在过去的几十年里, 许多学者对捕食-食饵模型进行了深入研究并获得丰富的研究成果<sup>[1-3]</sup>。但是, 现实中不同种群之间的关系是极其复杂的, 如偏利关系, 它是指种间相互作用仅对一方有利, 而对另一方没有影响。例如: 文鸟专在胡蜂窝的附近筑巢, 因为胡蜂有毒刺, 许多动物不敢接近, 文鸟得到保护, 但对胡蜂无害; 地衣、苔藓附在树皮上, 对树木没有影响, 但有利于从空气中获得水分和养分等。有些学者对具偏利关系的种群模型进行了研究<sup>[4-9]</sup>, 但总体偏少, 本文考虑了如下具有偏利关系的随机捕食-食饵模型, 即

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(r_1 - a_1x(t) - cz(t)) + \sigma_1x(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)(r_2 - a_2y(t) + bx(t)) + \sigma_2y(t)dB_2(t), \\ dz(t) = z(t)(-d - a_3z(t) + kcx(t)) + \sigma_3z(t)dB_3(t). \end{cases} \quad (1)$$

[收稿日期] 2020-10-09

[基金项目] 国家自然科学基金项目 (11971405); 福建省自然科学基金项目 (2018J01418); 集美大学国家自然科学基金培育项目 (ZP2020064)

[作者简介] 林紫嫣 (1994—), 女, 硕士生, 从事生物数学方向研究。通信作者: 张树文 (1963—), 男, 教授, 硕导, 从事生物数学方向研究。E-mail: zhangsw\_123@163.com

其中:  $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$  分别代表  $x$ 、 $y$ 、 $z$  在  $t$  时刻的密度; 模型的所有参数都是正的;  $r_1$ 、 $r_2$  分别表示种群  $x$ 、 $y$  的内禀增长率;  $d$  表示种群  $z$  的死亡率;  $a_i (i = 1, 2, 3)$  表示种群的密度制约系数;  $b$  表示种群  $x$  对种群  $y$  的偏惠系数;  $c$  是种群  $z$  对种群  $x$  的捕食率;  $k$  是种群  $z$  对种群  $x$  的转化率;  $\sigma_i^2 (i = 1, 2, 3)$  是白噪声强度。  $B_i(t) (i = 1, 2, 3)$  是定义在完备概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$  上相互独立的标准布朗运动, 其中滤子  $\{F_t\}_{t \geq 0}$  是  $\Omega$  上的一个  $\sigma$ -代数且满足通常条件 (即右连续,  $F_0$  包含所有的零测集)。

在现实生态系统中, 各种形式的环境干扰都是无时、无处不在的, 种群系统除了受白噪声的干扰, 还受到一种数量虽少但强度较大的干扰, 通常将这种随机干扰称为有色噪声, 又称电报噪声<sup>[10]</sup>。有色噪声可以看作是两种或两种以上环境模式的随机转换, 通常情况下, 状态切换在某个系统所待的时间服从指数分布, 且是无记忆的。用具有有限状态空间  $S = \{1, 2, \cdots, m\}$  的有连续 Markov 链  $\gamma(t)$ <sup>[11]</sup> 来描述生态系统中的有色噪声, 因而获得下列具有 Markov 链随机捕食-食饵模型, 即

$$\begin{cases} dx(t) = x(t)(r_1(\gamma(t)) - a_1(\gamma(t))x(t)) - c(\gamma(t))z(t)dt + \sigma_1(\gamma(t))x(t)dB_1(t), \\ dy(t) = y(t)(r_2(\gamma(t)) - a_2(\gamma(t))y(t)) + b(\gamma(t))z(t)dt + \sigma_2(\gamma(t))y(t)dB_2(t), \\ dz(t) = z(t)(-d(\gamma(t)) - a_3(\gamma(t))z(t)) + k(\gamma(t))c(\gamma(t))x(t)dt - \sigma_3(\gamma(t))z(t)dB_3(t). \end{cases} \quad (2)$$

### 1 预备知识

为方便起见, 给出以下记号:  $\hat{g} = \min_{\gamma \in S} \{g(\gamma)\}$ ;  $\check{g} = \max_{\gamma \in S} \{g(\gamma)\}$ 。

令  $\gamma(t)$  的生成元是  $\Gamma = (q_{ij})_{N \times N}$ , 且满足

$$P\{\gamma(t + \delta) = j | \gamma(t) = i\} = \begin{cases} q_{ij}\delta + o(\delta), & j \neq i, \\ 1 + q_{ii}\delta + o(\delta), & j = i. \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\delta > 0$ 。当  $j \neq i$  时,  $q_{ij} > 0$  是状态  $i$  到状态  $j$  转移率且满足  $\sum_{j=1}^N q_{ij} = 0$ 。

假设 Markov 链  $\gamma(t)$  是不可约的, 即系统能在任意状态转到其他状态。可知此链有唯一的平稳分布  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_m)$ , 满足  $\pi\Gamma = 0$ ,  $\sum_{i=1}^m \pi_i = 1$ ,  $\pi_i > 0, \forall i \in S$ 。

假设  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)) (t \geq 0)$  是随机微分方程

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t) \quad (4)$$

的解, 其中:  $f \in L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}^n)$ ;  $g \in L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+, \mathbf{R}^{n \times m})$ ;  $B(t)$  是  $n$  维布朗运动。

**定理 1<sup>[12]</sup>** (存在唯一性定理) 假设  $f(x(t), t)$  和  $g(x(t), t)$  关于  $x(t)$  满足下列条件: 1) 局部 Lipschitz 条件, 存在  $c_k > 0 (k = 1, 2, \cdots)$ , 使得  $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$  且  $|x| \vee |y| \leq k$  有不等式  $|f(x, t) - f(y, t)| \vee |g(x, t) - g(y, t)| \leq c_k |x - y|$  成立; 2) 线性增长条件, 存在  $c > 0$ , 使得  $|f(x, t)| \vee |g(x, t)| \leq c(1 + |x|), \forall (x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$ , 则初始条件为  $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^n$  的系统 (4) 存在唯一连续的局部解  $x(t) (t \in [0, \tau_e))$ ,  $\tau_e$  是爆破时间。

**定理 2<sup>[12]</sup>** (Itô公式) 若  $V(t, x(t)) \in C^{1,2}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R})$ , 则  $V(t, x(t))$  仍然是 Itô 过程, 具有如下随机微分:  $dV(t, x(t)) = V_t(t, x(t))dt + V_x(t, x(t))dx(t) + dx^T(t)V_{xx}(t, x(t))dx(t)/2$ 。

**定理 3<sup>[12]</sup>** (随机微分方程比较定理) 设  $x_i(t) (i = 1, 2)$  分别是随机微分方程  $dx_i(t) = f_i(x_i(t), t)dt + g(x_i(t), t)dB(t)$  的解, 其中,  $f(x, t) \in C([0, +\infty) \times \mathbf{R})$ ,  $g(x, t) \in C([0, +\infty) \times \mathbf{R})$ 。若满足: 1) 存在定义在  $[0, +\infty)$  上满足  $\rho(0) = 0$  及  $\int_{0+}^{+\infty} \rho(s)ds = \infty$  的函数  $\rho(s)$ , 使得  $|g(x, t) - g(y, t)| \leq \rho(|x - y|), x, y \in \mathbf{R}, t \geq 0$ ; 2)  $f_1(x, t) \leq f_2(x, t), x \in \mathbf{R}, t \geq 0$ ; 3)  $x_1(0) \leq x_2(0)$ , 则有  $x_1(t) \leq x_2(t), t \geq 0$ 。

**定义 1<sup>[13]</sup>** 设  $x(t)$  是系统 (2) 的任意解, 则: 1) 若  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , 则称种群  $x(t)$  为灭绝的;

2) 若存在一个正常数  $l$ , 使得种群  $x(t)$  满足  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t x(s) ds \leq l$ , 则称种群  $x(t)$  为弱平均持续生存的; 3) 若存在一个正常数  $l$ , 使得种群  $x(t)$  满足  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t x(s) ds = l$ , 则称种群  $x(t)$  为平均持续生存的。

**引理 1**<sup>[14]</sup> 令  $f \in C[[0, \infty) \times \Omega, (0, \infty)]$ , 1) 如果存在正常数  $\lambda_0, \lambda$ , 使得  $\ln f(t) \geq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t f(s) ds + F(t)$ , 对于任意的  $t \geq 0, F \in C[[0, \infty) \times \Omega, \mathbf{R}]$ , 而且  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)/t = 0$ , 那么  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t f(s) ds \geq \lambda/\lambda_0$ ; 2) 如果存在正常数  $\lambda_0, \lambda$ , 使得  $\ln f(t) \leq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t f(s) ds + F(t)$ , 对于任意的  $t \geq 0, F \in C[[0, \infty) \times \Omega, \mathbf{R}]$ , 而且  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)/t = 0$ , 那么  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t f(s) ds/t \leq \lambda/\lambda_0$ 。

**引理 2**<sup>[15]</sup> 若系统 (2) 满足下列条件: 1) 对于任意的  $j \neq i, i, j \in S$ , 都有  $q_{ij} > 0$ ; 2) 对每一个  $k \in S, D(z, k)$  是对称矩阵, 对所有  $z \in \mathbf{R}^n$  及常数  $\rho \in (0, 1]$ , 满足:  $\rho \|\zeta\|^2 \leq \zeta^T D(z, k) \zeta \leq \rho^{-1} \|\zeta\|^2, \zeta \in \mathbf{R}^n$ ; 3) 存在具有正则边界的非空有界开子集  $U \subset \mathbf{R}^n$ , 满足对任意的  $k \in S$ , 存在一个非负二次可微函数  $V(\cdot, k)$  和正常数  $\varsigma > 0$ , 对所有的  $(z, k) \in D^c \times S$ , 有  $LV(\cdot, k) \leq -\varsigma$ , 则系统 (2) 是遍历的且具有唯一的平稳分布。

## 2 主要结果及其证明

**定理 4** 对任意给定的初值  $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbf{R}_+^3$ , 系统 (2) 存在唯一解  $(x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{R}_+^3$ , 并且以概率 1 存在于  $\mathbf{R}_+^3$  中。

**证明** 令  $u(t) = \ln x(t), v(t) = \ln y(t), w(t) = \ln z(t)$ 。由 Itô 公式可得

$$\begin{cases} du = (r_1(\gamma(t)) - a_1(\gamma(t))e^u - c(\gamma(t))e^w - \sigma_1(\gamma(t))^2/2)dt + \sigma_1(\gamma(t))dB_1, \\ dv = (r_2(\gamma(t)) - a_2(\gamma(t))e^v + b(\gamma(t))e^u - \sigma_2(\gamma(t))^2/2)dt + \sigma_2(\gamma(t))dB_2, \\ dw = (-d(\gamma(t)) - a_3(\gamma(t))e^w + k(\gamma(t))c(\gamma(t))e^u - \sigma_3(\gamma(t))^2/2)dt - \sigma_3(\gamma(t))dB_3. \end{cases} \quad (6)$$

显然, 系统 (6) 满足局部 Lipschitz 条件, 则系统存在唯一的局部解  $(u(t), v(t), w(t)) (t \in [0, \tau_e))$ , 其中  $\tau_e$  是爆破时间。由 Itô 公式可得,  $(x(t), y(t), z(t)) = (e^{u(t)}, e^{v(t)}, e^{w(t)})$  是系统 (2) 满足初值  $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbf{R}_+^3$  的唯一解。为了证明这个解是全局的, 只需证明  $\tau_e = +\infty$ 。

令  $k_0 > 0$  足够大, 使得  $(x(t), y(t), z(t)) \in [1/k_0, k_0] \times [1/k_0, k_0] \times [1/k_0, k_0]$ , 对于任意的正数  $k \geq k_0$ , 定义一个停时序列  $\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e): x(t) \notin (1/k, k) \text{ 或 } y(t) \notin (1/k, k) \text{ 或 } z(t) \notin (1/k, k)\}$ , 定义  $\inf \Phi = +\infty$  ( $\Phi$  代表一个空集)。显然, 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $\tau_k$  是单调递增的, 且  $\tau_k < \tau_e$ , 有  $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} \tau_k$ , 其中  $\tau_\infty \leq \tau_e$ , 只需证明  $\tau_\infty \rightarrow \infty$ 。

假设  $\tau_\infty \neq \infty$ , 则存在常数  $T \geq 0, \epsilon \in (0, 1)$  和一个整数  $k_1 \geq k_0$ , 有  $P\{\tau_k \leq T\} \geq \epsilon, \forall k \geq k_1$ 。

定义一个  $C^2$ -函数  $V(x, y, z) = [x - 1 - \ln x + y - 1 - \ln y + z - 1 - \ln z]$ , 由 Itô 公式可得

$$\begin{aligned} LV &= r_1(k)x - a_1(k)x^2 - c(k)xz + r_2(k)y - a_2(k)y^2 + b(k)xy - d(k)z - a_3(k)z^2 + \\ &\quad k(k)c(k)xz - r_1(k) + a_1(k)x + c(k)z - r_2(k) + a_2(k)y - b(k)x + d(k) + \\ &\quad a_3(k)z - k(k)c(k)x + \sigma_1(k)^2/2 + \sigma_2(k)^2/2 + \sigma_3(k)^2/2 \leq \\ &\quad [-a_1(k)x^2/2 + b(k)xy - a_2(k)y^2/2] + [-a_3(k)z^2/2 + (k(k) - 1)c(k)xz - \\ &\quad a_1(k)x^2/4] - a_1(k)x^2/4 + [r_1(k) + a_1(k) - k(k)c(k) - b(k)]x - a_2(k)y^2/2 + \\ &\quad [r_2(k) + a_2(k)]y - a_3(k)z^2/2 + [c(k) + a_3(k) - d(k)]z + \check{d} + (\check{\sigma}_1^2 + \check{\sigma}_2^2 + \check{\sigma}_3^2)/2. \end{aligned}$$

由于  $[-a_1(k)x^2/2 + b(k)xy - a_2(k)y^2/2], -a_1(k)x^2/4 + [r_1(k) + a_1(k) - k(k)c(k) - b(k)]x - a_2(k)y^2/2 + r_2(k) + a^2(k)]y - a_3(k)z^2/2 + [c(k) + a_3(k) - d(k)]z, [-a_3(k)z^2/2 + (k(k) -$

1)  $c(k)xz - a_1(k)x^2/4]$  存在最大值, 设为  $N$ , 则  $LV \leq N$ , 有  $dV(x,y,z) \leq Ndt + (x-1)\sigma_1(k)dB_1(t) + (y-1)\sigma_2(k)dB_2(t) - (z/k-1)\sigma_3(k)dB_3(t)$ 。将上式两边从 0 到  $\tau_k \wedge T$  积分并取期望:  $E[V(x(\tau_k \wedge T), y(\tau_k \wedge T), z(\tau_k \wedge T))] - V(x(0), y(0), z(0)) \leq NT$ 。

设  $\Omega_k = \{\tau_k \leq T | (k \geq k_1)\}$ ,  $P(\Omega_k) \geq \varepsilon$ , 对于任意的  $\omega \in \Omega_k$ , 都有  $x(\tau_k \wedge T), y(\tau_k \wedge T), z(\tau_k \wedge T)$  至少其中之一等于  $k$  或  $1/k$ , 即  $V(x(0), y(0), z(0)) + NT \geq E[1\Omega_k(\omega) \vee x(\tau_k, \omega), y(\tau_k, \omega), z(\tau_k, \omega)] \geq \varepsilon(k-1 - \ln k) \wedge (1/k - 1 + \ln k)$ , 这里  $1\Omega_k(\omega)$  是  $\Omega_k$  指示函数。令  $k \rightarrow +\infty$ , 有  $+\infty > V(x(0), y(0), z(0)) + NT = +\infty$ , 这与  $V(x(0), y(0), z(0)) + NT$  为有限数矛盾, 因此  $\tau_\infty = \infty$ 。所以系统有唯一的解  $(x(t), y(t), z(t))$ , 并且以概率 1 存在于  $\mathbf{R}_+^3$  中。

**定理 5** 对于随机系统 (2), 令  $m_i = \sum_{k=1} \pi_k[r_i(k) - \sigma_i^2(k)/2] (i=1,2)$ ,  $n = \sum_{k=1} \pi_k[d(k) + \sigma_3^2(k)/2]$ , 则有: 1) 若  $m_1 < 0, m_2 < 0$ , 则种群  $x(t), y(t), z(t)$  均灭绝; 2) 若  $m_1 < 0, m_2 > 0$ , 则种群  $x(t), z(t)$  灭绝, 种群  $y(t)$  平均持续生存; 3) 若  $m_1 > 0, m_2 a_1 + \check{b}m_1 < 0, \check{k}cm_1 - na_1 < 0$ , 则种群  $x(t)$  弱平均持续生存, 种群  $y(t), z(t)$  灭绝; 4) 若  $m_1 > 0, m_2 a_1 + \check{b}m_1 > 0, \check{k}cm_1 - na_1 > 0$ , 则种群  $x(t), y(t), z(t)$  弱平均持续生存。

**证明** 1) 对于系统 (2) 中的  $x(t)$ , 应用 Itô 公式可得

$$d \ln x = [r_1(\gamma(t)) - a_1(\gamma(t))x - c(\gamma(t))z - \sigma_1^2(\gamma(t))/2]dt + \sigma_1(\gamma(t))dB_1(t). \tag{7}$$

将式 (7) 两边从 0 到  $t$  积分可得

$$\begin{aligned} \ln x(t) = \ln x(0) + \int_0^t [r_1(\gamma(s)) - \sigma_1^2(\gamma(s))/2]ds - \int_0^t a_1(\gamma(s))xds - \\ \int_0^t c(\gamma(s))zds + \int_0^t \sigma_1(\gamma(s))dB_1(s). \end{aligned} \tag{8}$$

对式 (8) 两边同时除以  $t$  并取极限得,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln x(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln x(0) + \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t [r_1(\gamma(s)) - \sigma_1^2(\gamma(s))/2]ds + M_1(t)$ , 其中,  $M_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t \sigma_1(\gamma(s))dB_1(s)$ 。由  $\gamma(t)$  的遍历性,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t [r_1(\gamma(s)) - \sigma_1^2(\gamma(s))/2]ds = \sum_{k=1} \pi_k[r_1(k) - \sigma_1^2(k)/2] = m_1 < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , 则  $x(t)$  灭绝。即有

$$\begin{aligned} \ln y(t) = \ln y(0) + \int_0^t [r_2(\gamma(s)) - \sigma_2^2(\gamma(s))/2]ds - \int_0^t a_2(\gamma(s))yds + \\ \int_0^t b(\gamma(s))xds + \int_0^t \sigma_2(\gamma(s))dB_2(s). \end{aligned} \tag{9}$$

对式 (9) 两边同时除以  $t$  并取极限得,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln y(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln y(0) + \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t [r_2(\gamma(s)) - \sigma_2^2(\gamma(s))/2]ds + \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t b(\gamma(s))xds$ , 由  $x(t)$  灭绝, 有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln y(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t [r_2(\gamma(s)) - \sigma_2^2(\gamma(s))/2]ds = \sum_{k=1} \pi_k[r_2(k) - \sigma_2^2(k)/2] = m_2 < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ , 则  $y(t)$  灭绝。即有

$$\begin{aligned} \ln z(t) = \ln z(0) + \int_0^t [-d(\gamma(s)) - \sigma_3^2(\gamma(s))/2]ds - \int_0^t a_3(\gamma(s))zds + \\ \int_0^t k(\gamma(s))c(\gamma(s))xds + \sigma_3(\gamma(s))dB_3(s). \end{aligned} \tag{10}$$

得  $\ln z(t) \leq \ln z(0) + \int_0^t k(\gamma(s))c(\gamma(s))xds + \int_0^t \sigma_3(\gamma(s))dB_3(s)$ 。由  $x(t)$  灭绝, 易得  $z(t)$  灭绝。

2) 由 1) 的证明可知, 当  $m_1 < 0$  时, 种群  $x(t)$  灭绝。则对任意的  $\varepsilon_1 > 0$ , 存在  $k_1 > 0$ , 使得当  $t \geq k_1$  时, 有

$$-\varepsilon_1 \leq x(t) \leq \varepsilon_1, \quad (11)$$

由式 (9) 可知

$$\ln y(t) \leq \ln y(0) + [r_2(\gamma(t)) - \sigma_2^2(\gamma(t))/2]t - a_2(\gamma(t)) \int_0^t y ds + b(\gamma(s))\varepsilon_1 t + \int_0^t \sigma_2(\gamma(s))dB_2(s),$$

$$\ln y(t) \geq \ln y(0) + [r_2(\gamma(t)) - \sigma_2^2(\gamma(t))/2]t - a_2(\gamma(t)) \int_0^t y ds - b(\gamma(s))\varepsilon_1 t + \int_0^t \sigma_2(\gamma(s))dB_2(s).$$

由引理 1 得:  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t y(s)ds \leq m_2/a_2 + b(\gamma(s))\varepsilon_1/a_2$ ,  $\liminf_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t y(s)ds \geq m_2/a_2 - b(\gamma(s))\varepsilon_1/a_2$ .

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t y(s)ds = m_2/a_2$ , 种群  $y(t)$  是平均持续生存的。由式 (10) 易知, 当种群  $x(t)$  灭绝时, 种群  $z(t)$  灭绝。

3) 由式 (8) 有,  $\ln x(t) \leq \ln x(0) + [r_1(\gamma(s)) - \sigma_1^2(\gamma(s))/2]t - a_1 \int_0^t (\gamma(s))x ds + \int_0^t \sigma_1(\gamma(s))dB_1(s)$ 。由引理 1 得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t x(s)ds/t \leq m_1/a_1. \quad (12)$$

又  $m_1 > 0$ , 即种群  $x(t)$  是弱平均持续生存的。将式 (12) 代入式 (9), 有

$$\ln y(t) \leq \ln y(0) + [r_2(\gamma(s)) - \sigma_2^2(\gamma(s))/2]t + b(\gamma(s))m_1 t/a_1 + \int_0^t \sigma_2(\gamma(s))dB_2(s). \quad (13)$$

方程两边同时除以  $t$ , 并取极限得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln y(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} [r_2(\gamma(s)) - \sigma_2^2(\gamma(s))/2 + b(\gamma(s))m_1/a_1]$ 。

由  $\gamma(t)$  的遍历性, 有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t [r_2(\gamma(s)) - \sigma_2^2(\gamma(s))/2 + b(\gamma(s))m_1/a_1]ds = \sum_{k=1} \pi_k [r_2(k) - \sigma_2^2(k)/2 + b(k)m_1/a_1]$ 。由  $m_2 a_1 + \check{b} m_1 < 0$ , 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ , 则  $y(t)$  灭绝。再将式 (12) 代入式 (10), 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln z(t) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} [k(\gamma(s))c(\gamma(s))m_1/a_1 - d(\gamma(s)) - \sigma_2(\gamma(s))/2]. \quad (14)$$

由  $\gamma(t)$  的遍历性, 有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t [k(\gamma(s))c(\gamma(s))m_1/a_1 - d(\gamma(s)) - \sigma_3^2(\gamma(s))/2]ds = \sum_{k=1} \pi_k [k(k)c(k)m_1/a_1 - d(k) - \sigma_3^2(k)/2]$ , 由  $\check{k}c m_1 - na_1 < 0$ , 得  $\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$ , 则  $z(t)$  灭绝。

4) 由 3) 的证明可知, 当  $m_1 > 0$  时, 种群  $x(t)$  是弱平均持续生存的。式 (13) 由引理 1 得,  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t y(s)ds \leq (m_2 + \check{b} m_1/a_1)/a_2$ , 由  $m_2 a_1 + \check{b} m_1 > 0$ , 种群  $y(t)$  是弱平均持续生存的。式 (14) 由引理 1 得,  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \int_0^t z(s)ds \leq (\check{k}c m_1/a_1 - n)/a_3$ , 且  $\check{k}c m_1 - na_1 > 0$ , 那么种群  $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$  是弱平均持续生存。

注 1 当  $m_2 < 0$  时, 由定理 5 的 3) 知, 当  $m_1 > 0$ , 偏利系数  $\check{b} < -m_2 a_1/m_1$  时, 种群  $y(t)$  是灭绝的。由 4) 知, 当  $m_1 > 0$ , 偏利系数  $\check{b} > -m_2 a_1/a_1$  时, 种群  $y(t)$  是弱平均持续生存的, 由此得出偏利系数  $b$  对种群  $y(t)$  的影响。

定理 6 假设条件 (H)  $\lambda = (\check{b} + \check{k}c)/\hat{a}1 \sum_{k \in S} \pi_k (r_1(k) - \sigma_1(k)^2/2) - \sum_{k \in S} \pi_k (\sigma_2(k)^2/2 + d(k) + \sigma_3(k)^2/2 - r_2(k)) > 0$  成立, 对于任意给定的初值  $(x(0), y(0), z(0)) \in \mathbf{R}_+^3$ , 系统 (2) 具有遍历性。

证明 令  $u(t) = \ln x(t)$ ,  $v(t) = \ln y(t)$ ,  $w(t) = \ln z(t)$ 。将系统 (2) 化为系统 (6), 由文献 [17] 的引理 3.2, 知道系统 (2) 与系统 (6) 的遍历性是等价的。接下来证明系统 (6) 满足引理 2 的 3 个条件。假设当  $j \neq i$  时,  $q_{ij} > 0$ , 因此, 引理 2 中的条件 1) 成立。令  $g(z, k) = \text{diag}\{\sigma_1(k),$

$\sigma_2(k), \sigma_3(k)\}$ , 则  $D(z, k) = g(z, k)g^T(z, k) = \text{diag}\{\sigma_2(k), \sigma_2(k), \sigma_2(k)\}$  是正定的, 因此, 引理 2 中的条件 2) 成立。为了证明引理 2 中的条件 3) 成立, 定义一个二维的函数:  $h(u, v, w, k) = (ke^u + e^v + e^w)^{\theta+1}/(\theta+1) - M((\check{b} + \check{k}\check{c})u/\hat{a}_1 + v + w) - u$ , 其中  $\theta \in (0, 1)$  满足  $\hat{a}_1 - 3^\theta\check{b} > 0$ ,  $\hat{a}_2\hat{k} - 3^\theta\check{b} > 0$ ,  $\hat{a}_3\check{k} - 3^\theta\check{b} > 0$ ,  $M\check{a}_2 < (\hat{a}_2\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^\theta/2$ ,  $M((\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3) < (\hat{a}_3\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^\theta/2$ 。  $M$  是正常数且满足

$$-M\lambda + N_1 \leq -2, \tag{15}$$

$$-M\lambda + N_2 \leq -2. \tag{16}$$

其中:  $N_1 = M[(\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3]e^w + C$ ;  $N_2 = M[(\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3]e^w + \check{a}_1e^u + C$ 。易知  $h(u, v, w, k)$  存在最小值点  $h(u_0, v_0, w_0, k)$ 。定义一个二维的  $V$  函数:  $V(u, v, w, k) = (ke^u + e^v + e^w)^{\theta+1}/(\theta+1) - M((\check{b} + \check{k}\check{c})u/\hat{a}_1 + v + w) - u - h(u_0, v_0, w_0, k) + M(\varpi_k + |\varpi|)$ 。令  $V_1 = (ke^u + e^v + e^w)^{\theta+1}/(\theta+1)$ ,  $V_2 = M[-(\check{b} + \check{k}\check{c})u/\hat{a}_1 - v - w]$ ,  $V_3 = -u$ ,  $V_4 = M(\varpi_k + |\varpi|)$ , 其中,  $\varpi = (\varpi_1 \cdots \varpi_m^T)$ ,  $|\varpi| = \sqrt{\varpi_1^2 + \cdots + \varpi_m^2}$ ,  $\varpi_k$  的定义在后面给出。给出  $|\varpi|$  是为了使  $\varpi_k + |\varpi|$  非负。因此, 由上面的分析可知  $V(u, v, w, k)$  非负。运用伊藤公式可得:

$$\begin{aligned} LV_1 &= (ke^u + e^v + e^w)^\theta [k(k)r_1(k)e^u + r_2(k)e^v + b(k)e^{u+v} - k(k)a_1(k)e^{2u} - a_2(k)e^{2v} - \\ &\quad a_3(k)e^{2w} - d(k)e^w] + \theta(ke^u + e^v + e^w)^{\theta-1} (k^2(k)\sigma_1^2(k)e^{2u} + \sigma_2^2(k)e^{2v} + \sigma_3^2(k)e^{2w})/2 \leq \\ &\quad 3^\theta [k(k)r_1(k)e^u + r_2(k)e^v + b(k)e^{u+v}] (k^\theta e^{\theta u} + e^{\theta v} + e^{\theta w}) - k^\theta(k)a_1(k)e^{(\theta+1)u+v} - \\ &\quad a_2(k)k(k)e^{v(\theta+1)+u} - a_3(k)k(k)e^{u+v+\theta w} + \theta k^3(k)\sigma_1^2(k)e^{u(\theta+1)}/2 + \theta\sigma_2^2(k)e^{v(\theta+1)}/2 + \theta\sigma_3^2(k)e^{w(\theta+1)}/2 \leq \\ &\quad 3^\theta [\check{k}^{\theta+1}\hat{r}_1e^{u(\theta+1)} + \check{k}\hat{r}_1e^{u+\theta v} + \check{k}\hat{r}_1e^{u+\theta w} + \hat{r}_2\check{k}\theta e^{u\theta+v} + \hat{r}_2e^{v(\theta+1)} + \hat{r}_2e^{v+\theta w}] + e^{u+v} [- (\hat{a}_1 - 3^\theta\check{b})\hat{k}^\theta e^{\theta u} - \\ &\quad (\hat{a}_2\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{v\theta} - (\hat{a}_3\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{w\theta} + \theta\check{k}^3\check{\sigma}_1^2e^{u(\theta+1)}/2 + \theta\check{\sigma}_2^2e^{v(\theta+1)}/2 + \theta\sigma_3^2(k)e^{w(\theta+1)}/2 \leq \\ &\quad 3^\theta [\check{k}^{\theta+1}\hat{r}_1e^{u(\theta+1)} + \check{k}\hat{r}_1e^{u+\theta v} + \check{k}\hat{r}_1e^{u+\theta w} + \hat{r}_2\check{k}^\theta e^{u\theta+v} + \hat{r}_2e^{v(\theta+1)} + \hat{r}_2e^{v+\theta w}] - (\hat{a}_1 - 3^\theta\check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v} - \\ &\quad (\hat{a}_2\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{(\theta+1)v+u} - (\hat{a}_3\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{w\theta+u+v} + \theta\check{k}^3\check{\sigma}_1^2e^{u(\theta+1)}/2 + \theta\check{\sigma}_2^2e^{v(\theta+1)}/2 + \theta\sigma_3^2(k)e^{w(\theta+1)}/2. \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} LV_2 &= M[-(r_1(k) - \sigma_1(k)^2/2)(\check{b} + \check{k}\check{c})/\hat{a}_1 - r_2(k) + \sigma_2(k)^2/2 + d(k) + \\ &\quad \sigma_3(k)^2/2 + ((\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3)e^w + \check{a}_2e^v], \end{aligned} \tag{18}$$

$$LV_3 \leq \check{a}_1e^u + \check{c}e^w + \check{\sigma}_1^2/2, \tag{19}$$

$$LV_4 = M \sum_{l \neq k} \theta_{kl} (\varpi_l - \varpi_k). \tag{20}$$

为了给出  $\varpi_k$ , 定义向量  $\Lambda = (\Lambda_1 \cdots \Lambda_m)^T$ , 这里  $\Lambda_k = (r_1(k) - \sigma_1(k)^2/2)(\check{b} + \check{k}\check{c})/\hat{a}_1 - (\sigma_2(k)^2/2 + d(k) + \sigma_3(k)^2/2 - r_2(k))$ 。由于生成矩阵  $\Gamma$  是不可约的, 对任意的  $\Lambda_k$ , 存在  $\varpi = (\varpi_1 \cdots \varpi_m^T)$ , 它是泊松系统的一个解, 即  $(\Gamma\varpi)_k - \Lambda_k = \sum_{j=1} (\pi_j\Gamma_j)$ , 因此, 有

$$\begin{aligned} \sum_{l \neq k} \theta_{kl} (\varpi_l - \varpi_k) &= [(r_1(k) - \sigma_1(k)^2/2)(\check{b} + \check{k}\check{c})/\hat{a}_1 - (\sigma_2(k)^2/2 + d(k) + \\ &\quad \sigma_3(k)^2/2 - r_2(k))] = -[(b\check{b} + \check{k}\check{c})/\hat{a}_1 \sum_{k \in S} \pi_k (r_1(k) - \sigma_1(k)^2/2) - \sum_{k \in S} \pi_k (\sigma_2(k)^2/2 + \\ &\quad d(k) + \sigma_3(k)^2/2 - r_2(k))] = -\lambda. \end{aligned} \tag{21}$$

由式 (18)、式 (20) ~ 式 (21) 可得:  $L(V_2 + V_4) = M[-\lambda + ((\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3)e^w + \check{a}_2e^v]$ 。则有

$$\begin{aligned} LV &\leq -M\lambda + M[(\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3]e^w + \check{a}_2e^v - (\hat{a}_1 - 3^\theta\check{b})k^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - \\ &\quad (\hat{a}_2\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 - (\hat{a}_3\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{w\theta+u+v}/2 + \check{a}_1e^u + C, \end{aligned} \tag{22}$$

其中  $C = \sup_{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3} \{- (\hat{a}_1 - 3^\theta\check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - (\hat{a}_2\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 - (\hat{a}_3\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{w\theta+u+v}/2 +$



$$3^\theta [\check{k}^{\theta+1} \hat{r}_1 e^{u(\theta+1)} + \check{k} \hat{r}_1 e^{u+v\theta} + \check{k} \hat{r}_1 e^{u+u\theta} + \hat{r}_2 \check{k} \theta e^{u\theta+v} + \hat{r}_2 e^{v(\theta+1)} + \hat{r}_2 e^{v+u\theta}] + \check{c} e^w + \check{\sigma}_1^2/2 + \theta \check{k}_3 \check{\sigma}_1^2 e^{u(\theta+1)}/2 + \theta \check{\sigma}_2^2 e^{v(\theta+1)}/2 + \theta \sigma_3^2(k) e^{w(\theta+1)}/2 \}.$$

取充分小的数  $\epsilon$ , 满足

$$0 < \epsilon < \lambda \check{a}_1 / (4(\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2 + \check{a}_1 \check{a}_3)), \quad (23)$$

$$0 < \epsilon < \lambda / (4\check{a}_2), \quad (24)$$

$$\check{a}_1 \epsilon \leq 1. \quad (25)$$

其中,  $N_i > 0, i = 1, 2$ 。定义  $D^c = D^1 \cup D^2 \cup D^3 \cup D^4 \cup D^5 \cup D^6$ 。其中:  $D^1 = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3: 0 < w \leq \ln \epsilon\}$ ;  $D^2 = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3: 0 < v \leq \ln \epsilon\}$ ;  $D^3 = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3: 0 < u \leq \ln \epsilon\}$ ;  $D^4 = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3: w > \ln \epsilon^{-1}\}$ ;  $D^5 = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3: v > \ln \epsilon^{-1}\}$ ;  $D^6 = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3: u > \ln \epsilon^{-1}\}$ 。

对于上述  $\epsilon$ , 接下来证明在  $D^c$  上, 有  $LV(u, v, w) \leq -1$  成立。

1) 对于  $(u, v, w) \in D^1 \times S$ , 有

$$\begin{aligned} LV \leq & -M\lambda + M[(\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3]e^w + \check{a}_2 e^v - (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - \\ & (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{w\theta+u+v}/2 + \check{a}_1 e^u + C \leq -M\lambda/4 + [-M\lambda/4 + \\ & M((\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3)\epsilon] + M\check{a}_2 e^v - (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{\theta v}/2 - \\ & (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{w\theta+u+v}/2 - M\lambda/2 + \check{a}_1 e^u + C \leq -M\lambda/4 + [-M\lambda/4 + M(\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3]\epsilon + \\ & [M\check{a}_2 - (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^\theta/2]e^v - (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{w\theta+u+v}/2 + \\ & [-M\lambda/2 + \sup_{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3} \{\check{a}_1 e^u + C\}]. \end{aligned} \quad (26)$$

定义  $M = (2/\lambda) \max\{2, \sup_{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3} \{\check{a}_1 e^u + C\}\}$ , 可知  $(M\lambda)/4 \geq 1$ , 由式 (23) 得,  $LV \leq -M\lambda/4 - (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{w\theta+u+v}/2 \leq -1$ , 因此, 在  $D^1$  上  $LV \leq -1$ 。

2) 对于  $(u, v, w) \in D^2 \times S$ , 有

$$\begin{aligned} -LV \leq & M\lambda/4 + (-M\lambda/4 + M\check{a}_2 \epsilon) + [M((\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3) - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^\theta/2]e^w - \\ & (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - M\lambda/2 - (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 + \check{a}_1 e^u + C \leq -M\lambda/4 + \\ & (-M\lambda/4 + M\check{a}_2 \epsilon) + [M((\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3) - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^\theta/2]e^w - \\ & (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 + [-M\lambda/2 + \sup_{(u,v,w) \in \mathbf{R}^3} \{\check{a}_1 e^u + C\}]. \end{aligned} \quad (27)$$

由式 (24) 得,  $LV \leq -M\lambda/4 - (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 \leq -1$ , 因此, 在  $D^2$  上  $LV \leq -1$ 。

3) 对于  $(u, v, w) \in D^3 \times S$ , 有

$$\begin{aligned} LV \leq & -M\lambda + \check{a}_1 e^u + M[(\check{b}\check{c} + \check{k}\check{c}^2)/\check{a}_1 + \check{a}_3]e^w + \check{a}_2 e^v - (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - \\ & (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{w\theta+u+v}/2 + C \leq -M\lambda + \check{a}_1 \epsilon + N_1. \end{aligned} \quad (28)$$

令  $\epsilon$  足够小, 由式 (15) 和式 (25) 得,  $LV \leq -1$ , 因此, 在  $D^3$  上,  $LV \leq -1$ 。

4) 对于  $(u, v, w) \in D^4 \times S$ , 有

$$\begin{aligned} LV \leq & -M\lambda - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{\theta w}/2 - (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 + N_2 \leq \\ & -M\lambda - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^\theta/(2\epsilon) + N_2. \end{aligned} \quad (29)$$

令  $\epsilon$  足够小, 由式 (16) 得, 在  $D^4$  上,  $LV \leq -1$ 。

5) 对于  $(u, v, w) \in D^5 \times S$ , 有

$$LV \leq -M\lambda - (\hat{a}_2 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{\theta v}/2 - (\hat{a}_1 - 3^\theta \check{b})\hat{k}^\theta e^{(\theta+1)u+v}/2 - (\hat{a}_3 \hat{k} - 3^\theta \check{b})e^{w\theta+u+v}/2 + N_2 \leq$$

$$-M\lambda - (\hat{a}_2\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^\theta/(2\epsilon) + N_2。$$

(30)

令  $\epsilon$  足够小，由式 (16) 得，在  $D^5$  上， $LV \leq -1$ 。

6) 对于  $(u,v,w) \in D^6 \times S$ ，有：

$$LV \leq -M\lambda - (\hat{a}_1 - 3^\theta\check{b})\hat{k}^\theta e^{\theta u}/2 - (\hat{a}_2\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{(\theta+1)v+u}/2 - (\hat{a}_3\hat{k} - 3^\theta\check{b})e^{w\theta+u+v}/2 + N_2 \leq -M\lambda - (\hat{a}_1 - 3^\theta\check{b})\hat{k}^\theta e^\theta/(2\epsilon) + N_2。$$

(31)

令  $\epsilon$  足够小，由式 (16) 得，在  $D^6$  上， $LV \leq -1$ 。

综上所述，在  $D^c$  上，有  $LV(u,v,w) \leq -1$ ，由引理 2，可知系统 (2) 是遍历的且具有唯一的平稳分布。

4 数值模拟结果

为了验证结果的正确性，采用 Milstein 高阶方法<sup>[11]</sup>对随机系统 (2) 进行数值模拟。考虑模型 (2) 的离散化形式为

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + x_k(r_1(k) - a_1(k)x_k - c(k)z_k)\Delta t + \sigma_1(k)x_k\sqrt{\Delta t}\xi_k + \sigma_1^2(k)x_k(\xi_k^2 - 1)\Delta t/2, \\ y_{k+1} = y_k + y_k(r_2(k) - a_2(k)y_k + b(k)x_k)\Delta t + \sigma_2(k)y_k\sqrt{\Delta t}\xi_k + \sigma_2^2(k)y_k(\xi_k^2 - 1)\Delta t/2, \\ z_{k+1} = z_k + z_k(-d(k) - a_3(k)z_k + k(k)c(k)z_k)\Delta t + \sigma_3(k)z_k\sqrt{\Delta t}\xi_k + \sigma_3^2(k)z_k2(\xi_k^2 - 1)\Delta t/2, \end{cases}$$

(32)

其中， $\xi_k(i=1,2,\cdots,n)$ 服从  $N(0,1)$  分布相互独立的高斯随机变量。假设 Markov 链  $\gamma(t)$  在状态空间  $S = \{1,2\}$  的生成元是  $\boldsymbol{\Gamma} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$ 。根据 Markov 链  $\gamma(t)$  的不可约性，得到  $\gamma(t)$  的平稳分布  $\pi = (0.6,0.4)$ 。

假设模型 (2) 中的参数如下： $r_1(1) = r_1(2) = 0.1$ ， $r_2(1) = r_2(2) = 0.15$ ， $d(1) = d(2) = 0.05$ ， $a_1(1) = a_1(2) = 0.1$ ， $a_2(1) = a_2(2) = 0.5$ ， $a_3(1) = a_3(2) = 0.8$ ， $k(1) = k(2) = 0.5$ ， $c(1) = c(2) = 1$ ， $b(1) = b(2) = 0.1$ ，并取模型 (2) 的初始值为  $(0.5,0.4,0.3)$ ，则有：

1) 取  $\sigma_1(1) = 0.5$ ， $\sigma_1(2) = 0.73$ ， $\sigma_2(1) = 0.65$ ， $\sigma_2(2) = 0.6$ ， $\sigma_3(1) = 0.4$ ， $\sigma_3(2) = 0.35$ ，计算可得  $m_1 = -0.081\ 58 < 0$ ， $m_2 = -0.048\ 75 < 0$ ，显然参数的选择满足定理 5 的条件 1)。即种群  $x$ ， $y$ ， $z$  均是灭绝的，见图 1。

2) 取  $\sigma_1(1) = 0.5$ ， $\sigma_1(2) = 0.75$ ， $\sigma_2(1) = 0.25$ ， $\sigma_2(2) = 0.3$ ， $\sigma_3(1) = 0.4$ ， $\sigma_3(2) = 0.35$ ，计算可得  $m_1 = -0.087\ 5 < 0$ ， $m_2 = 0.113\ 25 > 0$ ，显然参数的选择满足定理 5 的条件 2)。即种群  $x(t)$ ， $z(t)$  是灭绝的，种群  $y(t)$  是平均持续生存的，见图 2。

3) 取  $\sigma_1(1) = 0.25$ ， $\sigma_1(2) = 0.3$ ， $\sigma_2(1) = 0.65$ ， $\sigma_2(2) = 0.7$ ， $\sigma_3(1) = 0.8$ ， $\sigma_3(2) = 0.9$ ，计算可得  $m_1 = 0.063\ 25 > 0$ ， $m_2a_1 + \check{b}m_1 = -0.001\ 15 < 0$ ， $\check{k}cm_1 - na_1 = -0.008\ 775 < 0$ ，显然参数的选择满足定理 5 的条件 3)。即种群  $x(t)$  是弱平均持续生存的，种群  $y(t)$ ， $z(t)$  是灭绝的，见图 3。

4) 取  $\sigma_1(1) = 0.25$ ， $\sigma_1(2) = 0.3$ ， $\sigma_2(1) = 0.3$ ， $\sigma_2(2) = 0.25$ ， $\sigma_3(1) = 0.1$ ， $\sigma_3(2) = 0.2$ ，计算可得  $m_1 = 0.063\ 25 > 0$ ， $m_2a_1 + \check{b}m_1 = 0.017\ 375 > 0$ ， $\check{k}cm_1 - na_1 = 0.025\ 525 > 0$ ，显然参数的选择满足定理 5 的条件 4)。即种群  $x(t)$ ， $y(t)$ ， $z(t)$  均是弱平均持续生存的，见图 4。

比较图 1 和图 2 可以发现，当  $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$  基本不变， $\sigma_2$  变小时，种群  $y(t)$  由灭绝趋向平均持续生存；比较图 3 和图 4 可以发现，当  $\sigma_1$  不变， $\sigma_2$ 、 $\sigma_3$  变小时，种群  $y(t)$ 、 $z(t)$  由灭绝变为弱平均持续生存。由此可知，随机扰动对物种生存起着至关重要的作用，过大的噪声干扰会使物种灭绝。



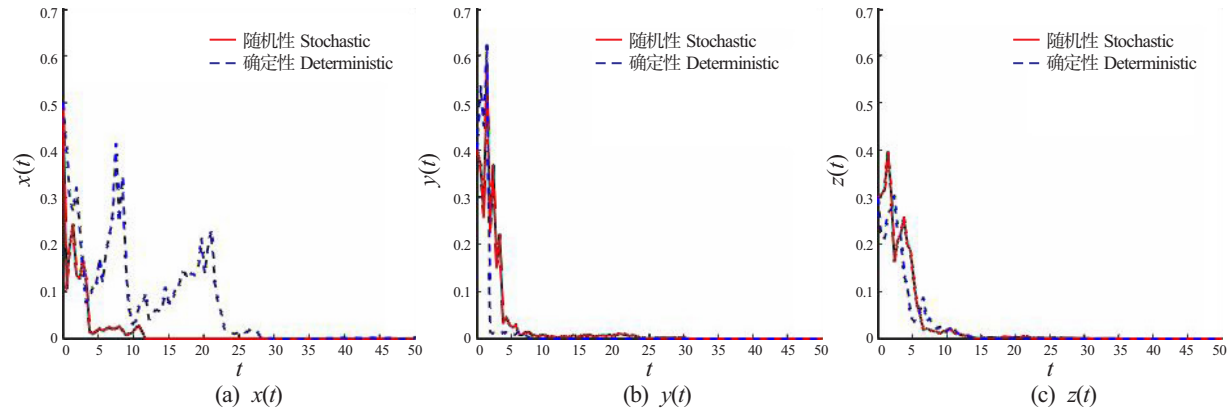


图1 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(0.5,0.4,0.3)下的时间序列图  
( $\sigma_1(1)=0.5, \sigma_1(2)=0.73, \sigma_2(1)=0.65, \sigma_2(2)=0.6, \sigma_3(1)=0.4, \sigma_3(2)=0.35$ )

Fig.1 Time series of system(2) and its corresponding deterministic system with initial value(0.5,0.4,0.3)  
( $\sigma_1(1)=0.5, \sigma_1(2)=0.73, \sigma_2(1)=0.65, \sigma_2(2)=0.6, \sigma_3(1)=0.4, \sigma_3(2)=0.35$ )

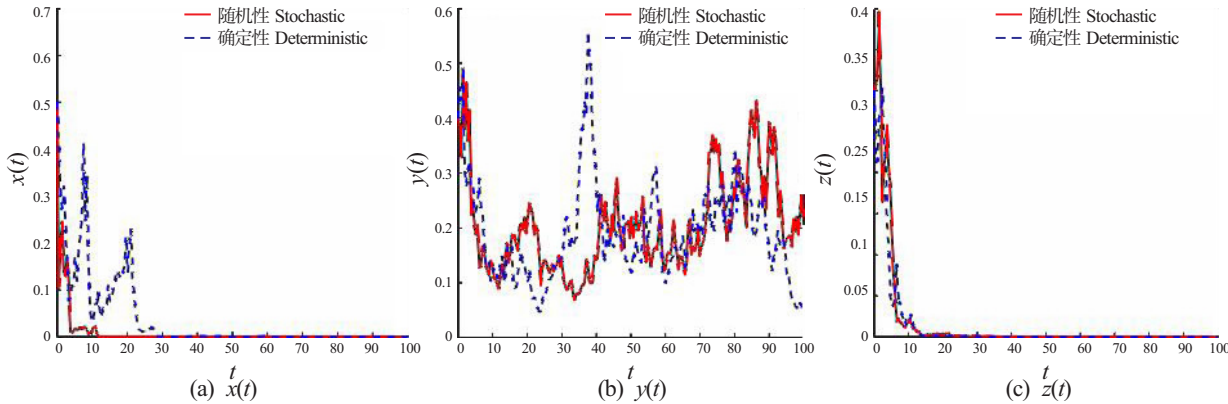


图2 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(0.5,0.4,0.3)下的时间序列图  
( $\sigma_1(1)=0.5, \sigma_1(2)=0.75, \sigma_2(1)=0.25, \sigma_2(2)=0.3, \sigma_3(1)=0.4, \sigma_3(2)=0.35$ )

Fig.2 Time series of system(2) and its corresponding deterministic system with initial value(0.5,0.4,0.3)  
( $\sigma_1(1)=0.5, \sigma_1(2)=0.75, \sigma_2(1)=0.25, \sigma_2(2)=0.3, \sigma_3(1)=0.4, \sigma_3(2)=0.35$ )

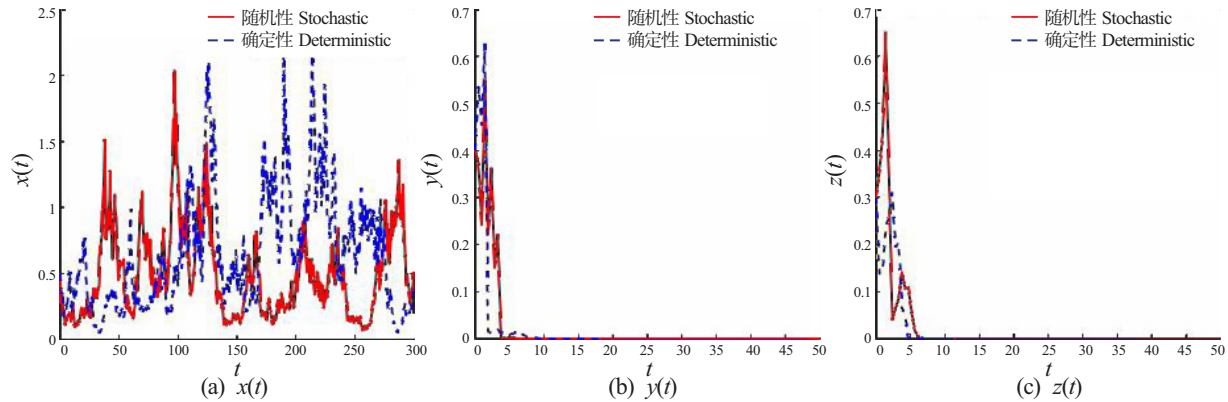


图3 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(0.5,0.4,0.3)下的时间序列图  
( $\sigma_1(1)=0.25, \sigma_1(2)=0.3, \sigma_2(1)=0.65, \sigma_2(2)=0.7, \sigma_3(1)=0.8, \sigma_3(2)=0.9$ )

Fig.3 Time series of system(2) and its corresponding deterministic system with initial value(0.5,0.4,0.3)  
( $\sigma_1(1)=0.25, \sigma_1(2)=0.3, \sigma_2(1)=0.65, \sigma_2(2)=0.7, \sigma_3(1)=0.8, \sigma_3(2)=0.9$ )

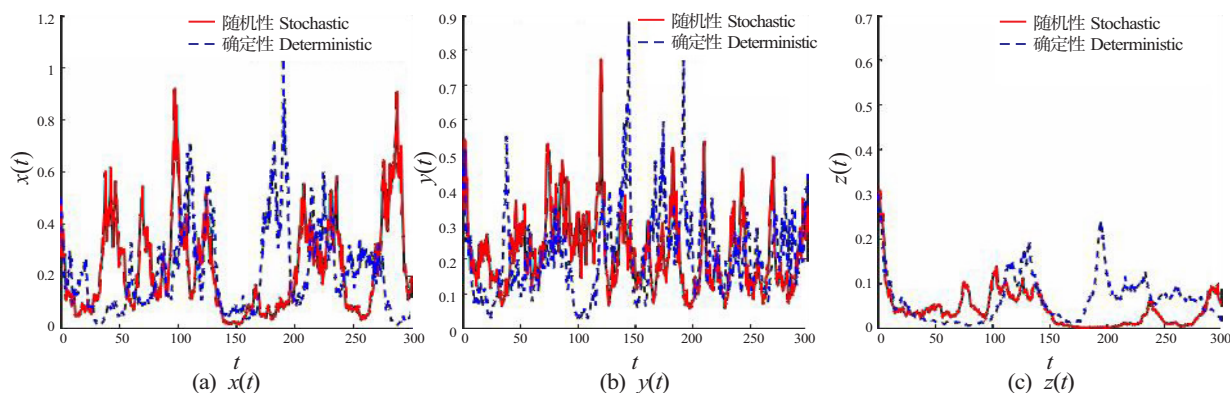


图4 系统(2)及相应的确定性模型在初值为(0.5,0.4,0.3)下的时间序列图

( $\sigma_1(1)=0.25, \sigma_1(2)=0.3, \sigma_2(1)=0.3, \sigma_2(2)=0.25, \sigma_3(1)=0.1, \sigma_3(2)=0.2$ )

Fig.4 Time series of system(2) and its corresponding deterministic system with initial value(0.5,0.4,0.3)

( $\sigma_1(1)=0.25, \sigma_1(2)=0.3, \sigma_2(1)=0.3, \sigma_2(2)=0.25, \sigma_3(1)=0.1, \sigma_3(2)=0.2$ )

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] XU Y, LIU M, YANG Y. Analysis of a stochastic two-predators one-prey system with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes[J]. Journal of Applied Analysis & Computation, 2017, 7(2): 713-727. DOI:10.1016/j.physa.2019.122761.
- [2] LIU M, MANDAL P S. Dynamical behavior of a one-prey two-predator model with random perturbations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 28(1): 123-137. DOI:10.1016/j.cnsns.2015.04.010.
- [3] QIU H, LIU M, WANG K, et al. Dynamics of a stochastic predator-prey system with Bedding-ton-DeAngelis functional response[J]. Applied Mathematics & Computation, 2012, 219(4): 2303-2312. DOI:10.1016/j.amc.2012.08.077.
- [4] 李石英, 张树文. 食饵具有偏利合作关系的捕食-食饵系统的定性分析[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2016, 21(3): 234-240.
- [5] 付盈洁, 魏春金, 张树文. 具有偏利关系的随机三种群模型的动力学分析[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2018, 23(3): 222-231.
- [6] OUYANG M Q, LI X Y. Permanence and asymptotical behavior of stochastic prey-predator system with Markovian switching[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 266: 539-559. DOI:10.1016/j.amc.2015.05.083.
- [7] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [8] LI S, WANG X P. Analysis of a stochastic predator-prey model with disease in the predator and Beddington-DeAngelis functional response[J]. Advances in Difference Equations, 2015(1): 1-24.
- [9] CAI Y L, JIAO J J. Environmental variability in a stochastic epidemic model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 329: 210-226. DOI:10.1016/j.amc.2018.02.009.
- [10] ZU L, JIANG D Q, REGAN D. Conditions for persistence and ergodicity of a stochastic Lotka-Volterra predator-prey model with regime switching[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 29(1): 1-11.
- [11] FRIEDMAN A. Stochastic differential equations and their applications[M]. New York: Academic Press, 1976.
- [12] 卢广西, 张萍. 毒素作用下具有偏利水平和 Allee 效应的偏利种群模型研究[J]. 兰州文理学院学报(自然科学版), 2019, 33(5): 15-17.
- [13] 雷朝俭, 林启法. 具有非单调功能性反应和 Allee 效应的偏利种群模型研究[J]. 宁德师范学院学报(自然科学版), 2019, 31(1): 7-9.
- [14] 李紫君, 李东. 具有脉冲种间偏利关系的 Lotka-Volterra 系统的动力学行为分析[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2017, 34(2): 53-59.
- [15] 祝占法, 栗永安, 徐芳. 具有偏利关系的 Lotka-Volterra 模型[J]. 重庆工学院学报(自然科学版), 2007, 21(10): 59-62.
- [16] 刘金蕾, 赵文才. 一类具有马尔可夫转换和不同功能反应的随机捕食模型的动力学分析[J]. 数学建模及其应用, 2018, 7(3): 12-21.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)