

空气污染物随机扩散的 SIS 模型动力学

黄幼林, 魏春金, 张树文

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究一类具有非线性传染率与空气污染物随机扩散的随机 SIS 模型的动力学。假设疾病传播系数是关于空气质量指数的函数, 根据随机过程的统计性质, 导出了感染者 $I(t)$ 满足的一维随机微分方程模型。证明该随机微分方程模型正解的存在唯一性, 得到该疾病灭绝的充分条件与一些性质。最后通过数值模拟验证该结论。

[关键词] 空气污染; 呼吸系统疾病; 随机 SIS 模型; 噪声强度

[中图分类号] O 175.13

Dynamics of SIS Models with Random Diffusion of Air Pollutants

HUANG Youlin, WEI Chunjin, ZHANG Shuwen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the dynamics of a stochastic SIS model with nonlinear infection rate and random diffusion of air pollutants were studied. The disease transmission coefficient was a function of the air quality index in this model. A one-dimensional stochastic differential equation (SDE) model about infected individuals $I(t)$ was derived according to the statistical properties of stochastic process. Firstly, the existence and uniqueness of positive solutions of SDE model were proved. Then the sufficient conditions for the extinction of the disease and some properties were obtained. Finally, the results were verified by numerical simulation.

Keywords: air pollution; respiratory diseases; stochastic SIS model; noise intensity

0 引言

随着城市化和工业化的发展, 化石燃料的使用使汽车尾气的排放增多, 工业化过度发展, 植被破坏严重, 空气污染水平已经达到四级^[1]。城市已经笼罩在浓浓的烟雾中, 尤其是在冬季^[2]。空气污染已经引起世界各地的高度关注。流行病学研究表明, 微粒空气污染与某些疾病有关^[3-5]。空气污染每年造成全球超过 300 万人死亡, 并导致了呼吸疾病的流行^[6]。

近几年来, 许多学者通过建立数学模型, 研究了排放到生态系统中的污染物是如何通过环境污染以及污染系统对周围种群影响的^[7-10]。这些研究采用了确定性模型来描述生物体内和环境中的污染物浓度的变化。全球空气污染的严重程度常用空气质量指数 (air quality index, AQI) 来描述。AQI 随温度、降雨、大气压、风向和速度等各种气象因素发生变化, 随机性对 AQI 的影响可能比呼吸疾病的直接影响强得多^[11-13]。因此, 将随机 AQI 动态演化方程与确定性呼吸传染病模型相结合, 对了

[收稿日期] 2020-12-18

[基金项目] 国家自然科学基金项目 (11971405); 福建省自然科学基金项目 (2018J01418); 集美大学国家自然科学基金培育项目 (ZP2020064)

[作者简介] 黄幼林 (1995—), 女, 硕士生, 从事生物数学方向研究。通信作者: 张树文 (1963—), 男, 教授, 硕导, 从事生物数学方向研究。E-mail: zhangsw_123@163.com

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

解 AQI 的随机干扰是如何影响呼吸道疾病的传播具有重要意义。

根据呼吸道疾病的发病机制, 本文考虑以下传染率受 AQI 影响的 SIS 模型, 即

$$\begin{cases} dS = (\omega - \beta(F)SI/h(N) - d_1S + \gamma I)dt, \\ dI = (\beta(F)SI/h(N) - d_1I - \alpha I - \gamma I)dt, \\ dF = (c - \mu F)dt. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $N(t)$ 是 t 时刻的人口总数, 满足 $N(t) = S(t) + I(t)$, 初值 $N_0 = S_0 + I_0$; $S(t)$ 和 $I(t)$ 分别表示易感者和感染者在 t 时刻的数量; ω 表示人口的输入率; d_1 和 α 分别表示自然死亡率和疾病死亡率; γ 表示感染个体的恢复率; $\beta(F) = \beta F$ 表示受 AQI 影响的传染率; $F(t)$ 表示 t 时刻的空气质量指数; c 表示污染物流入空气的速率; μ 表示污染物的净化率; $\beta(F)SI/h(N)$ 表示疾病的饱和发生率; $h(N) = (1 + fN + \sqrt{1 + 2fN})/f$ [14]。

容易证明 $\Gamma = \{(S(t), I(t)) | S(t) \geq 0, I(t) \geq 0, \omega/(d_1 + \alpha + \gamma) \leq N(t) \leq \omega/d_1\}$ 是系统 (1) 的正不变集。系统 (1) 可写为

$$\begin{cases} dI = (\beta F(N - I)I/h(N) - d_1I - \alpha I - \gamma I)dt, \\ dF = (c - \mu F)dt. \end{cases} \quad (2)$$

该系统的平衡点 $E_1 = (I^*, F^*) = (N^* - \mu h(N^*)(d_1 + \alpha + \gamma)/(\beta c), c/\mu)$, $E_2 = (0, c/\mu)$, 基本再生数 $R_0 = \beta c N_0 / [\mu h(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)]$ 。

然而, 随机扰动经常出现在各种自然现象中, 空气污染物的净化可能会受到随机因素的影响。因此, 本文考虑对空气污染物的净化率进行了随机扰动, 研究与确定性模型 (2) 相对应的随机模型, 即

$$\begin{cases} dI = (\beta F(N - I)I/h(N) - d_1I - \alpha I - \gamma I)dt, \\ dF = (c - \mu F)dt - \delta F dB(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中: δ^2 表示白噪声强度; $B(t)$ 是标准布朗运动。由文献 [15] 可得 $F(t) = c/\mu + (F_0 - c/\mu) \exp(-\mu t) + \sigma(t)dB(t)/dt$, 其中: $\sigma(t) = \sqrt{\text{Var}(F(t))}$, $\text{Var}(F(t)) = P_1 + P_2 \exp(-\mu t) + P_3 \exp(-2\mu t) + P_4 \exp[(\delta^2 - 2\mu)t]$, $P_1 = c^2 \delta^2 / [\mu^2 (2\mu - \delta^2)]$, $P_2 = 2c\delta^2 (F_0 \mu - c) / [\mu(\mu - \delta^2)]$, $P_3 = -(F_0 - c/\mu)^2$, $P_4 = F_0^2 + 2c(F_0 \delta^2 - 2F_0 \mu + c) / [(2\mu - \delta^2)(\mu - \delta^2)]$ 。因此, 系统 (3) 可表示为

$$dI = I[(\beta c/\mu + (\beta F_0 - \beta c/\mu) \exp(-\mu t))(N - I)/h(N) - (d_1 + \alpha + \gamma)]dt + \beta \sigma(t)(N - I)I/h(N)dB(t). \quad (4)$$

1 预备知识

为方便起见, 给出以下记号: 1) $\mathbf{R}_+^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n | a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n\}$; 2) 对于 n 个函数 l_1, \dots, l_n , 定义 $l_1 \vee l_2 \vee \dots \vee l_n = \max\{l_1, \dots, l_n\}$ 。

假设 $x(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)) (t \geq 0)$ 是随机微分方程

$$dX(t) = [u(t) + U(t)X(t)]dt + \sum_{i=1}^m [f_i(t) + F_i(t)X(t)]dW_i(t) \quad (5)$$

的解, 其中: $W(t) = [W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t)]^T$ 是 m 维维纳过程; $U(t)$ 和 $F_i(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵函数; $u(t)$ 和 $f_i(t)$ 是 $m \times m$ 矩阵向量。

定理 1 [16] 假设函数 $u(t)$ 、 $f_i(t)$ 、 $U(t)$ 和 $F_i(t)$ 关于 $t \in [0, T]$ 是可测量和有界的, 对于 $t \in [0, T]$ 满足 $EX_0^2 < \infty$, 任意初值 X_0 与 $W(t)$ 无关, 则系统 (5) 存在唯一的解 $X(t)$, 满足 $X(0) = X_0$ 。

定理 2 [17] (Itô 公式) 设 $x(t) (t \geq 0)$ 是 Itô 过程, 其随机微分为 $dx(t) = f(t)dt + g(t)dB(t)$, 其中: $f \in L^1(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^n)$; $g \in L^2(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^{n \times m})$ 。若 $V(x(t), t) \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+; \mathbf{R})$, 则 $V(x(t), t)$ 仍然是 Itô 过程, 具有随机微分 $dV(x(t), t) = V_t(x(t), t)dt + V_x(x(t), t)dx(t) + (1/2)d\mathbf{x}^T(t)V_{xx}(x(t), t)dx(t)$ 。

2 主要结果及证明

定理3 对任意给定的初值 $I_0 \in (0, N_0)$, 若 $\delta^2 < 2\mu$, 则系统 (4) 存在唯一解 $I(t)$, 并且以概率 1 存在于 $(0, N_0)$ 中。

证明 显然, 系统 (4) 的参数满足局部 Lipschitz 条件, 则系统 (4) 存在唯一的局部解 $I(t)$ ($t \in [0, \tau_e)$), 其中 τ_e 是爆破时间。为了证明这个解是全局的, 只需证明 $\tau_e = +\infty$ 。

令 $k_0 > 0$ 足够大, 使得 $I_0 \in (1/k_0, N_0 - 1/k_0)$, 对于任意的正数 $k \geq k_0$, 定义一个停时序列 $\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e) : I(t) \notin (1/k, N_0 - 1/k)\}$ 。

定义 $\inf \Phi = \infty$ (Φ 代表一个空集)。显然, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, τ_k 是单调递增的, 且 $\tau_k < \tau_e$, 因此有 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 其中 $\tau_\infty \leq \tau_e$ 。因此, 只需证明 $\tau_\infty \rightarrow \infty$ 。

假设 $\tau_\infty < \infty$, 则存在常数 $T \geq 0, \varepsilon \in (0, 1)$ 和一个整数 $k_1 \geq k_0$, 有 $P\{\tau_k \leq T\} \geq \varepsilon, \forall k \geq k_1$ 。定义一个 C^2 -函数: $\mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $V = 1/I + 1/(N - I)$ 。由 Itô 公式可得 $dV = LVdt + [1/(N - I)^2 - 1/I^2][\beta\sigma(t)(N - I)/h(N)]dB(t)$, 其中:

$$LV = I[(\beta c/\mu + (\beta F_0 - \beta c/\mu)e^{-\mu t})(N - I)/h(N) - (d_1 + \alpha + \gamma)]/(N - I)^2 - [(\beta c/\mu + (\beta F_0 - \beta c/\mu)e^{-\mu t})(N - I)/h(N) - (d_1 + \alpha + \gamma)]/I + \beta^2 \sigma^2(t)(N - I)^2 I[-1/I^3 + 1/(N - I)^3]/h^2(N) \leq (d_1 + \alpha + \gamma)/I + I[\beta c/\mu + (\beta F_0 - \beta c/\mu)e^{-\mu t}]/(h(N)(N - I)) + \beta^2 \sigma^2(t)I^2/((N - I)h^2(N)) + \beta^2 \sigma^2(t)(N - I)^2/h^2(N)I。$$

根据 $h(N)$ 的表达式, 易证 $0 < I/h(N) < 1$ 和 $0 < (N - I)/h(N) < 1$ 。若 $\beta F_0 \leq \beta c/\mu$, 则 $\beta c/\mu + (\beta F_0 - \beta c/\mu)e^{-\mu t} \leq \beta c/\mu$; 若 $\beta F_0 \geq \beta c/\mu$, 则 $\beta c/\mu + (\beta F_0 - \beta c/\mu)e^{-\mu t} \leq \beta F_0$ 。由 $\delta^2 < 2\mu$ 及 $\sigma(t)$ 表达式得到, 存在 $M_1 > 0$, 满足 $\sigma(t) \leq M_1, t \geq 0$ 。定义 $M_0 = \beta F_0 \vee \beta c/\mu$ 及 $K = (d + \alpha + \gamma + \beta^2 M_1^2) \vee (M_0 + \beta^2 M_1^2)$, 故 $LV \leq K[1/I + 1/(N - I)] = KV$ 。因此, 对 $\forall t \in [0, T]$ 及 $k \geq k_1$, 有 $EV(I(t \wedge \tau_k)) = V(I_0) + E \int_0^{t \wedge \tau_k} LV(I, F)ds \leq V(I_0) + E \int_0^{t \wedge \tau_k} KV(I, F)ds \leq V(I_0) + KE \int_0^{t \wedge \tau_k} V(I, F)ds$ 。

其余的证明与文献 [18] 相似, 在此省略。

定理4 令 $R_0^s = \beta c N_0 / [\mu(d_1 + \alpha + \gamma)h(N_0)] - \beta^2 c^2 \delta^2 N^2 / [2\mu^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)h^2(N_0)]$ 。设 $I(t)$ 是模型 (4) 的任意解, 对任意给定的初值 $I_0 \in (0, N_0)$, 若下列其中一个条件成立; i) $\delta^2 \leq 2\mu^2 d_1 h(\omega/d_1) / [\beta c \omega + \mu d_1 h(\omega/d_1)]$ 和 $R_0^{s1} = \beta c \omega / [\mu d_1 (d_1 + \alpha + \gamma)h(\omega/d_1)] - \beta^2 c^2 \delta^2 \omega^2 / [2\mu^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)^3 h^2(\omega/(d_1 + \alpha + \gamma))] < 1$; ii) $\delta^2 < 2\mu$ 和 $\delta^2 > 2\mu / [2(d_1 + \alpha + \gamma)h^2(\omega/(d_1 + \alpha + \gamma)) + 1]$, 则疾病指数灭绝。

证明 i) 应用 Itô 公式可得

$$d \ln I = LVdt + [\beta\sigma(t)(N - I)/(2h(N))]dB(t)。 \quad (6)$$

其中: $LV = (\beta c/\mu + (\beta F_0 - \beta c/\mu)e^{-\mu t})(N - I)/h(N) - (d_1 + \alpha + \gamma) - \beta^2 \sigma^2(t)(N - I)^2/(2h^2(N))$ 。

对式 (6) 两边同时从 0 到 t 积分并除以 t 可得: $t^{-1} \ln I(t) = t^{-1} \ln I_0 + t^{-1} \int_0^t g_1 ds + g_2/t + t^{-1} \int_0^t g_3(I(s))dB(s)$ 。其中: $g_1 = \beta c(N - I)/(\mu h(N)) - \beta^2 c^2 \delta^2 (N - I)^2/[2\mu^2(2\mu - \delta^2)h^2(N)] - (d_1 + \alpha + \gamma)$; $g_2 = \int_0^t \{(\beta F_0 - \beta c/\mu)e^{-\mu s}(N - I)/h(N) - \beta^2(N - I)^2[P_2 e^{-\mu s} + P_3 e^{-2\mu s} + P_4 e^{(\delta-2\mu)s}]/(2h^2(N))\} ds$ 。因此, $g_1 = -\beta^2 c^2 \delta^2 I^2/(2\mu^2(2\mu - \delta^2)h^2(N)) + I[\beta^2 c^2 \delta^2/(2\mu^2(\mu - \delta^2)h^2(N)) - \beta c/(\mu h(N))] + \beta c N/(\mu h(N)) - \beta^2 c^2 \delta^2 N^2/(2\mu^2(2\mu - \delta^2)h^2(N)) - (d_1 + \alpha + \gamma) \leq -\beta^2 c^2 \delta^2 N^2/(2\mu^2(2\mu - \delta^2)h^2(N)) + \beta c N/(\mu h(N)) - (d_1 + \alpha + \gamma) + I\{\beta^2 c^2 \delta^2/[2\mu^2(\mu - \delta^2)h^2(\omega/(d_1 + \alpha + \gamma))] - \beta c/(\mu h(\omega/d_1 + \alpha + \gamma))\} \leq -\beta^2 c^2 \delta^2 \omega^2/[2\mu^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)^3 h^2(\omega/(d_1 + \alpha + \gamma))] + \beta c \omega/(\mu d_1 h(\omega/d_1)) - (d_1 + \alpha + \gamma) = (d_1 + \alpha + \gamma)(R_0^{s1} - 1) < 0$ 。

由于 $\delta^2 \leq 2\mu^2 d_1 h(\omega/d_1)/[\beta c\omega + \mu d_1 h(\omega/d_1)]$ 和 $\delta^2 < 2\mu$ 成立, 则容易证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t g_3 dB(s) = 0$ 以及 $\lim_{t \rightarrow \infty} (g_2/t) = 0$ 。因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 。

ii) 若 $\delta^2 < 2\mu$ 和 $\delta^2 > 2\mu/[2(d_1 + \alpha + \gamma)h^2(\omega/(d_1 + \alpha + \gamma)) + 1]$, 则 $g_1 = -\beta^2 P_1[(I - N)^2 + 2ch(N)(I - N)/(\beta\mu P_1)]/(2h^2(N)) - (d_1 + \alpha + \gamma) = -\beta^2 P_1[I - N + ch(N)/(\beta\mu P_1)]^2/(2h^2(N)) + c^2/(2\mu^2 P_1 h^2(N)) - (d_1 + \alpha + \gamma) \leq (2\mu - \delta^2)/[2\delta^2 h^2(\omega/(d_1 + \alpha + \gamma))] - (d_1 + \alpha + \gamma) < 0$ 。同理可证 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 。

定理 5 设 $I(t)$ 是系统 (4) 满足初始条件 $I_0 \in (0, N_0)$ 的任意解, 若 $R_0^{s_2} = \beta c\omega/[\mu(d_1 + \alpha + \gamma)^2 h(\omega/(d_1 + \alpha + \gamma))] - \beta^2 c^2 \delta^2 \omega^2/[2\mu^2 d_2 (2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)h^2(\omega/d_1)] > 1$, $\delta^2 \leq 2\mu^2 d_1 h(\omega/d_1)/[\beta c\omega + \mu d_1 h(\omega/d_1)] \vee 2\mu/[2(d_1 + \alpha + \gamma) + 1]$, 则模型 (4) 的解有下列性质, 即

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) \geq \varepsilon, \quad (7)$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) \leq \varepsilon. \quad (8)$$

其中:

$$\varepsilon = N_0 + h(N_0)[\sqrt{c^2 - 2\mu^2 P_1(d + \alpha + \gamma) - c}/(\mu\beta P_1)] \quad (9)$$

是 $g_1(x) = -\beta^2 P_1(N_0 - x)^2/(2h^2(N_0)) + \beta c(N_0 - x)/(\mu h(N)) - (d_1 + \alpha + \gamma)$ 在 $[0, \omega/d_1]$ 上唯一的根。

证明 当 $\delta^2 < 2\mu$ 时, $g_2(I, t)$ 在 $[0, \omega/d_1] \times [0, \infty)$ 有界, 故容易得到 $\lim_{t \rightarrow \infty} (g_2/t) = 0$ 。若 $R_0^{s_1} > 1$, 满足 $g_1(N_0) = -(d_1 + \alpha + \gamma) < 0$ 和 $g_1(0) \geq (d_1 + \alpha + \gamma)(R_0^{s_1} - 1) > 0$, 则 $g_1(x)$ 有一个正根和一个负根, 并且满足: i) 当 $x \in (0, 0 \vee [\mu\beta P_1 N_0 - ch(N_0)]/(\mu\beta P_1))$ 时, $g_1(x) > 0$ 严格递增; ii) 当 $x \in (0 \vee [\mu\beta P_1 N_0 - ch(N_0)]/(\mu\beta P_1), \varepsilon)$ 时, $g_1(x) > 0$ 严格递减; iii) 当 $x \in (\varepsilon, N_0)$ 时, $g_1(x) < 0$ 严格递减。

假设不等式 (7) 不成立, 则存在充分小的 $\epsilon_1 \in (0, 1)$, 使 $P(\Omega_1) > \epsilon_1$, 其中 $\Omega_1 = \{\limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) \leq \varepsilon - 2\epsilon_1\}$ 。因此, 对 $\forall \varpi \in \Omega_1$, 存在 $T = T(\varpi) > 0$, 使

$$I(t, \varpi) \leq \varepsilon - \epsilon_1, t \geq T(\varpi). \quad (10)$$

使 ϵ_1 充分小, 满足 $g(0) > g_1(\varepsilon - \epsilon_1)$ 。由 i)、ii) 和式 (10) 得, 对 $\forall t \geq T(\varpi)$, 有 $g_1(I(t, \varpi)) \geq g_1(\varepsilon - \epsilon_1)$ 。根据强大数定理, 存在 $\Omega_2 \subset \Omega$, 使对 $\forall \varpi \geq \Omega_2$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \beta\sigma(s)(N - I(s, \varpi))h^{-1}(N)dB(s, \varpi) = 0$, 则 $\ln I(t, \varpi) \geq \ln I_0 + \int_0^{T(\varpi)} g_1(I(s, \varpi))ds + g_1(\varepsilon - \epsilon_1)(t - T(\varpi)) + g_2(t, \varpi) + \int_0^t \beta\sigma(s)(N - I(s, \varpi))h^{-1}(N)dB(s, \varpi)$ 。因此, $\liminf_{t \rightarrow \infty} \ln I(t, \varpi)/t \geq g_1(\varepsilon - \epsilon_1) > 0$ 。所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \ln I(t, \varpi) = \infty$, 这与式 (10) 相矛盾, 故式 (7) 成立。同理可证式 (8)。

定理 6 设 $R_0^{s_2} > 1$ 和 $\delta^2 \leq 2\mu^2 d_1 h(\omega/d_1)/[\beta c\omega + \mu d_1 h(\omega/d_1)] \vee 2\mu/[2(d_1 + \alpha + \gamma) + 1]$ 。若函数式 (7) 中的 ε 是关于 δ 的一个函数且有

$$0 < \delta < \sqrt{2\mu - 2c\mu\beta^2 N_0^2/[\beta^2 c^2 N_0^2 + 2\beta c\mu N_0 h(N_0) - 2\mu^2 h^2(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)]} = \delta^*, \quad (11)$$

则 ε 严格递减, 且 $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \varepsilon = N_0(1 - 1/R_0)$, 即有

$$\lim_{\delta \rightarrow \delta^*} \varepsilon = \begin{cases} 0, 1 < R_0 < 2, \\ N_0[1 - 1/(R_0 - 1)], R_0 > 2. \end{cases} \quad (12)$$

证明 由于 $d\varepsilon/d\delta = (d\varepsilon/dP_1) \cdot (dP_1/d\delta) = -4c^2\delta\mu^{-1}(2\mu - \delta^2)^{-2}[h(N_0)(\sqrt{c^2 - 2P_1\mu^2(d_1 + \alpha + \gamma)} - c)/(\mu\beta P_1^2) + \mu h(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)/(\beta P_1 \sqrt{c^2 - 2P_1\mu^2(d_1 + \alpha + \gamma)})] = -2c^2\delta h(N_0)[\sqrt{c^2 - 2P_1\mu^2(d_1 + \alpha + \gamma)} - c]^2/(\mu^2\beta P_1^2(2\mu - \delta^2)^2) < 0$, 因此, 随着 δ 的增加, ε 严格减小。应用 L'Hopital 定理得: $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \varepsilon = N_0 +$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} h(N_0)\mu(d_1 + \alpha + \gamma)/(\beta\sqrt{c^2 - 2P_1\mu^2(d_1 + \alpha + \gamma)}) = N_0(1 - 1/R_0)。$$

定义 $J_1 = \beta^2 c^2 N_0^2$, $J_2 = \beta^2 c^2 N_0^2 + 2\beta c \mu N_0 h(N_0) - 2\mu^2(d_1 + \alpha + \gamma)h^2(N_0)$, 则 $\lim_{\delta \rightarrow \delta^*} P_1 = \lim_{\delta \rightarrow \delta^*} c^2 \delta^2 / (\mu^2(2\mu - \delta^2)) = c^2(J_2 - J_1) / (\mu^2 J_1)$, $\sqrt{J_1^2 - 2(J_2 - J_1)J_1(d_1 + \alpha + \gamma)} = \mu h(N_0) \times |\beta^2 c^2 N_0^2 - 2\mu \beta c N_0 h(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)| = \mu \beta c N_0 h(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma) |R_0 - 2|$, $\beta N_0 c(J_2 - J_1) - \mu h(N)J_1 = \beta c N_0 \mu^2 h^2(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)[\beta c N_0 / \mu h(N_0)(d_1 + \alpha + \delta) - 2] = \beta c N_0 \mu^2 h^2(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)(R_0 - 2)$, $\beta c(J_2 - J_1) = 2\beta c \mu^2 h^2(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)[\beta c N_0 / (\mu h(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)) - 1] = 2\beta c \mu^2 h^2(N_0)(d_1 + \alpha + \gamma)(R_0 - 1)$ 。因此, $\lim_{\delta \rightarrow \delta^*} \varepsilon = N_0 + \mu J_1 [h(N_0) \sqrt{c^2 - 2c^2(d_1 + \alpha + \gamma)(J_2 - J_1)/J_1} - ch(N_0)] / (\beta c^2(J_2 - J_1)) = [\mu h(N_0) \sqrt{J_1^2 - 2(J_2 - J_1)J_1(d_1 + \alpha + \gamma)} + \beta N_0 c(J_2 - J_1) - \mu h(N)J_1] / (\beta c(J_2 - J_1)) = N_0(|R_0 - 2| + R_0 - 2) / (2(R_0 - 1))$ 。

容易证明等式 (12)。

定理 7 设 $R_0^2 > 1$ 和 $\delta^2 \leq 2\mu^2 d_1 h(\omega/d_1) / [\beta c \omega + \mu d_1 h(\omega/d_1)] \vee 2\mu / [2(d_1 + \alpha + \gamma) + 1]$ 。若函数 (7) 中的 ε 是关于 c 的一个函数且有

$$c > [\mu(2\mu - \delta^2)h(N_0) - \mu h(N_0) \sqrt{(2\mu - \delta^2)^2 - 2\delta^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)}] / (\beta \delta^2 N_0) = c_1^*, \quad (13)$$

$$c < [\mu(2\mu - \delta^2)h(N_0) + \mu h(N_0) \sqrt{(2\mu - \delta^2)^2 - 2\delta^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)}] / (\beta \delta^2 N_0) = c_2^*, \quad (14)$$

则 ε 严格递增, 且 $\lim_{c \rightarrow c_1^*} \varepsilon = 0$, $\lim_{c \rightarrow c_2^*} \varepsilon = N_0 \{1 - [-\mu h(N_0) \sqrt{(2\mu - \delta^2)^2 - 2\delta^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)}] / [\mu h(N_0)(2\mu - \delta^2) + \mu h(N_0) \sqrt{(2\mu - \delta^2)^2 - 2\delta^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)} + \mu h(N_0)(2\mu - \delta^2)]\}$ 。

证明 若 $\delta^2 \leq 2\mu / [2(d_1 + \alpha + \gamma) + 1]$, 则 $(2\mu - \delta^2)^2 - 2\delta^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma) > 0$ 。因为 $d\varepsilon/dc = -\mu h(N_0)(2\mu - \delta^2) [\sqrt{1 - 2\delta^2(d_1 + \alpha + \gamma)/(2\mu - \delta^2)} - 1] / (\beta c^2 \delta^2) = [\mu(2\mu - \delta^2)h(N_0) - \mu h(N_0) \sqrt{(2\mu - \delta^2)^2 - 2\delta^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)}] / (\beta c^2 \delta^2) > 0$ 。当 c 增加时, ε 严格递增。将 ε 的表达式简化得: $\varepsilon = N_0 + [\mu h(N_0) \sqrt{(2\mu - \delta^2)^2 - 2\delta^2(2\mu - \delta^2)(d_1 + \alpha + \gamma)} - \mu(2\mu - \delta^2)h(N_0)] / (\beta c \delta^2)$, 容易得到结论。

3 数值模拟结果

为了验证理论结果, 采用 Milstein 高阶方法^[19]对随机系统 (4) 进行数值模拟。

对于系统 (4), 初值 $S_0 = 0.8$, $I_0 = 0.7$, $F_0 = 0.5$ 。取 $\omega = 0.75$, $\beta = 0.19$, $c = 5$, $\mu = 0.6$, $d_1 = 0.2$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.2$, $h = 0.001$, $f = 0.8$ 。若 $\delta = 0.9$, 则通过计算得到 $R_0^2 - 1 \approx -0.0290 < 0$, $\delta^2 - 2\mu^2 d_1 h(\omega/d_1) / [\beta c \omega + \mu d_1 h(\omega/d_1)] \approx -0.3172 < 0$, 显然满足定理 4 i) 的条件; 若 $\sigma = 0.5$, 则 $\delta^2 - 2\mu = -0.9500 < 0$, $\delta^2 - 2\mu / [2(d_1 + \alpha + \gamma)h^2(\omega/(d_1 + \alpha + \gamma)) + 1] \approx 0.2048 > 0$, 满足定理 4 ii) 的条件。由图 1(a) 和图 1(b) 可知, 疾病指数灭绝。

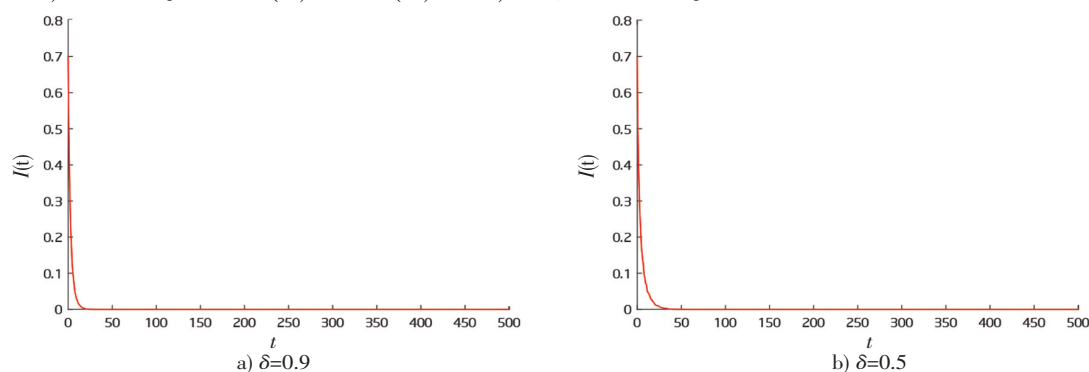


图 1 系统 (4) 模拟结果

Fig.1 Simulation results of system (4)

定理 6 和定理 7 的结果分别说明噪声强度和流入的空气污染物水平对疾病传播的影响。噪声的存在可以降低疾病传播的程度, 而空气污染物流入率的增加将提高疾病的传染力。此外, 为了验证其持久性, 本文给出了定理 5 条件下的随机模型 (4) 的仿真结果。取 $\omega = 0.6$, $\beta = 0.19$, $c = 15$, $\mu = 0.8$, $d_1 = 0.2$, $\alpha = 0.1$, $\gamma = 0.2$, $h = 0.001$, $f = 0.8$, 分别取 $\delta = 0.18$ 和 $\delta = 0.28$, 通过计算可知, 满足 $R_0^{s_2} > 1$ 和 $\delta^2 \leq 2\mu^2 d_1 h(\omega/d_1) / [\beta c \omega + \mu d_1 h(\omega/d_1)] \vee 2\mu / [2(d_1 + \alpha + \gamma) + 1]$ 。数值模拟结果如图 2 ~ 图 3 所示。仿真结果表明, 模型 (4) 存在平稳分布。

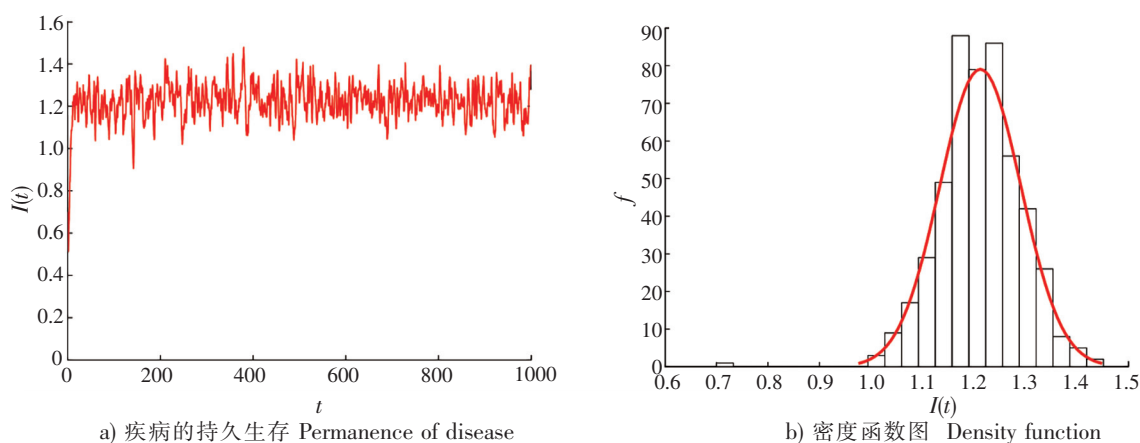


图 2 系统 (4) 仿真结果 ($\delta=0.18$)
Fig.2 Simulation results of systm (4) ($\delta=0.18$)

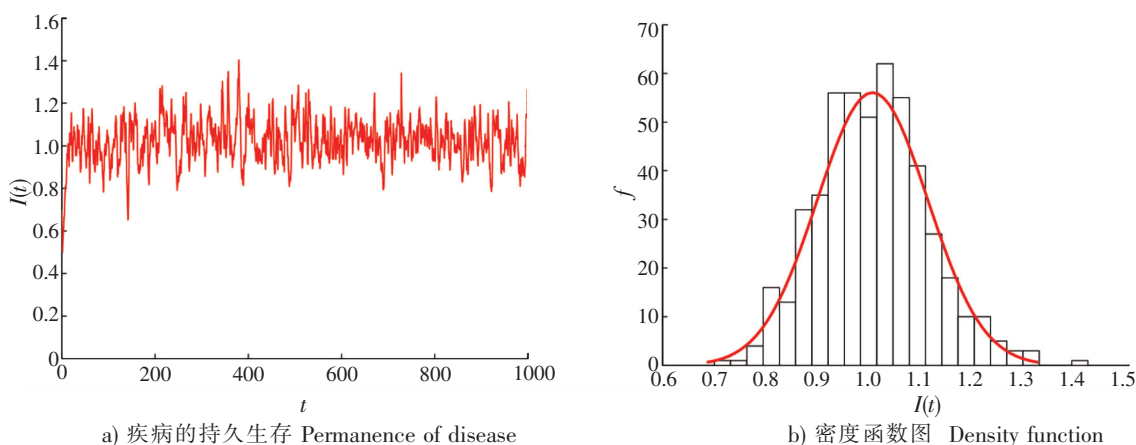


图 3 系统 (4) 仿真结果 ($\delta=0.28$)
Fig.3 Simulation results of systm (4) ($\delta=0.28$)

4 结论

本文研究了空气污染与呼吸系统疾病的动力学模型, 以及空气污染物的随机性如何影响疾病的传播。通过随机微分方程建模, 进一步推导出 AQI 的变量 $F(t)$ 的新公式。在此基础上, 提出了一维随机微分方程模型 (4)。证明了全局正解的存在性, 得到了系统持续和消失的阈值 R_0^s ($R_0^{s_2} \leq R_0^s \leq R_0^{s_1}$)。此外, 结果表明了噪声强度和流入率 c 对随机微分方程模型随机病害动力学的影响。结果表明, 噪声强度和空气污染物清除率对疾病传播有较大影响。当噪声强度满足定理 4 的条件时, 疾病最终会消失。模型 (4) 在满足定理 4 的条件时具有平稳分布。较高的空气污染物流入率可以促进呼吸道疾病的传播和发展, 而较高的空气污染物清除率则会降低呼吸道疾病的传播。此外, 噪音强度扰动一旦足够大, 也能抑制疾病的传播。

[参考文献]

- [1] ALYOUSIFI Y, MASSERAN N, IBRAHIM K. Modeling the stochastic dependence of air pollution index data[J]. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 2018, 32:1603-1611. DOI:10.1007/s00477-017-1443-7.
- [2] SUN C W, YUAN X, YAO X. Social acceptance towards the air pollution in China: evidence from public's willingness to pay for smog mitigation[J]. *Energy Policy*, 2016, 92:313-324. DOI:10.1016/j.enpol.2016.02.025.
- [3] MANNUCCI P M. Airborne pollution and cardiovascular disease: burden and causes of an epidemic[J]. *European Heart Journal*, 2013, 17:1251-1253. DOI:10.1093/eurheartj/ehi045.
- [4] SINHA S, BHATIA S K, GUPTA S. Effect of pollution on dynamics of SIR model with treatment[J]. *International Journal of Biomathematics*, 2015, 8(6):150605042416001. DOI:10.1142/S1793524515500837.
- [5] POLEZER G, TADANO Y S, SIQUEIRA H V, et al. Assessing the impact of PM_{2.5} on respiratory disease using artificial neural networks[J]. *Environmental Pollution*, 2018, 235:394-403. DOI:10.1016/j.envpol.2017.12.111.
- [6] LAEREMANS M, DONS E, AVILA-PALENCIA I, et al. Short-term effects of physical activity, air pollution and their interaction on the cardiovascular and respiratory system[J]. *Environment International*, 2018, 117:82-90. DOI:10.1016/j.envint.2018.04.040.
- [7] CAO B Q, LI X N, LI Q, et al. The analysis of stochastic Lotka-Volterra model in polluted environment[J]. *Differential Equations and Dynamical Systems*, 2018, 26:199-212. DOI:10.1007/s12591-016-0334-6.
- [8] YANG B, CAI Y, WANG W M, et al. Global threshold dynamics of a stochastic epidemic model incorporating media coverage[J]. *Advances in Difference Equations*, 2018, 2018:426. DOI:10.1186/s13662-018-1925-z.
- [9] CAI Y L, WANG K, WANG W M. Global transmission dynamics of a Zika virus model[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2019, 92:190-195. DOI:10.1016/j.aml.2019.01.015.
- [10] ZHAO Y, LI J P, XU M. Stochastic periodic solution of a susceptible infective epidemic model in a polluted environment under environmental fluctuation[J]. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2018, 2018(4):1-15. DOI:10.1155/2018/7360685.
- [11] TANG S Y, YAN Q L, SHI W, et al. Measuring the impact of air pollution on respiratory infection risk in China[J]. *Environmental Pollution*, 2018, 232:477-486. DOI:10.1016/j.envpol.2017.09.071.
- [12] HAGHIG HAT F, FAZIO P, UNNY T. A predictive stochastic model for indoor air quality[J]. *Building and Environment*, 1988, 23(3):195-201. DOI:10.1016/0360-1323(88)90004-2.
- [13] HE S, TANG S Y, XIAO Y N, et al. Stochastic modelling of air pollution impacts on respiratory infection risk[J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2018, 80:3127-3153. DOI:10.1007/s11538-018-0512-5.
- [14] HEESTERBEEK J, METZ J. The saturating contact rate in marriage and epidemic models[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1993, 31(5):529-539. DOI:10.1007/BF00173891.
- [15] HE S, TANG S Y, WANG W M. A stochastic SIS model driven by random diffusion of air pollutants[J]. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 2019, 532:121759. DOI:10.1016/j.physa.2019.121759.
- [16] GARD T C. Introduction to stochastic differential equations[J]. Marcel Dekker Inc New York, 1988, 84(408):19. DOI:10.2307/2290110.
- [17] 王克. 随机生物数学模型[M]. 北京: 科学出版社, 2010:166.
- [18] GRAY A, GREENHALGH D, HU L, et al. A stochastic differential equation SIS epidemic model[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2011, 71(3):876-902. DOI:10.2307/23073365.
- [19] FRIEDMAN A. Stochastic differential equations and their applications[M]. New York: Academic Press, 1976.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)