［文章编号］1007－7405(2023)05－0385－12　　DOI:10.19715/j.jmuzr.2023.05.01

具有 Holling IV 功能性反应和非线性收获的随机捕食-食饵模型

叶　葱，魏春金，张树文

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］研究具有 Holling IV 功能性反应和非线性收获的随机捕食-食饵模型的动力学。对于自治系统，证明对于任意给定的初始值，系统都存在唯一的全局正解；应用随机微分方程的比较定理，得到系统的平均持续生存与灭绝的充分条件；证明系统存在唯一的平稳分布且具有遍历性。对于非自治系统，获得系统存在非平凡的正周期解的充分条件。最后，通过数值模拟验证了主要结果。

［关键词］捕食-食饵模型；非线性收获；全局正解的存在唯一性；平稳分布；周期解

［中图分类号］O 175.14

A Stochastic Predator-Prey Model with Holling IV Type Functional Response and Nonlinear Harvest

YE Cong, WEI Chunjin, ZHANG Shuwen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the dynamics of a stochastic predator-prey model with Holling IV type functional response and nonlinear harvest were investigated. For the autonomous systems, it was firstly proved that there was a unique positive global solution starting from the positive initial value. Then, by comparison theorem for stochastic differential equation, sufficient conditions for extinction and persistence in mean were obtained. In addition, it was proved that there was unique stationary distribution which were ergodic. For non-autonomous periodic systems, some sufficient conditions for the existence of non-trivial positive periodic solutions were given. Finally, some numerical simulations were introduced to verify the main results.

Keywords: predator-prey model; nonlinear harvest; existence and uniqueness of global positive solution; stationary distribution; periodic solution

0　引言

长期以来，在种群动力系统中，捕食与食饵模型是许多学者一个重要的研究方向，在此方面也取得了大量丰富的成果[1-5]。文献［6］提出了模型

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=x(t)[a_1-bx(t)-f_1y(t)/(c_1+nx(t)+x^2(t))]\mathrm{d}t,\\ \dot{y}(t)=x(t)[a_2-f_2y(t)/(c_2+x(t))]\mathrm{d}t。\end{cases}\tag{1}$$

［收稿日期］2020－10－22
［基金项目］福建省自然科学基金资助项目（2018J01418）；集美大学国家自然科学基金培育项目（ZP2020064）
［作者简介］叶葱（1997—），女，硕士生，从事生物数学方向研究。通信作者：张树文（1963—），男，教授，硕导，从事生物数学方向研究。E-mail:zhangsw_123@163.com

其中：$x(t)$、$y(t)$ 分别表示食饵和捕食者在 t 时刻的种群密度；$a_1>0$、$a_2>0$ 分别表示食饵和捕食者的内禀增长率；$b>0$ 表示食饵种群的密度制约系数；$f_1y(t)/(c_1+nx(t)+x^2(t))$ 为 Holling IV 功能反应函数；$f_2y(t)/(c_2+x(t))$ 表示具有 Leslies 形式的捕食者数量反应。近年来，学者们开始关注收获对捕食-食饵系统动力学的影响，并完成了大量的工作。在捕食-食饵系统的动力学中，收获函数起到了非常关键的作用。文献［7］提出了常数收获、比例收获、非线性收获 3 种类型的收获功能，其中非线性收获比常数收获和比例收获更具有现实性。然而，在现实世界中，随机干扰是处处存在的，种群在环境中会受到各种随机干扰的影响[8-10]。因此，与确定性模型相比，随机模型更具有真实性。受文献［11］的启发，本文在模型（1）的基础上获得随机模型

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=x(t)[a_1-bx(t)-f_1y(t)/(c_1+nx(t)+x^2(t))-p_1/(1+m_1x(t))]\mathrm{d}t-\\ \qquad\sigma_1x(t)/(1+m_1x(t))\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}y(t)=y(t)[a_2-f_2y(t)/(c_2+x(t))-p_2/(1+m_2y(t))]\mathrm{d}t-\sigma_2y(t)/(1+m_2y(t))\mathrm{d}B_2(t)。\end{cases}\tag{2}$$

其中：$p_1/(1+m_1x(t))$、$p_2/(1+m_2y(t))$ 都是非线性收获率；$p_i(i=1,2)$ 是可捕系数；$m_i(i=1,2)$ 是正常数；$\sigma_i^2(i=1,2)$ 表示白噪声强度；$B_1(t)$、$B_2(t)$ 是相互独立的标准布朗运动。

另一方面，周期现象在实际的生态系统中是普遍存在的，因为种群中的个体受生命周期、季节变化以及昼夜更替等影响，该物种的出生率、死亡率和其他参数都呈现出周期变化[12]。因此，考虑周期因素对相应的动力学系统行为的影响显得尤为重要。所以，相应系统（2）的非自治系统为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=x(t)[a_1(t)-b(t)x(t)-f_1(t)y(t)/(c_1(t)+n(t)x(t)+x^2(t))-\\ \qquad p_1(t)/(1+m_1(t)x(t))]\mathrm{d}t-\sigma_1(t)x(t)/(1+m_1(t)x(t))\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}y(t)=y(t)[a_2(t)-f_2(t)y(t)/(c_2(t)+x(t))-p_2(t)/(1+m_2(t)y(t))]\mathrm{d}t-\\ \qquad\sigma_2(t)y(t)/(1+m_2(t)y(t))]\mathrm{d}B_2(t)。\end{cases}\tag{3}$$

其中：$a_1(t)$、$b(t)$、$f_1(t)$、$c_1(t)$、$n(t)$、$p_1(t)$、$m_1(t)$、$\sigma_1(t)$、$a_2(t)$、$f_2(t)$、$c_2(t)$、$p_2(t)$、$m_2(t)$、$\sigma_2(t)$ 均为正的、有界的、连续的正 w 周期函数。

1 预备知识

令 $(\Omega,F,\{F_t\}_{t\geqslant0},P)$ 是一个带有滤子 $\{F_t\}$ 并且满足通常条件（即 $\{F_t\}_{t\geqslant0}$ 是右连续单调递增，且 F_0 包含所有零测集）的完备概率空间。为方便起见，约定以下记号：1）$\mathbf{R}_+^n=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^n\mid x_i>0,i=1,2,\cdots,n\}$，$|X(t)|=\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$；2）如果 $f(t)$ 是可积的，定义 $\langle f(t)\rangle_T=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t/T$；3）如果 $f(t)$ 是有界的，定义 $\hat{f}=\sup_{t\in\mathbf{R}_+}f(t)$，$\check{f}=\inf_{t\in\mathbf{R}_+}f(t)$；4）对于一个在 $[0,\infty)$ 的函数 $z(t)$，定义 $\langle z(t)\rangle^*=\limsup\limits_{t\to\infty}\int_0^t z(s)\mathrm{d}s/t$，$\langle z(t)\rangle_*=\liminf\limits_{t\to\infty}\int_0^t z(s)\mathrm{d}s/t$。

随机微积分方程

$$\mathrm{d}x(t)=f(x(t),t)\mathrm{d}t+g(x(t),t)\mathrm{d}B(t)\tag{4}$$

的解记作 $x(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))(t\geqslant0)$，其中 $f\in L^1(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R}^n)$，$g\in L^2(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R}^{n\times m})$，$B(t)$ 是 n 维布朗运动。

定理 1[13]（存在唯一性定理） 假设 $f(x(t),t)$ 和 $g(x(t),t)$ 关于 $x(t)$ 满足下列条件：1）局部 Lipschitz 条件，存在 $c_k>0(k=1,2,\cdots)$，使得 $\forall x,y\in\mathbf{R}^n$ 且 $|x|\vee|y|\leqslant k$，有不等式 $|f(x,t)-f(y,t)|\vee|g(x,t)-g(y,t)|\leqslant c_k|x-y|$ 成立；2）线性增长条件，存在 $c>0$，使得 $|f(x,t)|\vee|g(x,t)|\leqslant c|1+|x||$，$\forall(x,t)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+$，则初始条件为 $x(0)=x_0\in\mathbf{R}^n$ 的系统（4）存在唯一连续的局部解 $x(t)(t\in[0,\tau_e))$，τ_e 是爆破时间。

定理 2[13]（Itô 公式） 设 $x(t)(t\geqslant0)$ 是 Itô 过程，其随机微分为 $\mathrm{d}x(t)=f(t)\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}B(t)$，

其中，$f \in L^1(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}^n)$，$g \in L^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}^{n\times m})$。若 $V(x(t),t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+;\mathbf{R})$，则 $V(x(t),t)$ 仍然是 Itô 过程，具有随机微分 $\mathrm{d}V(x(t),t) = V_t(x(t),t)\mathrm{d}t + V_x(x(t),t)\mathrm{d}x(t) + \mathrm{d}x^T(t)V_{xx}(x(t),t)\mathrm{d}x(t)/2$。

定义 1[14]　若 $x(t)$ 是系统（3）的任意解，则：1）若 $\liminf\limits_{t\to+\infty}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s/t > 0$，则称种群 $x(t)$ 为平均持续生存的；2）若 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$，则称种群 $x(t)$ 为灭绝的。

引理 1[14-15]　设 $X(t)$ 是 E_l（l 维欧几里得空间）中的一个 Markov 自治过程，可表示为随机微分方程 $\mathrm{d}X(t) = b(X)\mathrm{d}t + \sum\limits_{s=1}^{k} g_s^i(X)\mathrm{d}B_s(t)$，其扩散矩阵为 $\boldsymbol{A}(X) = a_{ij}(X)$，$a_{ij}(X) = \sum\limits_{s=1}^{k} g_s^i(X)g_s^j(X)$。假设存在正边界 Γ 的有界区域 $U\subset E_l$，具有如下性质：1）在 U 和它的一些邻域，扩散矩阵 $\boldsymbol{A}(X)$ 的最小特征值是非零的；2）当 $X\in E_l \setminus U$ 时，从 X 出发的轨道到达集合 U 的平均时间 τ 是有限的，且对每个紧子集 $K \subset E_l$，有 $\sup\limits_{X\in K} E_X\tau < \infty$。

引理 2[16]　如果假设性质 1 和性质 2 都成立，则 Markov 过程 $X(t)$ 存在平稳分布 $\mu(\cdot)$。令 $f(\cdot)$ 是关于测度 μ 可积的函数，则 $P_x\{\lim\limits_{T\to\infty}\int_0^T f(X(t))\mathrm{d}t/T - \int_{E_l} f(x)\mu(\mathrm{d}x)\} = 1$，$x \in E_l$。

为了验证性质 1 成立，只需证明 L 在 U 中是一致椭圆的，其中 $\mathrm{L}V = b(X)V_X + \mathrm{tr}\,A(X)V_{XX}/2$，即证明对于所有 $X \in U$，$\zeta \in R^k$，存在正数 M，满足 $\sum\limits_{i,j=1}^{k} a_{ij}(X)\zeta_i\zeta_j \geqslant M|\zeta|^2$。

为了验证性质 2 成立，只要证明存在非负的 C^2-函数及邻域 U，使得对于任意的 $X \in E_l \setminus U$，$\mathrm{L}V(X)$ 是负的。

下面考虑方程

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} b(s,X(s))\mathrm{d}s + \sum_{r=1}^{k}\int_{t_0}^{t}\sigma_r(s,X(s))\mathrm{d}B_r(s), X \in R^l。\tag{5}$$

假设方程（5）的系数 $b(s,X(s))$、$\sigma_r(s,X(s))(r = 1,2,\cdots,k)$ 满足条件

$$|b(s,X) - b(s,Y)| + \sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(s,X) - \sigma_r(s,Y)| \leqslant B|X - Y|,\tag{6}$$

$$|b(s,X)| + \sum_{r=1}^{k}|\sigma_r(s,X)| \leqslant B(1 + |X|)。\tag{7}$$

其中：B 是一个常数。

引理 3[17-18]　设方程（5）的系数关于 t 是 w 周期的，且在每个柱形 $I\times U$ 中，条件（6）和条件（7）成立，且假设存在一个 C^2-函数 $V(t,x)$ 关于 t 是 w 周期的，且下列条件在某个紧集外成立：1）$\inf\limits_{|x|>R} V(t,x)\to\infty$，$R\to\infty$；2）$\mathrm{L}V(t,x) \leqslant -1$，则方程（5）存在一个 w 周期解，即该解是一个 w 周期的 Markov 过程。

2　主要结果及其证明

定理 3　对任意给定的初值 $(x(0),y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$，系统（2）在 $t \in [0,\infty)$ 存在唯一正解 $(x(t),y(t))$，并且以概率 1 存在于 $\mathbf{R}_+^2$ 中。

证明　首先考虑方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}u(t) = [a_1 - b\mathrm{e}^u - f_1\mathrm{e}^v/(c_1 + n\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{2u}) - p_1/(1 + m_1\mathrm{e}^u) - \\ \qquad \sigma_1^2/(2(1 + m_1\mathrm{e}^u)^2)]\mathrm{d}t - \sigma_1/(1 + m_1\mathrm{e}^u)\mathrm{d}B_1(t), \\ \mathrm{d}v(t) = [a_2 - f_2\mathrm{e}^v/(c_1 + \mathrm{e}^v) - p_2/(1 + m_2\mathrm{e}^v) - \sigma_2^2/(2(1 + m_2\mathrm{e}^v)^2)]\mathrm{d}t - \\ \qquad \sigma_2/(1 + m_2\mathrm{e}^v)\mathrm{d}B_2(t)。\end{cases}\tag{8}$$

显然，系统（8）满足局部 Lipschitz 条件，则系统存在唯一的局部解 $(u(t),v(t)) \in \mathbf{R}_+^2$，$t \in [0,\tau_e)$，其中 τ_e 是爆破时间。$(x(t),y(t))=(\mathrm{e}^{u(t)},\mathrm{e}^{v(t)})$ 是模型（2）满足初始条件 $(x(0),y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$ 的唯一局部解。为了证明这个解是全局的，只需证明 $\tau_e=+\infty$ 。

令 $k_0>0$ 足够大，使得 $(x(t),y(t)) \in [1/k_0,k_0]\times[1/k_0,k_0]$，对于任意的正数 $k \geqslant k_0$，定义一个停时序列 $\tau_k=\inf\{t \in [0,\tau_e): x(t) \nsubseteq (1/k,k)$ 或 $y(t) \nsubseteq (1/k,k)\}$。

定义 $\inf \boldsymbol{\Phi}=+\infty$（$\boldsymbol{\Phi}$ 代表一个空集）。显然，当 $k\to\infty$ 时，τ_k 是单调递增的，且 $\tau_k<\tau_e$，有 $\tau_\infty=\lim\limits_{k\to+\infty}\tau_k$，其中 $\tau_\infty \leqslant \tau_e$，因此，只需证明 $\tau_\infty \to \infty$ 。

假设 $\tau_\infty \nrightarrow \infty$，则存在常数 $T_1 \geqslant 0$ 、$\epsilon \in (0,1)$ 和一个正整数 $k_1 \geqslant k_0$，使得 $P\{\tau_k \leqslant T_1\} \geqslant \varepsilon$，$\forall k \geqslant k_1$ 。

定义一个 C^2-函数 $V(x,y):\mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}_+$ 为 $V(x,y)=(x-1-\ln x)+(y-1-\ln y)$，其中，$V_1(x,y)=(x-1-\ln x)$，$V_2(x,y)=(y-1-\ln y)$ 。

由 Itô 公式可得，$\mathrm{d}V(x,y)=\mathrm{L}V(x,y)\mathrm{d}t+(x-1)\sigma_1x/(1+m_1x)\mathrm{d}B_1+(y-1)\sigma_2y/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2$，其中，$\mathrm{L}V_1(x,y)=x[a_1-bx-f_1y/(c_1+nx+x^2)-p_1/(1+m_1x)]-[a_1-bx-f_1y/(c_1+nx+x^2)-p_1/(1+m_1x)-\sigma_1^2/(2(1+m_1x)^2)]$，$\mathrm{L}V_2(x,y)=y[a_2-f_2y/(c_2+x)-p_2/(1+m_2y)]-[a_2-f_2y/(c_2+x)-p_2/(1+m_2y)-\sigma_2^2/(2(1+m_2y)^2)]$。所以，$\mathrm{L}V(x,y)=\mathrm{L}V_1(x,y)+\mathrm{L}V_2(x,y) \leqslant -bx^2+(a_1+b)x+(a_2+f_2/c_2+f_1/c_1)y+p_1+\sigma_1^2/2-a_1+p_2+\sigma_2^2/2-a_2 \leqslant N_1+(a_2+f_2/c_2+f_1/c_1)y$，其中 $N_1=\{p_1+\sigma_1^2/2-a_1+p_2+\sigma_2^2/2-a_2+\max\limits_{x\in(0,+\infty)}\{(a_1+b)x-bx^2\}\}$ 。

通过不等式 $y \leqslant 2(y-1-\ln y)+\ln 4 \leqslant 2V(x,y)+\ln 4$，可得 $\mathrm{L}V(x,y) \leqslant N_1+(a_2+f_2/c_2+f_1/c_1)\ln 4+2(a_2+f_2/c_2+f_1/c_1)V(x,y) \leqslant N_2(1+V(x,y))$，其中，$N_2=\max\{N_1+(a_2+f_2/c_2+f_1/c_1)\ln 4,2(a_2+f_2/c_2+f_1/c_1)\}$，所以有

$$\mathrm{d}V(x,y) \leqslant N_2(1+V(x,y))\mathrm{d}t+(x-1)\sigma_1x/(1+m_1x)\mathrm{d}B_1+(y-1)\sigma_2x/(1+m_2x)\mathrm{d}B_2。\tag{9}$$

对式（9）从 0 到 $\tau_k \wedge T_1$ 进行积分可得

$$V(x(\tau_k \wedge T_1),y(\tau_k \wedge T_1)) \leqslant V(x(0),y(0))+\int_0^{\tau_k\wedge T_1}N_2(1+V(x,y)\mathrm{d}t)+$$
$$\int_0^{\tau_k\wedge T_1}(x-1)\sigma_1x/(1+m_1x)\mathrm{d}B_1+\int_0^{\tau_k\wedge T_1}(y-1)\sigma_2x/(1+m_2x)\mathrm{d}B_2,$$

对其两边取期望，得 $\mathrm{E}V[x(\tau_k \wedge T_1),y(\tau_k \wedge T_1)] \leqslant V[x(0),y(0)]+N_2E\int_0^{\tau_k\wedge T_1}(1+V(x(t),y(t))\mathrm{d}t \leqslant V[x(0),y(0)]+N_2E\int_0^{\tau_k\wedge T_1}V(x(t),y(t))+N_2T\mathrm{d}t \leqslant V[x(0),y(0)]+N_2E\int_0^{T_1}V[x(\tau_k \wedge T_1)\mathrm{d}t+N_2T]\mathrm{d}t \leqslant V[x(0),y(0)]+N_2\int_0^{T_1}\mathrm{E}V[x(\tau_k \wedge T_1)\mathrm{d}t+N_2T]\mathrm{d}t$ 。

通过 Gronwall 不等式，得 $\mathrm{E}V[x(\tau_k \wedge T_1),y(\tau_k \wedge T_1)] \leqslant (V[x(0),y(0)]+N_2T)\mathrm{e}^{N_2T}$ 。

后续证明与文献［19］类似，在此省略。

定理 4 设 $x(t)$、$y(t)$ 是系统(2)满足初始条件 $x(0)>0$ 、$y(0)>0$ 的任意解，若系统（2）满足 $a_1>\sigma_1^2/2$、$a_2>p_2+\sigma_2^2/2$、$f_2(a_1-p_1-\sigma_1^2/2)-a_2-p_2-\sigma_2^2/2>0$、$(n-f_1)^2-4(c_1-f_1c_2) \leqslant 0$，则系统（2）是平均持续生存的。

证明 首先考虑方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\varphi(t)=\varphi(t)(a_1-b\varphi(t))\mathrm{d}t-\sigma_1\varphi(t)/(1+m_1\varphi(t))\mathrm{d}B_1(t),\\ \mathrm{d}\psi(t)=\psi(t)(a_2-f_2\psi(t)/(c_2+\psi(t))\mathrm{d}t-\sigma_2y(t)/(1+m_2\psi(t))\mathrm{d}B_2(t)。\end{cases}$$

与文献［11］引理4.2 的证明类似，可得 $\lim\limits_{t\to\infty}(\ln\varphi(t)/t)=0$，$\limsup\limits_{t\to\infty}(\ln\psi(t)/t) \leqslant 0$。

接下来，考虑食饵种群 $x(t)$ 。应用 Itô 公式可得

$$1/x(t) = \exp[-a_1 t + \int_0^t f_1 y/(e_1 + nx + x^2) + p_1/(1 + m_1 x) + \sigma_1^2/(2(1 + m_1 x)^2)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1]/ x(0) + b\exp[-a_1 t + \int_0^t f_1 y/(c_1 + nx + x^2) + p_1/(1 + m_1 x) + \sigma_1^2/(2(1 + m_1 x)^2)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1] \times \int_0^t \exp[-a_1 s + \int_0^t f_1 y/(c_1 + nx + x^2) + p_1/(1 + m_1 x) + \sigma_1^2/(2(1 + m_1 x)^2)\mathrm{d}\tau + \int_0^t \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1]\mathrm{d}s,$$

其中，$I_1 = \exp[-a_1 t + \int_0^t f_1 y/(c_1 + nx + x^2) + p_1/(1 + m_1 x) + \sigma_1^2/(2(1 + m_1 x)^2)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1]/x(0) \leqslant \exp[-(a_1 - f_1/c_1 - p_1 - \sigma_1^2/2)t + 2\sigma_1 \max\limits_{0<s<t} |B_1(s)|]/x(0)$，$I_2 = b\exp[-a_1 t + \int_0^t f_1 y/(c_1 + nx + x^2) + p_1/(1 + m_1 x) + \sigma_1^2/(2(1 + m_1 x)^2)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1] \times \int_0^t \exp[-a_1 s - \int_0^t f_1 y/(c_1 + nx + x^2) + p_1/(1 + m_1 x) + \sigma_1^2/(2(1 + m_1 x)^2)\mathrm{d}\tau - \int_0^t \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1]\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t b\exp[-a_1(t - s) + (f_1/c_1 + p_1 + \sigma_1^2/2)(t - s) + 2\sigma_1 \max\limits_{0<s<t} |B_1(s)|]\mathrm{d}s \leqslant b\exp(2\sigma_1 \max\limits_{0<s<t} |B_1(s)|)/(a_1 - f_1/c_1 - p_1 - \sigma_1^2/2)$。因此，$1/x(t) \leqslant K_1(t)\exp(2\sigma_1 \max\limits_{0<s<t} |B_1(s)|)$，其中，$K_1(t) = \exp[-(a_1 - f_1/c_1 - p_1 - \sigma_1^2/2)t]/x(0) + 2bc_1/(2ac_1 - 2f_1 c_1 - \sigma_1^2 c_1 - 2f_1)$。则 $-\lg x(t) \leqslant \lg K_1(t) + 2\sigma_1 \max\limits_{0<s<t} |B_1(s)|$，所以 $\lg x(t)/t \leqslant -\lg K_1(t)/t - 2\sigma_1 \max\limits_{0<s<t} |B_1(s)|/t$。

当 $t \to \infty$、$\lg K_1(t)/t \to 0$ 时，$\lim\limits_{t\to\infty} \sup \lg x(t)/t \geqslant 0$。

综上所述，由随机微分方程的比较定理可得：$x(t) \leqslant \varphi(t)$，$y(t) \leqslant \psi(t)$，$\lim\limits_{t\to\infty} \ln x(t)/t = 0$，$\lim\limits_{t\to\infty} \ln y(t)/t = 0$。

对方程（2）应用 Itô 公式，则 $\mathrm{d}\ln y = [a_2 - f_2 y/(c_2 + x) - p_2/(1 + m_2 y) - \sigma_2^2/(2(1 + m_2 y)^2)]\mathrm{d}t - \sigma_2/(1 + m_2 y)\mathrm{d}B_2$。对其两边从 0 到 t 进行积分，可得 $\ln y(t) - \ln y(0) \geqslant (a_2 - p_2 - \sigma_2^2/2)t - f_2\int_0^s y(s)/(c_2 + x(s))\mathrm{d}s - M_1(t)$，其中 $M_1(t) = \int_0^t \sigma_2/(1 + m_2 y)\mathrm{d}B_2(s)$。又因为 $M_1(t)$ 是一个局部鞅，它的二次方差是 $\langle M_1(t), M_1(t)\rangle = \int_0^t \sigma_2^2/(1 + m_2 y)^2\mathrm{d}s \leqslant \sigma_2^2 t$。应用强大数定律到局部鞅，可得 $\lim\limits_{t\to\infty}[M_1(t)/t] = 0$。又 $(\ln y(t) - \ln y(0))/t \geqslant (a_2 - p_2 - \sigma_2^2/2) - (1/t)(f_2/c_2)\int_0^t y(s)\mathrm{d}s - M_1(t)/t$，且 $\int_0^t y(s)\mathrm{d}s/t \geqslant c_2(\ln y(t) - \ln y(0))/(f_2 t) + c_2(a_2 - p_2 - \sigma_2^2/2)/f_2 - c_2 M_1(t)/(f_2 t)$。由文献［14］类似可得，$\lim\limits_{t\to\infty}[\int_0^t y(s)/(c_2 + x(s))\mathrm{d}s/t] = (a_2 - p_2 - \sigma_2^2/2)/f_2$。又因为 $\lim\limits_{t\to\infty}[\int_0^t (y(s)/c_2)\mathrm{d}s/t] \geqslant \lim\limits_{t\to\infty}[\int_0^t y(s)/(c_2 + x(s))\mathrm{d}s/t]$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} \inf[\int_0^t y(s)\mathrm{d}s/t] \geqslant c_2(a_2 - p_2 - \sigma_2^2/2)/f_2$。

定义一个 Lyapunov 函数 $\ln x$，通过 Itô 公式得，$\mathrm{d}\ln x = [a_1 - bx - f_1 y/(c_1 + nx + x^2) - p_1/(1 + m_1 x) - \sigma_1^2/(2(1 + m_1 x)^2)]\mathrm{d}t - \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1$。又因为 $f_1 y/(c_1 + nx + x^2) = y/(c_1/f_1 + n/f_1 + x^2/f_1)$。比较 $c_1/f_1 + n/f_1 + x^2/f_1$ 与 $c_2 + x$ 的大小，$c_1/f_1 + n/f_1 + x^2/f_1 - (c_2 + x) = (x^2 + (n - f_1)x + c_1 - f_1 c_2)/f_1$，所以 $\Delta = (n - f_1)^2 - 4(c_1 - f_1 c_2)$。

由于要令 $f_1 y/(c_1 + nx + x^2) \leqslant y/(c_2 + x)$，则 $(c_1 + nx + x^2)/f_1 - (c_2 + x) \geqslant 0$，所以，$\Delta = (n - f_1)^2 - 4(c_1 - d_1 c_2) \leqslant 0$，因此，在 $(n - f_1)^2 - 4(c_1 - f_1 c_2) \leqslant 0$ 条件下，$\mathrm{d}\ln x \geqslant (a_1 - bx - y/(c_2 + x) - p_1 - \sigma_1^2/2)\mathrm{d}t - \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1$。对上述不等式两边同时从 0 到 t 进行积分可得

$$\ln x(t) - \ln x(0) \geqslant (a_1 - p_1 - \sigma_1^2/2)t - \int_0^t bx(s)\mathrm{d}s - \int_0^s y(s)/(c_2 + x(s))\mathrm{d}s - M_2(t)。\quad (10)$$

其中：$M_2(t) = \int_0^t \sigma_1/(1 + m_1 x)\mathrm{d}B_1(s)$，$\lim\limits_{t\to\infty}(M_1(t)/t) = 0$。

通过式（10），对于 $\forall \varepsilon > 0$，存在 $T > 0$，使得对 $\forall t > T$，有 $\lim\limits_{t\to\infty}[\int_0^t y(s)/(c_2+x(s))\mathrm{d}s/t] < (a_2-p_2-\theta_2^2/2)/f_2+\varepsilon$。因此，对 $\forall t > T$，$(\ln x(t)-\ln x(0))/t \geqslant (a_1-p_1-\sigma_1^2/2)-(a_2-p_2-\sigma_2^2/2)/f_2-\varepsilon-\int_0^t bx(s)\mathrm{d}s-M_2(t)/t$，即 $\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s/t \geqslant [a_1-p_1-\sigma_1^2/2-(a_2-p_2-\sigma_2^2/2)/f_2]/b = [f_2(a_1-p_1-\sigma_1^2/2)-a_2-p_2-\sigma_2^2/2]/(f_2 b) > 0$。

所以，当系统（2）满足 $a_1 > \sigma_1^2/2$、$a_2 > p_2+\sigma_2^2/2$、$f_2(a_1-p_1-\sigma_1^2/2)-a_2-p_2-\sigma_2^2/2 > 0$、$(n-f_1)^2-4(c_1-f_1c_2) \leqslant 0$ 时，系统（2）是平均持续生存的。

定理 5　设 $x(t)$、$y(t)$ 是系统（2）满足初始条件 $x(0) > 0$、$y(0) > 0$ 的任意解，i）若 $a_1 < 2\sqrt{bp_1/m_1}-b/m_1$，$a_2 > p_2+\sigma_2^2/2$，则种群 x 是灭绝的，种群 y 是平均持续生存的；ii）若 $a_1 < 2\sqrt{bp_1/m_1}-b/m_1$，$a_2 < 2\sqrt{f_2p_2/(c_2m_2)}-f_2/(c_2m_2)$，则种群 x 和种群 y 均灭绝。

证明　i）定义 Lyapunov 函数 $\ln x$，由 Itô 公式得，$\ln x(t)-\ln x(0) = \int_0^t[a_1-bx-f_1y/(c_1+nx+x^2)-p_1/(1+m_1x)-\sigma_1^2/(2(1+m_1x)^2)]\mathrm{d}s-\int_0^t\sigma_1/(1+m_1x)\mathrm{d}B_1 \leqslant \int_0^t[a_1-b(1+c_1x-1)/c_1-p_1/(1+m_1x)]\mathrm{d}s-\int_0^t\sigma_1/(1+m_1x)\mathrm{d}B_1 = \int_0^t[a_1-b(1+m_1x)/m_1-p_1/(1+m_1x)+b/m_1]\mathrm{d}s-\int_0^t\sigma_1/(1+m_1x)\mathrm{d}B_1$。对上述不等式两边从 0 到 t 进行积分，并同时除以 t，得 $\lim\limits_{t\to\infty}\ln x(t)/t \leqslant a_1-2\sqrt{bp_1/m_1}+b/m_1 < 0$，即 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t) = 0$。因此，对于任意小的 $\varepsilon > 0$，存在 t_0 和一个集合 Ω_ε，使得对 $t > t_0$ 和 $\omega \in \Omega_\varepsilon$，都有 $P(\Omega_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$ 和 $x(t)/(c_2+x(t)) \leqslant \varepsilon$ 成立。由等式 $\mathrm{d}y = y[a_2-f_2y/(c_2+x)-p_2/(1+m_2y)]\mathrm{d}t-\sigma_2y/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t) = y[a_2-f_2y/c_2+f_2yx/((c_2+x)c_2)-p_2/(1+m_2y)]\mathrm{d}t-\sigma_2/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t)$，可得 $y[a_2-f_2y/(c_2+x)-p_2/(1+m_2y)]\mathrm{d}t-\sigma_2y/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t) \leqslant \mathrm{d}y \leqslant y[a_2-f_2y/c_2+\varepsilon f_2y/c_2-p_2/(1+m_2y)]\mathrm{d}t-\sigma_2y/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t)$。

对任意的 $\varepsilon > 0$，有

$$\mathrm{d}y = y[a_2-f_2y/(c_2+x)-p_2/(1+m_2y)]\mathrm{d}t-\sigma_2y/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t)。\tag{11}$$

根据定理4，容易看出 $\lim\limits_{t\to\infty}\ln y(t)/t \geqslant c_2(a_2-p_2-\sigma_2^2/2)/f_2 > 0$，所以，当 $a_1 < 2\sqrt{bp_1/m_1}-b/m_1$、$a_2 > p_2+\sigma_2^2/2$ 时，种群 x 是灭绝的，种群 y 是平均持续生存的。

ii）对方程（11）应用 Itô 公式得，$\mathrm{d}\ln y = [a_2-f_2y/c_2-p_2/(1+m_2y)-\sigma_2^2/(2(1+m_2x)^2)]\mathrm{d}t-\sigma_2y/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t)$。又 $\ln y(t)-\ln y(0) = \int_0^t[a_2-f_2y/c_2-p_2/(1+m_2y)-\sigma_2^2/(2(1+m_2y)^2)]\mathrm{d}t-\int_0^t\sigma_2/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t) \leqslant \int_0^t[a_2-f_2(1+m_2y-1)/(c_2m_2)-p_2/(1+m_2y)]\mathrm{d}t-\int_0^t\sigma_2/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t) = \int_0^t[a_2-f_2(1+m_2y)/(c_2m_2)-p_2/(1+m_2y)+f_2/(c_2m_2)]\mathrm{d}t-\int_0^t\sigma_2/(1+m_2y)\mathrm{d}B_2(t)$。对其两边从 0 到 t 进行积分再除以 t 得 $\lim\limits_{t\to\infty}\ln y(t)/t \leqslant a_2-2\sqrt{f_2p_2/(c_2m_2)}+f_2/(c_2m_2) < 0$。所以，当 $a_1 < 2\sqrt{bp_1/m_1}-b/m_1$、$a_2 < 2\sqrt{f_2p_2/(c_2m_2)}-f_2/(c_2m_2)$ 时，种群 x 和种群 y 均灭绝。

定理 6　设系统（2）满足 $a_1-\sigma_1^2-p_1 > 0$、$a_2-\sigma_2^2-p_2 > 0$，则对于任意的初始值 $(x(0),y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$，系统（2）存在唯一的平稳分布 $\mu(\cdot)$，而且是遍历的。

证明　由定理 3 得，对于任意初始值 $(x(0),y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$，存在一个唯一解 $(x(t),y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$。定义一个 C^2-函数 $g:\mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$ 为 $g(x,y) = -G(\log x+\log y-y)+(x^2+y^2)/2$，其中，$G = (2/\xi_0)\max\{2,\sup\limits_{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2}[(a_1+\sigma_1^2/2)x^2-bx^3-(f_2-a_2-\sigma_2^2/2)y_2/2]\}$。显然，$g(x,y)$ 有唯一平稳点 (x^*,y^*)，

由 $g(x,y)$ 的单调性，(x^*,y^*) 是 $g(x,y)$ 的最小点。

假设条件 $\xi_0 \triangleq (a_1 - \sigma_1^2/2 - p_1 + a_2 - \sigma_2^2/2 - p_2 - \hat{z} - \hat{s}\check{u}) > 0$ 和 $f_2 - (a_2 + \sigma_2^2/2) > 0$ 成立，其中，$z(x,y) = f_2 y/(c_2 + x) - f_2 y^2/(c_2 + x) - p_2 y/(1 + m_2 y)$，$s(x,y) = f_1 y/(c_1 + nx + x^2) - f_1 y^2/(G(c_1 + nx + x^2))$，$u(x,y) = (f_2 y^3 + c_2 f_2 y^2)/(c_2 + x) + bx^2 y + f_1 xy/(c_1 + nx + x^2) - Gbx - Ga_2 y + bx^3/2 = [(f_2 y^3 - c_2 f_2 y^2 - Ga_2 c_2 y) + y(bx^3 + bc_2 x^2 - Ga_2 x)]/(c_2 + x) + f_1 xy/(c_1 + nx + x^2) - Gbx + bx_3/2$。

构建一个 Lyapunov 函数 $V:\mathbf{R}_+^2 \to \mathbf{R}$，定义为 $V(x,y) = -G(\lg x + \lg y - y) + (x^2 + y^2)/2 - g(x^*,y^*)$，其中 $V_1(x,y) = -G(\lg x + \lg y - y)$，$V_2(x,y) = (x^2 + y^2)/2$。

由 Itô 公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{LV}_1 = & -G[a_1 - bx - f_1 y/(c_1 + nx + x^2) - p_1/(1 + m_1 x) - \sigma_1^2/(2(1 + m_1 x)^2)] - G[a_2 - f_2 y/\\ & (c_2 + x) - p_2/(1 + m_2 y) - \sigma_2^2/(2(1 + m_2 y)^2)] + Gy[a_2 - f_2 y/(c_2 + x) - p_2/(1 + m_2 y)] \leqslant \\ & -G(a_2 - \sigma_1^2/2 - p_1 + a_2 - \sigma_2^2/2 - p_2 - \hat{z}) + Gbx + Gf_1 y/(c_1 + nx + x^2) + Gya_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LV}_2 = & (x + y)\{[x(a_1 - bx - f_1 y/(c_1 + nx + x^2) - p_1/(1 + m_2 x)] + y[a_2 - f_2 y/(c_2 + x) - \\ & p_2/(1 + m_2 y)]\} + \sigma_1^2 x^2/(2(1 + m_2 x)^2) + \sigma_2^2 y^2/(2(1 + m_2 y)^2) = a_1 x^2 - bx^3 - a_2 xy - \\ & f_2 xy^2/(c_2 + x) - bx^2 y + a_2 y^2 - f_2 y^3/(a_2 + x) - f_1 xy/(c_1 + nx + x^2) - f_1 y^2 (c_1 + nx + x^2) - \\ & p_1 x^2/(1 + m_2 x) - p_1 xy/(1 + m_1 x) - p_2 xy/(1 + m_2 y) - p_2 y^2/(1 + m_2 y) + \sigma_1^2/(2(1 + m_2 x)^2) + \\ & \sigma_2^2(2(1 + m_2 y)^2)。\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{LV} = \mathrm{LV}_1 + \mathrm{LV}_2 \leqslant -G(a_1 - \sigma_1^2/2 - p_1 + a_2 - \sigma_2^2/2 - p_2 - \hat{z}) + (a_1 + a_2)xy + (a_1 + \sigma_1^2/2)x^2 - bx^3/2 - f_2 xy^2/(c_2 + x) + (a_2 + \sigma_1^2/2)y^2 - f_2 y^3/(c_2 + x) + Gf_1 y/(c_1 + nx + x^2) - f_1 y^2/(c_1 + nx + x^2) - bx^2 y - f_{x1} y/(c_1 + nx + x^2) + Gbx + Ga_2 y - bx^3/2 \leqslant -G(a_1 - \sigma_1^2/2 - p_1 + a_2 - \sigma_2^2/2 - p_2 - \hat{z} - \hat{s} + \check{u}) + (a_1 + a_2)xy + (a_1 + \sigma_1^2/2)x^2 - bx^3/2 - [f_2 - (a_2 + \sigma_2^2/2)]y^2 \leqslant -G\xi_0 + (a_1 + a_2)xy + (a_1 + \sigma_1^2/2)x^2 - bx^3/2 - [f_2 - (a_2 + \sigma_2^2/2)]y^2$。

选择一个充分小的 ϵ_1、ϵ_2，使得

$$0 < \epsilon_1 < (a_1 + a_2)^{-1}\min\{f_2 - a_2 - \sigma_2^2/2)/2, G\xi_0/4\}, \tag{12}$$

$$0 < \epsilon_2 < (a_1 + a_2)^{-1}\min\{b/4, G\xi_0/4\}, \tag{13}$$

$$\min\{b/(4\varepsilon_1^3)\} \geqslant \hat{P}_1 - G\xi_0 + 1, \tag{14}$$

$$\min\{(f_2 - (a_2 + \sigma_2^2/2))/(2\epsilon_2)\} \geqslant \hat{P}_2 - G\xi_0 + 1。 \tag{15}$$

为证明引理 1 的性质 2 成立，考虑有界开集 $D_{\epsilon1,2} = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid \epsilon_1 < x < 1/\epsilon_1, \epsilon_2 < y < 1/\epsilon_2\}$。定义：$D_{\epsilon1,2}^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 < x < \epsilon_1\}$；$D_{\epsilon1,2}^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 < y < \epsilon_1\}$；$D_{\epsilon1,2}^3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid x \geqslant 1/\epsilon_1\}$；$D_{\epsilon1,2}^4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid \epsilon_1 \leqslant x \leqslant 1/\epsilon_1, y \geqslant 1/\epsilon_2\}$。显然，$D_{\epsilon_{1,2}}^C = D_{\epsilon_{1,2}}^1 \cup D_{\epsilon_{1,2}}^2 \cup D_{\epsilon_{1,2}}^3 \cup D_{\epsilon_{1,2}}^4$。

下面证明，对于任意的 $(x,y) \in D_{\epsilon_{1,2}}^C$，都有 $\mathrm{LV} \leqslant -1$ 成立。

当 $(x,y) \in D_{\epsilon_{1,2}}^1$，且 $xy \leqslant \epsilon_1 y \leqslant \epsilon_1(1 + y^2)$，再根据不等式（12）和 $G \geqslant 4/\xi_0$，得到

$$\begin{aligned}\mathrm{LV} \leqslant & -G\xi_0 + (a_1 + a_2)\epsilon_1 + (a_1 + \sigma_1^2/2)x^2 - bx^3/2 - (f_2 - (a_2 + \sigma_2^2/2)) - (a_1 + a_2) \leqslant \\ & -G\xi_0/4 + (-G\xi_0/4 + (a_1 + a_2)\epsilon_1) + \{-[f_2 - (a_2 + \sigma_2^2/2) + (a_1 + a_2)\epsilon_1]y^2/2\} + \\ & [-G\xi_0/2 + (a_1 + \sigma_1^2/2)x^2 - bx^3/4 - (f_2 - a_2 - \sigma_2^2/2)y^2/2] \leqslant -G\xi_0/4 \leqslant -1。\end{aligned}$$

当 $(x,y) \in D_{\epsilon1,2}^2$，且 $xy \leqslant \epsilon_1 x \leqslant \epsilon_1(1 + x^3)$，再根据不等式（12），可得

$$\begin{aligned}\mathrm{LV} \leqslant & -G\xi_0 + (a_1 + a_2)\epsilon_2 + (a_1 + \sigma_1^2/2)x^2 - (b/2 - (a_1 + a_2)\epsilon_2)x^3 - [f_2 - (a_2 + \sigma_2^2/2)]y^2 \leqslant \\ & -G\xi_0/4 + (-G\xi_0/4 + (a_1 + a_2)\epsilon_2) - (f_2 - a_2 - \sigma_2^2/2)y^2/2 + (-b/4 + (a_1 + a_2)\epsilon_2)x^3 + \\ & [-G\xi_0/2 + (a_1 + \sigma_1^2/2)x^2 - bx^3/4 - (f_2 - a_2 - \sigma_2^2/2)y^2/2] \leqslant -G\xi_0/4 \leqslant -1。\end{aligned}$$

当 $(x,y) \in D_{\epsilon_{1,2}}^3$，通过 Young 不等式，对 $\forall x,y > 0$，有 $xy \leqslant 2x^{5/2}/5 + 3y^{5/3}/5$，再根据不等式

（14），可得

$$\mathrm{LV}\leqslant -G\xi_0-bx^3/4+(a_1+a_2)(2x^{5/2}/5+3y^{5/3}/5)+(a_1+\sigma_1^2/2)x^2-bx^3/4-(f_2-a_2-\sigma_2^2/2)y^2\leqslant -G\xi_0-bx^3/4+\hat{P}_1。$$

其中：$P_1(x,y)=(a_1+a_2)(2x^{5/2}/5+3y^{5/3}/5)+(a_1+\sigma_1^2/2)x^2-bx^3/4-(f_2-a_2-\sigma_2^2/2)y^2$ 。因此 $\mathrm{LV}\leqslant -G\xi_0/4\leqslant -1$ 。

当 $(x,y)\in D^4_{\epsilon_{1,2}}$ ，与 $(x,y)\in D^3_{\epsilon_{1,2}}$ 相似，再根据不等式（15），可得 $\mathrm{LV}\leqslant -G\xi_0-(f_2-a_2-\sigma_2^2/2)/(2\epsilon^2)+\hat{P}_2$ ，其中，$P_2(x,y)=(a_1+a_2)(2x^{5/2}/5+3y^{5/3}/5)+(a_1+\sigma_1^2/2)x^2-bx^3/2-(f_2-a_2-\sigma_2^2/2)y^2$ 。因此 $\mathrm{LV}\leqslant -G\xi_0/4\leqslant -1$。

综上所述，对 $\forall(x,y)\in D^C_{\epsilon_{1,2}}$ ，都有 $\mathrm{LV}\leqslant -1$ 成立。因此，引理 1 的条件性质 2 成立。

另外，存在一个常数 $M=\min\limits_{(x,y)\in\bar{D}}\{\sigma_1^2x^2/(1+m_1x)^2,\sigma_2^2y^2/(1+m_2y^2)\}>0$ ，使得对 $\forall(x,y)\in\bar{D}$，$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathbf{R}^2_+$ ，有 $\sum\limits_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x,y)\zeta_i\zeta_j=\sigma_1^2x^2\zeta_1^2/(1+m_1x)^2+\sigma_2^2y^2\zeta_2^2/(1+m_2y)^2\geqslant M\|\zeta\|^2$ ，因此引理 1 的条件性质 1 也满足，所以系统（2）存在平稳分布，且具有遍历性。

定理 7 若满足以下条件：1） $\xi_1\triangleq\int_0^\theta(a_1(s)-\sigma_1^2(s)/2-p_1(s)+a_2(s)-\sigma_2^2(s)/2-p_2(s)-\hat{z}-\hat{s}+\check{u})\mathrm{d}s/\theta>0$；2） $\xi_2\triangleq\int_0^\theta(f_2(s)-a_2(s)-\sigma_1^2(s)/2)\mathrm{d}s/\theta>0$ ，则对于任意的初始值 $(x(0),y(0))\in\mathbf{R}^2_+$ ，系统（3）存在正的 ω 周期解。

证明 构造一个 C^2-函数 $V(t,x,y):\mathbf{R}^2_+\to\mathbf{R}$ ，定义为 $V(t,x,y)=-G_1(\lg x+\lg y-y+\omega_1(t))+\mathrm{e}^{\omega_2(t)(x+y)^2/2}\triangleq V_1(t,x,y)+V_2(t,x,y)$ ，其中，$G_1>0$ 是待定系数，$\omega_1'(t)=-\xi_1+[a_1(t)-\sigma_1^2(t)/2-p_1(t)+a_2(t)-\sigma_2^2(t)/2-p_2(t)-\hat{z}-\hat{s}+\tilde{u}]$，$\omega_2'(t)=-2\xi_2+2f_2(t)-2a_2(t)-\sigma_2^2(t)$ 。容易看出，$\omega_1(t)$、$\omega_2(t)$ 都是 ω 周期函数，且 $\omega_2'(t)$ 是有界函数。因此存在 $Z>0$ ，使得 $|\omega_2'(t)|\leqslant Z$，$\forall t\geqslant 0$ 。

假设 $D_k=(1/k,k)\times(1/k,k)$ ，则当 $k\to\infty$ 时，$\inf\limits_{(t,x,y)\in[0,+\infty)\times\mathbf{R}^2_+\setminus D_k}V(t,x,y)\to\infty$ ，这就验证了引理 2 的条件 1 成立。下面只需验证引理 2 的条件 2。

应用 Itô 公式可得

$$\begin{aligned}\mathrm{LV}_1(t,x,y)\leqslant&-G_1[a_1(t)-b(t)x-f_1(t)y/(c_1(t)+n(t)x+x^2)-p_1(t)/(1+m_1(t)x)-\\&\sigma_1^2(t)/2]-G_1[a_2(t)-f_2(t)y/(c_2(t)+x)-p_2(t)/(1+m_2(t)x)-\sigma_2^2(t)/2]+\\&G_1y[a_2(t)-f_2(t)y/(c_2(t)+x)-p_2(t)/(1+m_2(t)y)]+G_1\omega_1'(t)\leqslant -G_1[a_1(t)-\\&\sigma_1^2(t)/2-c_1(t)+a_2(t)-\sigma_2^2(t)/2-c_2(t)-\hat{z}]+G_1b(t)x+G_1f_1(t)y/(c_1(t)+\\&n(t)x+x^2)+G_1ya_2(t)+G_1\omega_1'(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LV}_2(t,x,y)=&\,\mathrm{e}^{\omega_2(t)}\omega_2'(t)(x+y)^2/2+\mathrm{e}^{\omega_2(t)}(x+y)[x(a_1(t)-b(t)x-f_1(t)y/(c_1(t)+\\&n(t)x+x^2))][(p_1(t)/(1+m_1(t)x))+y(a_2(t)-f_2(t)y/(c_2(t)+x)-\\&p_2(t)/(1+m_2(t)y))]+\sigma_1^2(t)x^2/(2(1+m_1(t)x)^2)+\sigma_2^2(t)y^2/(2(1+\\&m_2(t)y)^2),\text{则}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{LV}(t,x,y)=&\,LV_1(t,x,y)+LV_2(t,x,y)\leqslant -G_1[a_1(t)-\sigma_1^2(t)/2-p_1(t)+a_2(t)-\sigma_2^2(t)/2-\\&p_2(t)-\hat{z}]+G_1b(t)x+G_1f_1(t)y/(c_1(t)+n(t)x+x^2)+G_1ya_2(t)+G_1\omega_1'(t)+\\&\mathrm{e}^{\omega_2(t)}[\omega_2'(t)+(a_1(t)+a_2(t))]xy+[a_1(t)+\sigma_1^2(t)/2+\omega_2'(t)/2]x^2-b(t)x^3/2+\\&[-f_2(t)+a_2(t)+\sigma_1^2(t)/2+\omega_2'(t)/2]y^2-f_2(t)y^3/(c_2(t)+x)-f_1(t)y^2/(c_1(t)+\\&n(t)x+x^2)-b(t)x^2y-f_1(t)xy/(c_1(t)+n(t)x+x^2)-b(t)x^3/2\leqslant \mathrm{e}^{\hat{\omega}_2}[(a_1(t)+\\&a_2(t)+z)xy+(a_1(t)+\sigma_1^2(t)/2+z/2)x^2]-\mathrm{e}^{\hat{\omega}2}(b(t)x^3/2+\xi_2y^2)-G_1[a_1(t)-\end{aligned}$$

$\sigma_1^2(t)/2 - p_1(t) + a_2(t) - \sigma_2^2(t)/2 - p_2(t) - \hat{z} - \hat{s} + \hat{u}] + G_1[-\omega_1(t) + (a_1(t) - \sigma_1^2(t)/2 - p_2(t) + a_2(t) - \sigma_2^2(t)/2 - p_2(t) - \hat{z} - \hat{s} + \hat{u})) \leqslant -G_1\xi_1 + e^{\hat{\omega}_2}(a_1(t) + a_2(t) + Z)xy + e^{\hat{\omega}_2}(a_1(t) + \sigma_1^2(t)/2 + z/2)x^2 - e^{\hat{\omega}_2}(b(t)x^3/2 + \xi_2 y^2)$。

令 $\eta_1 = e^{\hat{\omega}_2}(a_1(t) + a_2(t) + K)$，$\eta_2 = e^{\hat{\omega}_2}(a_1(t) + \sigma_1^2(t)/2 + K/2)$。所以，$LV(t,x,y) \leqslant -G_1\omega_1(t) + \eta_1 xy + \eta_2 x^2 - e^{\hat{\omega}_2}(b(t)x^3/2 + \xi_2 y^2)$，其中，$G_1 = \max\limits_{(x,y)\in\mathbf{R}_+^2} 2\{\eta_2 x^2 - e^{\hat{\omega}_2}b(t)x^3 - e^{\hat{\omega}_2}\xi_2 y^2, 2\}/\xi_1$。

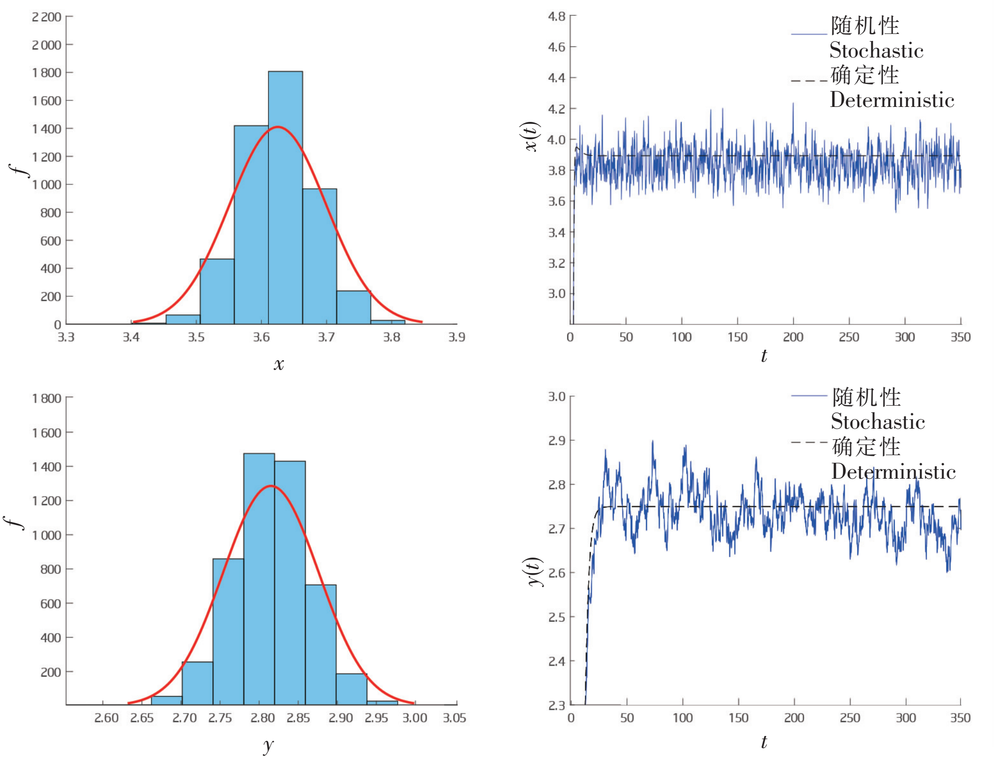
选择足够小的 ε_1、ε_2，使得 $0 < \varepsilon_1 \leqslant \eta_1^{-1}\min\{e^{\hat{\omega}_2}/2, G_1\xi_1/4\}$、$0 < \varepsilon_1 \leqslant \eta_1^{-1}\min\{e^{\hat{\omega}_2}/4, G_1\xi_1/4\}$、$e^{\hat{\omega}_2}\min\{b/(4\xi_1^3)\} \geqslant \hat{P}_3 - G_1\xi_1 + 1$、$e^{\hat{\omega}_2}\min\{\xi_2/(4\xi_2)\} \geqslant \hat{P}_4 - G_1\xi_1 + 1$，其中，$P_3(x,y) = \eta_1(2x^{5/2}/5 + 3y^{5/3}/5) + \eta_2 x^2 - e^{\hat{\omega}_2}bx^3/4 - e^{\hat{\omega}_2}\xi_2 y^2$，$P_4(x,y) = \eta_1(2x^{5/2}/5 + 3y^{5/3}/5) + \eta_2 x^2 - e^{\hat{\omega}_2}bx^3/2 - e^{\hat{\omega}_2}\xi_2 y^2/2$。

考虑有界集 $U_{\varepsilon_{1,2}} = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid \varepsilon_1 < x < 1/\varepsilon_1, \varepsilon_2 < y < 1/\varepsilon_2\}$。令 $U_{\varepsilon_{1,2}}^1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 < x \leqslant \varepsilon_1\}$，$U_{\varepsilon_{1,2}}^2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid 0 < y \leqslant \varepsilon_2\}$，$U_{\varepsilon_{1,2}}^3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid x \geqslant 1/\varepsilon_1\}$，$U_{\varepsilon_{1,2}}^4 = \{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2 \mid \varepsilon_1 \leqslant x \leqslant 1/\varepsilon_1, y \geqslant 1/\varepsilon_2\}$。显然，$U_{\varepsilon_{1,2}}^C = U_{\varepsilon_{1,2}}^1 \cup U_{\varepsilon_{1,2}}^2 \cup U_{\varepsilon_{1,2}}^3 \cup U_{\varepsilon_{1,2}}^4$。

下面的证明与定理 6 的证明类似，可以得到，对于 $\forall(t,x,y) \in U_{\varepsilon_{1,2}}^C \times \mathbf{R}_+$，有 $LV(t,x,y) \leqslant -1$，所以系统（3）有周期解。

3　数值模拟结果

对于随机模型（2），首先取初值 $x = 0.1$，$y = 0.2$。选择适当参数：$a_1 = 0.4$，$b = 0.1$，$m_1 = 1/6$，$m_2 = 1/6$，$f_1 = 0.1$，$a_2 = 0.4$，$f_2 = 1.1$，$c_2 = 5$，$c_1 = 4$，$n = 1$，$p_1 = 0.06$，$p_2 = 0.06$，$\sigma_1 = 0.02$，$\sigma_2 = 0.02$。通过计算可得，$f_2(a_1 - p_1 - \sigma_1^2/2) - a_2 - p_2 - \sigma_2^2/2 = 0.033\,98 > 0$，$(n - f_1)^2 - 4(c_1 - f_1 c_2) = -13.19 < 0$，显然满足定理 4 和定理 6 的条件。由图 1 可以看出，模型（2）的解围绕其确定性方程的解波动且存在平稳分布。



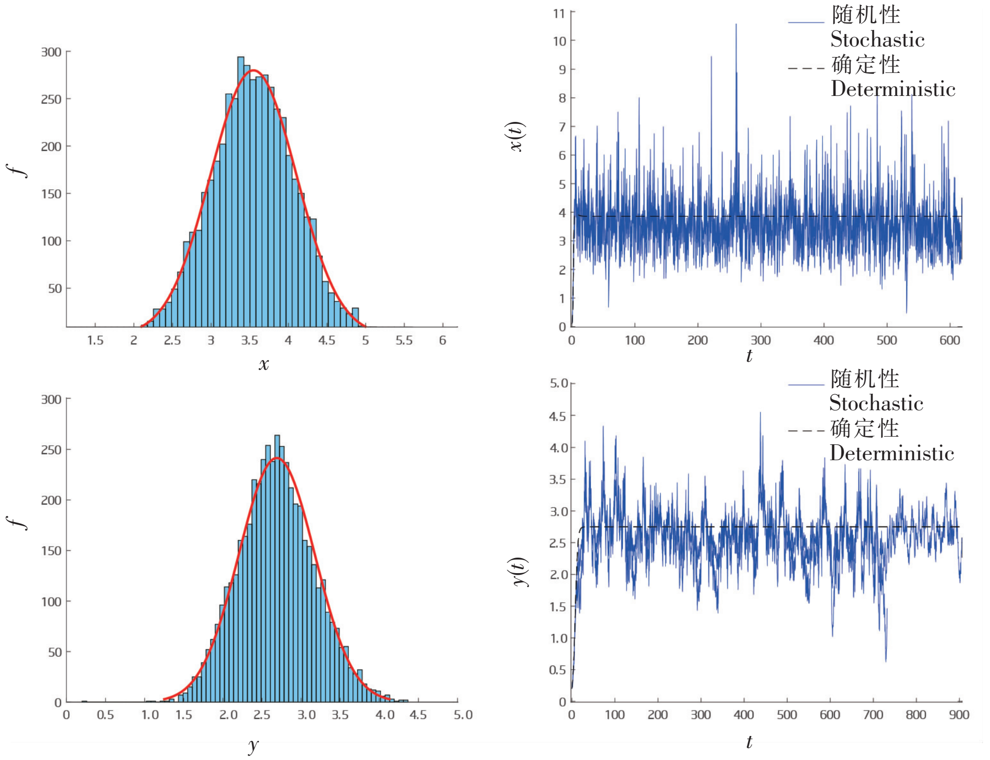
a) 密度函数
Density function

b) 解与其确定性系统的解
Solution with its deterministic system solution

图 1　系统(2)的密度函数图及解与其确定性系统的解(σ_1=0.02,σ_2=0.02)

Fig.1　Density function of system (2) and the solution with its deterministic system solution(σ_1=0.02,σ_2=0.02)

对于随机模型（2），首先取初值 $x=0.1$，$y=0.2$。选择适当参数：$a_1=0.4$，$b=0.1$，$m_1=1/6$，$m_2=1/6$，$f_1=0.1$，$a_2=0.4$，$f_2=1.1$，$c_2=5$，$c_1=4$，$n=1$，$p_1=0.06$，$p_2=0.06$，$\sigma_1=0.2$，$\sigma_2=0.2$。通过计算可得，$a_2>p_2+\sigma_2^2/2$，$f_2(a_1-p_1-\sigma_1^2/2)-a_2-p_2-\sigma_2^2/2=0.032>0$，$(n-f_1)^2-4(c_1-f_1c_2)=-13.19<0$，显然满足定理 4 和定理 6 的条件。由图 2 可以看出，模型（2）的解围绕其确定性方程的解波动且存在平稳分布，与图 1 相比波动区域变大。

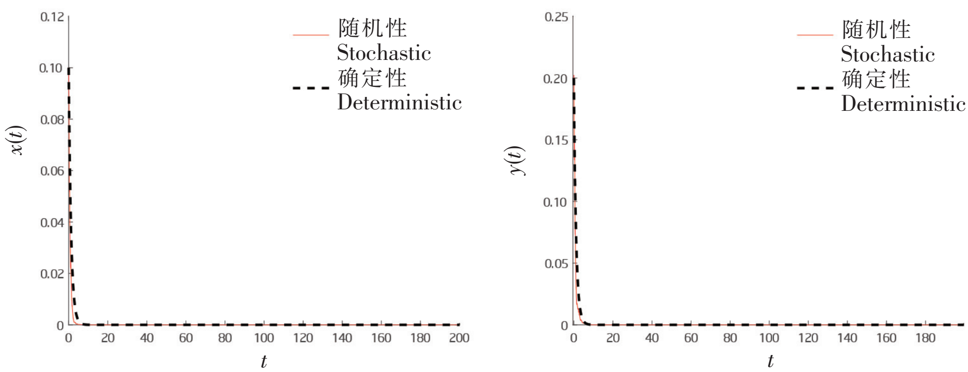


a) 密度函数　Density function　　b）解与其确定性系统的解　Solution with its deterministic system solution

图 2　系统(2)的密度函数图,及其解与其确定性系统的解(σ_1=0.2,σ_2=0.2)

Fig.2　Density function of system (2) and the solution with its deterministic system solution(σ_1=0.2,σ_2=0.2)

对于随机模型（2），首先取初值 $x=0.1$，$y=0.2$。选择适当参数：$a_1=0.4$，$b=0.1$，$m_1=1/6$，$m_2=1/6$，$f_1=0.1$，$a_2=0.4$，$f_2=1.1$，$c_2=5$，$c_1=4$，$n=1$，$p_1=0.6$，$p_2=0.6$，$\sigma_1=0.2$，$\sigma_2=0.2$。通过计算，显然满足定理 5 的条件 ii)。由图 3 可以看出，食饵 x 与捕食者 y 均灭绝，说明过度捕获将导致种群减少。



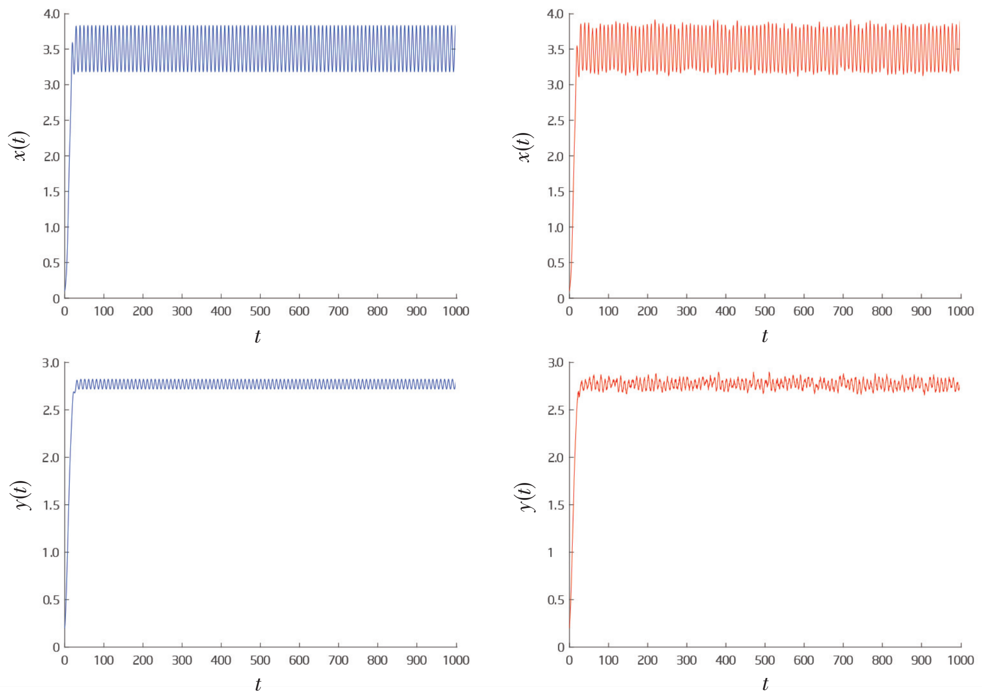
a）$x(t)$　　b）$y(t)$

图 3　系统(2)以(x(0),y(0))=(0.1,0.2)为初始值的数值模拟

Fig.3　Numerical simulation with (x(0),y(0))=(0.1,0.2) as the initial value for system (2)

对于随机模型（3），首先取初值 $x=0.1$，$y=0.2$。选择适当参数：$a_1 = 0.4 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$b = 0.1 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$m_1 = 1 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$m_2 = 1 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$f_1 = 0.1 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$a_2 = 0.4 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$f_2 = 1.1 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$c_2 = 5 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$c_1 = 4 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$n = 1 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$p_1 = 0.06 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$p_2 = 0.06 + 0.02\sin(\pi t/5)$，$\sigma_1 = 0.01 + 0.001\sin(\pi t/5)$，$\sigma_2 = 0.01 + 0.001\sin(\pi t/5)$，显然符合定理 7 的 $\xi_1 > 0$、$\xi_2 > 0$ 条件。由定理 7 可以看出，系统（3）至少存在一个周期解，这意味着捕食者和食饵种群将长期共存并表现出周期性。由图 4 和图 5 可以看出，对于任何正的初始值，确定性模型的解将在一段时间后进入周期轨道，而当噪声强度较小时，随机模型（3）的解会在周期轨道的小范围内振动。

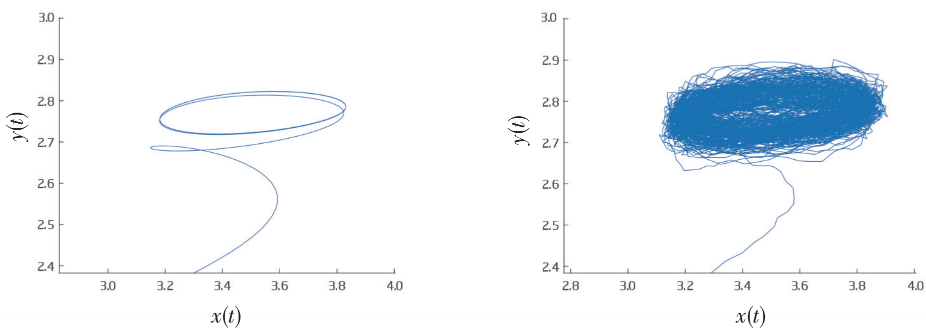
模拟结果说明，环境噪声强度和可捕获性对随机捕食-食饵模型有重要的影响。



a）确定性模型 Deterministic model　　　　b）随机性模型 Stochastic model

图 4　以(x(0),y(0))=(0.1,0.2)为初始值的系统(3)相对应的确定性系统的解及其系统(3)的解

Fig.4　The solution of the deterministic system (3) corresponding to the system with (x(0),y(0))=(0.1,0.2) as the initial value and its solution of system (3)



a）确定性模型 Deterministic model　　　　b）随机性模型 Stochastic model

图 5　以(x(0),y(0))=(0.1,0.2)为初始值的随机模型(3)和相应的确定模型的解(x(t),y(t))的周期图

Fig.5　Stochastic model (3) with (x(0),y(0))=(0.1,0.2) as the initial value and the periodic graph of the solution (x(t),y(t)) for deterministic model

4 结论

本文研究了具有 Holling IV 功能性反应和非线性收获的随机捕食-食饵系统。证明了对于任意给定的初始值，系统（2）都存在唯一的全局正解；得到了系统（2）的平均持续生存与灭绝的充分条件。此外，在满足一定条件下，使用 Has’minskii 的平稳分布理论及周期性理论，得到了系统（2）存在唯一的平稳分布且具有遍历性，并获得了系统（3）存在非平凡的正周期解。

[参考文献]

[1] MANDAL P S, BANERJEE M. Stochastic persistence and stationary distribution in a Holling-Tanner type prey-predator model [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2012, 391(4): 1216-1233.

[2] XIAO D M, RUAN S G. Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2000, 61(4): 1445-1472.

[3] LIN Y G, JIANG D Q. Long-time behavior of a stochastic predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes [J]. International Journal of Biomathematics, 2016, 9(3): 121-138.

[4] DELGADO M, MÒNICA M B, ANTONIO S. Analysis of an age-structured predator-prey model with disease in the prey [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2006, 7(4): 853-871.

[5] PRATAMA R A, RUSLAU M F V, SURYANI D R, et al. Optimal harvesting and stability of predator-prey model with Holling type II predation response function and stage-structure for predator [J]. Journal of Physics Conference Series, 2020, 1569: 042067.

[6] FREEDMAN H I. Deterministic mathematical models in population ecology [J]. Biometrics, 1980, 22(7): 219-236.

[7] GUPTA R P, CHANDRA P, BANERJEE M. Dynamical complexity of a prey-predator model with nonlinear predator harvesting [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems: Series B, 2015, 20(2): 423-443.

[8] LIU M, MANDAL P S. Dynamical behavior of a one-prey two-predator model with random perturbations [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 28(1/2/3): 123-137.

[9] LI L, JIN Z. Pattern dynamics of a spatial predator-prey model with noise [J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 67(3): 1737-1744.

[10] MAY R M, ALLEN P M. Stability and complexity in model ecosystems [J]. IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics, 1976, 6(12): 887.

[11] LAN G J, FU Y J, WEI C J, et al. Dynamical analysis of a ratio-dependent predator-prey model with Holling III type functional response and nonlinear harvesting in a random environment [J]. Advances in Difference Equations, 2018, 198: 1-25.

[12] WU R H, ZOU X L, WANG K. Asymptotic behavior of a stochastic non-autonomous predator-prey model with impulsive perturbations [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 20(3): 965-974.

[13] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京：科学出版社，2010.

[14] JI C Y, JIANG D Q, SHI N Z. Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2009, 359(2): 482-498.

[15] KHASMINSKII R. Stochastic stability of differential equations [M]. Maryland: Sijthoff Noordhoff, 1980.

[16] LIU M, WANG K, WU Q. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle [J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2011, 73(9): 1969.

[17] WANG W M, CAI Y L, LI J L, et al. Periodic behavior in a FIV model with seasonality as well as environment fluctuations [J]. Journal of the Franklin Institute, 2017, 354(16): 7410-7428.

[18] CAI Y L, KANG Y, WANG W M. A stochastic SIRS epidemic model with nonlinear incidence rate [J]. Applied Mathematics Computation, 2017, 305: 221-240.

[19] XU D S, LIU M, XU X F. Analysis of a stochastic predator-prey system with modified Leslie-Gower and Holling-type IV schemes [J]. Physica A: Statal Mechanics and Its Applications, 2019, 537: 122761.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）