

脉冲控制的复值复杂网络的最终有界性

吴育清, 黄振坤, 赖艺芬

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 基于脉冲控制的方法, 对节点进行动态控制, 研究具有分布时滞的非自治复值动态复杂网络。利用 Lyapunov 方法, 得到脉冲控制下系统的有界性和稳定性的判断依据, 推广了相关的结果。数值模拟表明了所获结论的有效性。

[关键词] 非自治复值复杂网络; 脉冲控制; 分布时滞; 最终有界

[中图分类号] O 193

Ultimate Boundedness of Complex Valued Complex Networks Based on Impulsive Control

WU Yuqing, HUANG Zhenkun, LAI Yifen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: Based on the impulsive control method, the nodes are dynamically controlled, and the nonautonomous complex-valued dynamic complex networks with distributed time delay are studied. The judgment basis of boundedness and stability of the system under impulsive control is obtained by Lyapunov method, which generalizes the relevant results. Numerical simulation shows the effectiveness of the conclusions.

Keywords: nonautonomous complex valued complex networks; impulse; distributed delay; ultimate boundedness

0 引言

复杂网络是一类重要的动态网络, 它由大量的节点和节点之间复杂的连接组成。同时复杂网络在实际中有许多的应用, 如航空网络^[1]、中医药领域^[2]、现代智能电网^[3]、通信网络^[4]等。

国内外关于复杂网络同步性和稳定性的研究较多^[5-11], 而牵制控制^[12]、自适应控制^[13]、状态反馈控制^[14]等是分析复杂网络稳定性、同步性和其他动态现象常用的控制策略。近年来, 复杂网络的脉冲控制已经成为研究热点之一, 许多学者对此都进行了相关的研究^[15-17]。但这些文献的研究集中在同步性和稳定性, 采用脉冲控制来研究复杂网络有界性的成果相对较少。然而有界性对于复杂网络来说又是一个很好的性质, 如文献 [18] 就通过复杂网络的有界性来研究同步性, 故本文考虑复杂网络的有界性。同时, 由于网络信息堵塞、温度湿度等对传输环境的影响, 现实中常常是有时滞的网络, 所以本文将分布时滞引入系统中。目前, 学者们对于非自治复值复杂网络的研究主要集中在吸引

[收稿日期] 2021-08-11

[基金项目] 国家自然科学基金项目 (61573005); 福建省自然科学基金项目 (2019J01330); 福建省中青年教师教育科研项目 (JAT190322)

[作者简介] 吴育清 (1997—), 男, 硕士生, 从事复杂网络分析与控制研究。通信作者: 黄振坤 (1977—), 男, 教授, 硕导, 从事复杂网络分析与控制研究。E-mail: hzk974226@jmu.edu.cn

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

集、不变集等方面^[19], 而在分布时滞耦合与脉冲控制下的结果较少。同时关于非自治复杂网络有界性的研究仅做到了实数域上^[20], 在复数域上研究其有界性的文献较为少见。因此, 本文研究脉冲控制下具有分布时滞的非自治复值复杂网络的最终有界性。

本文通过脉冲控制和 Lyapunov 方法将文献 [20] 的结论推广到复数域上, 并且在已有的系统中引入分布时滞, 使其更具有现实意义。同时, 本文的定理允许脉冲前的系统是不稳定或者无界的, 说明不稳定的系统可以在脉冲控制下变成稳定的, 无界系统也可以在脉冲控制下变成有界的。

1 模型和预备知识

令 E_n 表示 n 维的单位矩阵, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbf{R}_+ = [0, \infty)$ 。令 \mathbf{C}^n 表示 n 维复数向量, $\|\cdot\|$ 表示各个分量模的平方和的算术平方根。如果 \mathbf{A} 是一个向量或者矩阵, 它的转置记为 \mathbf{A}^T 。令 $N_{[a,b]} = \{a, a+1, \dots, b\}$, 其中 $a < b$, 且 a 和 b 都是整数。 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 分别表示对应矩阵的最小特征值和最大特征值。 \otimes 表示两个矩阵的 Kronecker 乘积。最终有界: 当 $t \rightarrow +\infty$, $\|x\|$ 小于一个有界的数。

考虑一个包含不同动态节点具有分布时滞的非自治复值复杂网络, 即

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_k(t)) + \sum_{j=1}^N c_{kj}(t) \mathbf{A} \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_j(t-v) dv, k \in N_{[1,l]} \\ \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_k(t)) + \sum_{j=1}^N c_{kj}(t) \mathbf{A} \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_j(t-v) dv, k \in N_{[l+1,N]} \end{cases} \quad (1)$$

其中: $\mathbf{x}_k(t) = (x_{k1}(t), x_{k2}(t), \dots, x_{kn}(t))^T \in \mathbf{C}^n$ 代表第 k 个节点在 t 时刻的状态向量; $\mathbf{f}, \mathbf{g}: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ 是一个连续的非线性向量值函数; $\mathbf{A} = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是内在耦合矩阵, $a_i \in \mathbf{R}$; $\tau > 0$; q 为一个连续的函数, $q: [0, \tau] \rightarrow [0, +\infty]$; $\int_0^\tau q(v) dv = 1$; $\mathbf{C}(t) = (c_{kj}(t)) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是耦合矩阵, 表示系统的拓扑结构和耦合强度。如果节点 k 对节点 j 有影响 ($k \neq j$), 那么 $c_{kj}(t) \neq 0$, 否则 $c_{kj}(t) = 0$ 。

为了达到系统 (1) 最终有界, 设计脉冲控制器为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_k(t)) + \sum_{j=1}^N c_{kj}(t) \mathbf{A} \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_j(t-v) dv, k \in N_{[1,l]}, t \neq t_m, \\ \dot{\mathbf{x}}_k(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}_k(t)) + \sum_{j=1}^N c_{kj}(t) \mathbf{A} \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_j(t-v) dv, k \in N_{[l+1,N]}, t \neq t_m, \\ \mathbf{x}_k(t_m^+) = (1 + \eta(t_m)) \mathbf{x}_k(t_m^-), t = t_m. \end{cases} \quad (2)$$

其中: $k = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots$; 脉冲时刻 t_m 满足 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < \dots$, 并且 $m \rightarrow \infty$, $t_m \rightarrow \infty$ 。 $\mathbf{x}_k(t_m^+) = \lim_{t \rightarrow t_m^+} \mathbf{x}_k(t)$, $\mathbf{x}_k(t_m^-) = \lim_{t \rightarrow t_m^-} \mathbf{x}_k(t)$ 。系统 (2) 的所有解在每一个 t_m 时刻都是左连续, 说明 $\mathbf{x}_k(t_m^-) = \mathbf{x}_k(t_m)$ 。 $\eta(t_m)$ 是 $t = t_m$ 时刻的脉冲。若 $t \neq t_m$, 有 $\eta(t) = 0$ 。

假设 1 存在一个正的函数 $L_1(t)$ 、 $L_2(t)$ 和正数 J_1 、 J_2 , 使得 $\mathbf{x}_k^T(t) \overline{f(t, \mathbf{x}_k(t))} + \mathbf{f}^T(t, \mathbf{x}_k(t)) \overline{\mathbf{x}_k(t)} \leq L_1(t) [\mathbf{x}_k^T(t) \overline{\mathbf{x}_k(t)} + J_1]$, $\mathbf{x}_k^T(t) \overline{g(t, \mathbf{x}_k(t))} + \mathbf{g}^T(t, \mathbf{x}_k(t)) \overline{\mathbf{x}_k(t)} \leq L_2(t) [\mathbf{x}_k^T(t) \overline{\mathbf{x}_k(t)} + J_2]$ 。对于任意 $\mathbf{x}_k(t)$, $f(t, \mathbf{x}_k(t))$ 、 $g(t, \mathbf{x}_k(t)) \in \mathbf{C}^n$ 成立, 且 $t > 0$ 。

注 1 由假设 1, 就有 $\sum_{k=1}^l [\mathbf{x}_k^T(t) \overline{f(t, \mathbf{x}_k(t))} + \mathbf{f}^T(t, \mathbf{x}_k(t)) \overline{\mathbf{x}_k(t)}] + \sum_{k=l+1}^N [\mathbf{x}_k^T(t) \overline{g(t, \mathbf{x}_k(t))} + \mathbf{g}^T(t, \mathbf{x}_k(t)) \overline{\mathbf{x}_k(t)}] \leq L(t) \mathbf{x}^T(t) \overline{\mathbf{x}(t)} + NJ$ 。当假设 1 中的 \mathbf{x} 、 \mathbf{f} 、 \mathbf{g} 都取实数, 那么可以得到与文献 [20] ($h(t) = 1, \mathbf{P} = \mathbf{E}$) 中假设 2.1 相同的结果。其中: $L(t) = \max\{L_1(t), L_2(t)\}$; $J = \max\{J_1, J_2\}$; $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t), \dots, \mathbf{x}_N^T(t))^T$ 。

假设 2 $\lambda_{\max}((\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})(\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})^T) \leq \alpha L(t)$, 其中 α 为正实数 (由式子的形式可知 $\lambda_{\max}((\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})(\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})^T)$ 大于 0)。

2 主要结果及其证明

令 $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t), \dots, \mathbf{x}_N^T(t))^T$, $\tau_m = t_m - t_{m-1}$ 是脉冲区间。 $\Omega(t) = (1 + \alpha)L(t) + 1$, 由 $L(t)$ 的定义可知, $\Omega(t)$ 为正数。系统 (2) 在每一个脉冲时刻 t_m 都是不连续的。 $\delta(t) = (1 + \eta(t))^2$, $\delta(t_l) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \delta(t_m)$ 。由 $\eta(t)$ 的定义可知, 当 $t \neq t_m$ 时, $\delta(t) = 1$ 。 $K(t, v)$ 表示在区间 $(t - v, t)$ 中不连续的点的下标。 $K(t, v) = \{m | t - v < t_m < t, t > 0, v \in [0, \tau], m = 1, 2, \dots\}$ 。令 $K_{\min}(t, v)$ 和 $K_{\max}(t, v)$ 分别表示 $K(t, v)$ 中最小和最大的值。

定理 1 设假设 1、假设 2 成立, 如果存在 $\xi > 1$, 使得

$$\ln(\xi \delta(t_m)) + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \Omega(s) ds < 0, m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

成立, 那么系统 (2) 可以达到全局最终有界。

证明 考虑以下的 Lyapunov 函数。当 $t \in (t_{m-1}, t_m]$ ($m = 1, 2, \dots$) 时,

$$V(x(t)) = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k^T(t) \overline{\mathbf{x}_k(t)} + \delta(t) \sum_{k=1}^N \int_0^\tau q(v) \left[\int_{t-v}^{t_{\min}(t,v)} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds + \sum_{p=K_{\min}(t,v)}^{K_{\max}(t,v)-1} \int_{t_p^+}^{t_{p+1}^+} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds + \int_{t_{K_{\max}(t,v)}^+}^t \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds \right] dv. \quad (4)$$

当 $t \in (t_{m-1}, t_m)$ 、 $\delta(t) = 1$ 时, 由式 (4) 可得

$$V(x(t)) = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k^T(t) \overline{\mathbf{x}_k(t)} + \sum_{k=1}^N \int_0^\tau q(v) \left[\int_{t-v}^{t_{\min}(t,v)} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds + \sum_{p=K_{\min}(t,v)}^{K_{\max}(t,v)-1} \int_{t_p^+}^{t_{p+1}^+} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds + \int_{t_{K_{\max}(t,v)}^+}^t \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds \right] dv. \quad (5)$$

$V(x(t))$ 沿着系统 (2) 求导, 当 $t \in (t_{m-1}, t_m)$ 时, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{k=1}^l [\mathbf{x}_k^T(t) \overline{f(t, \mathbf{x}_k(t))} + \overline{f^T(t, \mathbf{x}_k(t))} \mathbf{x}_k(t)] + \sum_{k=l+1}^N [\mathbf{x}_k^T(t) \overline{g(t, \mathbf{x}_k(t))} + \overline{g^T(t, \mathbf{x}_k(t))} \mathbf{x}_k(t)] \\ &+ \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N [\mathbf{x}_k^T(t) c_{kj}(t) \mathbf{A} \int_0^\tau q(v) \overline{\mathbf{x}_j(t-v)} dv + c_{kj}(t) \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_j^T(t-v) dv \mathbf{A} \overline{\mathbf{x}_k(t)}] + \\ &\sum_{k=1}^N \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_k^T(t) \overline{\mathbf{x}_k(t)} dv - \sum_{k=1}^N \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_k^T(t-v) \overline{\mathbf{x}_k(t-v)} dv. \end{aligned} \quad (6)$$

由假设 1 和式 (6) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq L(t) \left[\sum_{k=1}^N (\mathbf{x}_k^T(t) \overline{\mathbf{x}_k(t)} + J) \right] + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N [\mathbf{x}_k^T(t) c_{kj}(t) \mathbf{A} \int_0^\tau q(v) \overline{\mathbf{x}_j(t-v)} dv + \\ &c_{kj}(t) \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_j^T(t-v) dv \mathbf{A} \overline{\mathbf{x}_k(t)}] + \sum_{k=1}^N \mathbf{x}_k^T(t) \overline{\mathbf{x}_k(t)} - \sum_{k=1}^N \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}_k^T(t-v) \overline{\mathbf{x}_k(t-v)} dv = \\ &L(t) (\mathbf{x}^T(t) \overline{\mathbf{x}(t)} + NJ) + \int_0^\tau q(v) [\mathbf{x}^T(t) (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A}) \overline{\mathbf{x}(t-v)} + \\ &\mathbf{x}^T(t-v) (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})^T \overline{\mathbf{x}(t)}] dv + \mathbf{x}^T(t) \overline{\mathbf{x}(t)} - \int_0^\tau q(v) \mathbf{x}^T(t-v) \overline{\mathbf{x}(t-v)} dv. \end{aligned} \quad (7)$$

对于任意的复向量 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} , 有不等式 $\mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}} + \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}^T \bar{\mathbf{y}}$ 成立, 所以有

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A}) \overline{\mathbf{x}(t-v)} + \mathbf{x}^T(t-v) (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})^T \overline{\mathbf{x}(t)} &\leq \mathbf{x}^T(t) (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A}) \\ (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})^T \overline{\mathbf{x}(t)} + \mathbf{x}^T(t-v) \overline{\mathbf{x}(t-v)} &\leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A}) (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})^T \mathbf{x}^T(t) \overline{\mathbf{x}(t)} + \\ \mathbf{x}^T(t-v) \overline{\mathbf{x}(t-v)} &\leq \alpha L(t) \mathbf{x}^T(t) \overline{\mathbf{x}(t)} + \mathbf{x}^T(t-v) \overline{\mathbf{x}(t-v)}. \end{aligned} \quad (8)$$

由式 (8) 可得

$$\int_0^{\tau} q(v) [\mathbf{x}^T(t) (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A}) \overline{\mathbf{x}(t-v)} + \mathbf{x}^T(t-v) (\mathbf{C}(t) \otimes \mathbf{A})^T \overline{\mathbf{x}(t)}] dv \leq \alpha L(t) \mathbf{x}^T(t) \overline{\mathbf{x}(t)} + \int_0^{\tau} q(v) \mathbf{x}^T(t-v) \overline{\mathbf{x}(t-v)} dv. \quad (9)$$

由式 (4)、式 (6)、式 (9) 及定理条件, 可得

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq (L(T) + \alpha L(t) + 1) \mathbf{x}^T(t) \overline{\mathbf{x}(t)} + L(t) NJ \leq [(\alpha + 1)L(t) + 1] V(\mathbf{x}(t)) + L(t) NJ = \Omega(t) V(\mathbf{x}(t)) + L(t) NJ. \quad (10)$$

对式 (10) 由 t_{m-1} 到 t 进行积分可得

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_{m-1}^+)) \exp\left(\int_{t_{m-1}}^t \Omega(s) ds\right) + NJ \int_{t_{m-1}}^t L(s) \exp\left(\int_s^t \Omega(\zeta) ds\right) ds, t \in (t_{m-1}, t_m). \quad (11)$$

式 (4) 中令 $t = t_m$, 可得

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t_m^+)) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{x}^T(t_m^+) \overline{\mathbf{x}(t_m^+)} + \delta(t_m) \sum_{k=1}^N \int_0^{\tau} q(v) \left[\int_{t_m^+-v}^{t_{\bar{K} \min(t,v)}^+} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds + \right. \\ &\quad \left. \sum_{p=K \min(t,v)}^{K \max(t,v)-1} \int_{t_p^+}^{t_{\bar{p}+1}^-} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds + \int_{t_{\bar{K} \max(t,v)}^+}^{t_m^+} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds \right] dv = (1 + \eta(t_m))^2 \\ &\quad \sum_{k=1}^N \mathbf{x}^T(t_m^-) \overline{\mathbf{x}(t_m^-)} + \delta(t_m) \sum_{k=1}^N \int_0^{\tau} q(v) \left[\int_{t_m^- - v}^{t_{\bar{K} \min(t,v)}^-} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds + \right. \\ &\quad \left. \sum_{p=K \min(t,v)}^{K \max(t,v)-1} \int_{t_p^+}^{t_{\bar{p}+1}^-} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds + \int_{t_{\bar{K} \max(t,v)}^+}^{t_m^+} \mathbf{x}_k^T(s) \overline{\mathbf{x}_k(s)} ds \right] dv = \delta(t_m) V(\mathbf{x}(t_m)). \end{aligned} \quad (12)$$

当 $m=1$ 、 $t \in (t_0, t_1)$ 时, 由式 (11) 可得

$$V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^t \Omega(s) ds\right) + NJ \int_{t_0}^t L(s) \exp\left(\int_s^t \Omega(\zeta) d\zeta\right) ds. \quad (13)$$

当 $m=2$ 、 $t \in (t_1, t_2)$ 时, 由式 (12) 可得

$$V(\mathbf{x}(t_1^+)) \leq \delta(t_1) V(\mathbf{x}(t_0)) \exp\left(\int_{t_0}^{t_1} \Omega(s) ds\right) + \delta(t_1) NJ \int_{t_0}^{t_1} L(s) \exp\left(\int_s^{t_1} \Omega(\zeta) d\zeta\right) ds. \quad (14)$$

由式 (11)、式 (14) 可得

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t)) &\leq V(\mathbf{x}(t_0)) \delta(t_1) \exp\left(\int_{t_0}^t \Omega(s) ds\right) + \exp\left(\int_{t_1}^t \Omega(s) ds\right) \delta(t_1) \\ &\quad NJ \int_{t_0}^{t_1} L(s) \exp\left(\int_s^{t_1} \Omega(\zeta) d\zeta\right) ds + NJ \int_{t_1}^t L(s) \exp\left(\int_s^{t_1} \Omega(\zeta) d\zeta\right) ds. \end{aligned}$$

总之, 当 $t \in (t_m, t_{m+1})$ 、 $m \in N$ 时, 有

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t)) &\leq V(\mathbf{x}(t_0)) \prod_{i=1}^m \delta(t_i) \exp\left(\int_{t_0}^t \Omega(s) ds\right) + \sum_{j=1}^m \prod_{i=j}^m \delta(t_i) NJ \exp\left(\int_{t_j}^t \Omega(s) ds\right) \\ &\quad \int_{t_{j-1}}^t L(s) \exp\left(-\int_{t_j}^s \Omega(\zeta) d\zeta\right) ds + NJ \int_{t_m}^t L(s) \exp\left(\int_s^{t_1} \Omega(\zeta) d\zeta\right) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

由 $L(s) \leq \Omega(s)$, 有

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t)) &\leq V(\mathbf{x}(t_0)) \prod_{i=1}^m \delta(t_i) \exp\left(\int_{t_0}^t \Omega(s) ds\right) + \sum_{j=1}^m \prod_{i=j}^m \delta(t_i) NJ \exp\left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Omega(s) ds\right) \int_{t_{j-1}}^t \Omega(s) e^{-\int_{t_j}^s \Omega(\zeta) d\zeta} ds + \\ &\quad NJ \int_{t_m}^t \Omega(s) \exp\left(\int_s^{t_1} \Omega(\zeta) d\zeta\right) ds \leq V(\mathbf{x}(t_0)) \prod_{i=1}^m \delta(t_i) \exp\left(\int_{t_0}^t \Omega(s) ds\right) + \sum_{j=1}^m \prod_{i=j}^m \delta(t_i) \\ &\quad NJ (\exp\left(\int_{t_{j-1}}^t \Omega(s) ds\right) - \exp\left(\int_{t_j}^s \Omega(s) ds\right)) + NJ (\exp\left(\int_{t_m}^t \Omega(s) ds\right) - 1) \leq V(\mathbf{x}(t_0)) \prod_{i=1}^m \delta(t_i) \\ &\quad \exp\left(\int_{t_{i-1}}^t \Omega(s) ds\right) \exp\left(\int_{t_m}^t \Omega(s) ds\right) + \sum_{j=1}^m \prod_{i=j}^m \delta(t_i) NJ \exp\left(\int_{t_{i-1}}^{t_j} \Omega(s) ds\right) \exp\left(\int_{t_m}^t \Omega(s) ds\right) \end{aligned}$$

$$(1 - \exp(-\int_{t_{j-1}}^{t_j} \Omega(s) ds)) + NJ(\exp(\int_{t_m}^t \Omega(s) ds) - 1). \quad (16)$$

由式 (3) 可得 $\delta(t_m) e^{\int_{t_{m-1}}^{t_m} \Omega(s) ds} < 1/\xi$ 或者 $e^{\int_{t_{m-1}}^{t_m} \Omega(s) ds} < 1/(\delta(t_m)\xi)$, $m \in N$, 式 (16) 可缩为

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(t_0))(1/\xi)^m(1/(\delta(t_{m+1})\xi)) + \sum_{j=1}^m (1/\xi)^{m-j+1}(1/(\delta(t_{m+1})\xi)) \\ NJ(1 - \delta(t_j)\xi) + NJ(1/(\delta(t_{m+1})\xi) - 1) &\leq V(x(t_0))(1/\xi)^m(1/(\delta(t_l)\xi)) + \\ (\xi/(\xi - 1))(1/(\delta(t_l)\xi) - 1)NJ. \end{aligned} \quad (17)$$

由式 (4) 和式 (17) 可得

$$\|x\|^2 \leq V(x(t)) \leq V(x(t_0))(1/\xi)^m(1/(\delta(t_l)\xi)) + (\xi/(\xi - 1))(1/(\delta(t_l)\xi) - 1)NJ. \quad (18)$$

M_1 由

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_0^\tau q(v) [\int_{t_0-v}^{t_{\bar{K}_{\min}(t_0,v)}} x_k^T(s) \overline{x_k(s)} ds + \sum_{p=K_{\min}(t,v)}^{K_{\max}(t,v)-1} \int_{t_p^+}^{t_{(p+1)}^-} x_k^T(s) \overline{x_k(s)} ds + \\ \int_{t_{\bar{K}_{\max}(t_0,v)}}^{t_0} x_k^T(s) \overline{x_k(s)} ds] dv \leq \int_0^\tau q(v) [\int_{t_0-v}^{t_0} x_k^T(s) \overline{x_k(s)} ds] dv \leq \tau \|x(t_0)\|^2 = M_1 \end{aligned} \quad (19)$$

给出。

由式 (5) 可得

$$\begin{aligned} V(x(t_0)) &= \sum_{k=1}^N x_k^T(t_0) \overline{x_k(t_0)} + \sum_{k=1}^N \int_0^\tau q(v) [\int_{t_0-v}^{t_{\bar{K}_{\min}(t_0,v)}} x_k^T(s) \overline{x_k(s)} ds + \\ \sum_{p=K_{\min}(t_0,v)}^{K_{\max}(t_0,v)-1} \int_{t_p^+}^{t_{(p+1)}^-} x_k^T(s) \overline{x_k(s)} ds + \int_{t_{\bar{K}_{\max}(t_0,v)}}^{t_0} x_k^T(s) \overline{x_k(s)} ds] dv &\leq \|x(t_0)\|^2 + M_1 \leq M. \end{aligned} \quad (20)$$

由式 (18)、式 (20) 可得 $\|x(t)\| \leq \sqrt{M(1/\xi)^m(1/(\delta(t_l)\xi)) + (\xi/(\xi - 1))(1/(\delta(t_l)\xi) - 1)NJ}$, 其中 $\xi > 1$ 且 $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty$, 有 $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \sqrt{(\xi/(\xi - 1))(1/(\delta(t_l)\xi) - 1)NJ}$.

推论 1 若假设 1、假设 2 以及式 (3) 成立, 且 $J = 0$, 那么脉冲控制下系统 (2) 是全局渐进稳定的。

注 2 本文的定理允许无脉冲系统是不稳定或者无界的, 因为 V 函数的导数不一定小于 0。这个结果说明, 不仅是不稳定的系统可以在脉冲控制下变成稳定的系统, 而且无界的系统也可以在脉冲控制下变成有界的系统。

3 数值模拟结果

考虑带有以下参数的系统 (2): $f(t, x_k(t)) = (2 + \sin t)(2x_{k_2}(t)x_{k_3}(t)/(2x_{k_1}(t)) - 2x_{k_1}(t)x_{k_3}(t) + 1/(2x_{k_2}(t)), 2x_{k_1}(t)x_{k_2}(t) + 1/(2x_{k_3}(t)))^T$, $k = 1, 2, 3$; $g(t, x_k(t)) = (2 + \sin t)(1/(2x_{k_1}(t)), \tan h(x_{k_2}(t) + 1/(2x_{k_2}(t))), x_{k_3}(t)\cos(x_{k_3}(t)) + 1/(2x_{k_3}(t)))^T$, $k = 4, 5, 6, 7$, 其中 $x_k(t) = (x_{k_1}(t), x_{k_2}(t), x_{k_3}(t))^T$, $x_{k_1}(t)$ 为复数, $x_{k_2}(t)$ 为实数, $x_{k_3}(t)$ 为实数。

$$\text{设 } \tau = 2, \quad q(v) = 1/\tau, \quad C(t) = \sqrt{2(2 + \sin t)} \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$ 。通过计算得到, 1) $\mathbf{x}_k^T(t) \overline{f(t, x_k(t))} + \overline{f^T(t, x_k(t))} x_k(t) \leq 2(2 + \sin t)$

$[\mathbf{x}_k^T(t) \overline{x_k(t)} + 1], k = 1, 2, 3, \mathbf{x}_k^T(t) \overline{g(t, x_k(t))} + \overline{g^T(t, x_k(t))} x_k(t) \leq 2(2 + \sin t)[\mathbf{x}_k^T(t) \overline{x_k(t)} + 1.5], k = 4, 5, 6, 7$ (可知满足假设 1, 即 $L(t) = 2(2 + \sin t), J = 1.5$); 2) $\lambda_{\max}((C(t) \otimes A)(C(t) \otimes A)^T) \leq 5.8468L(t)$ (满足假设 2); 3) 根据定理 1, 设计了一个简单的脉冲 $\eta(t_m) = e^{-1} - 1$, 那么就有 $\delta(t_m) = \delta(t_l) = (1 + e^{-1} - 1)^2 = e^{-2}$, 此时令 $\xi = e, t_m = t_{m-1} + 0.004$, 有 $\ln(\xi\delta(t_m)) + \int_{t_{m-1}}^{t_m} \Omega(s) ds < -1 + ((5.8468 + 1) \times 6 + 1) \times 0.004 = -0.8317 < 0$ 。满足假设 1、假设 2, 以及式 (3), 所以由定理 1 可知, 系统 (2) 是全局最终有界的, 并且将有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{(\xi/(\xi - 1))((1/(\delta(t_l)\xi)) - 1)NJ} = 5.3425$ 成立。

图 1 描述的是例子中系统 (2) 的状态轨迹, 因为取的是复数, 所以把每一个 x_k 的实部和复部分别画出, 放在同一个图形中, 形成三维的图形。图 2 描述的是 $\|\mathbf{x}(t)\|$ 的轨迹。图 1 和图 2 表明了系统 (2) 是全局最终有界的, 并且它的轨迹会收敛于集合 $S = \{x \in C^{3 \times 7} \mid \|\mathbf{x}(t)\| \leq 5.3425\}$ 。

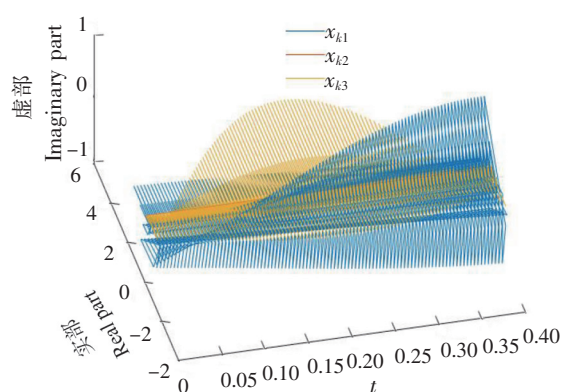


图 1 系统(2) 的状态轨迹
Fig.1 State trajectories of system (2)

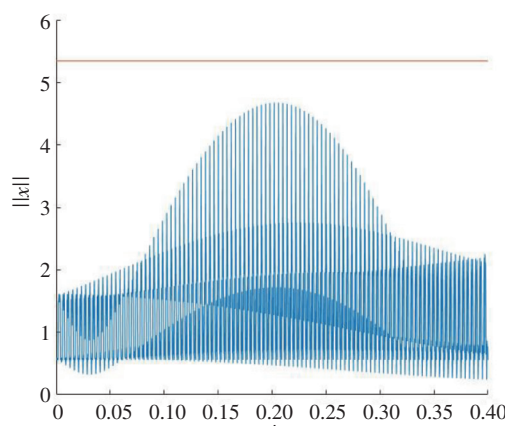


图 2 系统(2) 的 ||x|| 的轨迹
Fig.2 Behavior of ||x|| of system

注 3 由于本文数值模拟取的状态向量 $\mathbf{x}_i(t)$ 是复向量, 所以仿真结果与文献 [20] 相比波动更大, 但 $\|\mathbf{x}\|$ 都会在一个有限的界之下。

4 结论

本文基于脉冲控制和 Lyapunov 方法对具有分布时滞耦合的网络进行研究, 得到了非自治复值复杂网络最终有界性的条件, 并给出相应的上界, 最后通过数值模拟说明所得结果的准确性。同时, 本文的主要结果没有限制 Lyapunov 函数的导数是负定的, 因此该方法可以应用到更大的一类复值系统上。

[参考文献]

- [1] 胡军, 王雨桐, 何欣蔚, 等. 基于复杂网络的全球航空网络结构分析与应用[J]. 计算机科学, 2021, 48(增刊 1): 5.
- [2] 梁力伟, 丁长松. 复杂网络在中医药领域应用研究进展[J]. 中国中医药信息杂志, 2020, 315(10): 136-141.
- [3] CHU C C, LU H C. Complex networks theory for modern smart grid applications: A survey[J]. IEEE Journal on Emerging, 2017, 7(2): 177-191. DOI:10.1109/JETCAS.2017.2692243.
- [4] SERGIOU C, LESTAS M, ANTONIOU P, et al. Complex systems: a communication networks perspective towards 6G[J]. IEEE Access, 2020(99): 1. DOI:10.1109/ACCESS.2020.2993527.
- [5] LU J, CHEN G. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria[J]. IEEE Trans-

- actions on Automatic Control, 2005, 50(6): 841-846. DOI:10.1109/TAC. 2005. 849233.
- [6] 仇建平, 陈立潮, 潘理虎. 牵制控制下复杂网络的同步性研究[J]. 智能系统学报, 2014, 9(6): 734-739.
- [7] ZHANG Q, LU J, LU J, et al. Adaptive feedback synchronization of a general complex dynamical network with delayed nodes [J]. International Journal of Distributed Sensor Networks, 2013, 44(2): 996-1003. DOI:10.1155/2013/974132.
- [8] 李蕾. 时滞非线性复杂动态网络的牵引自适应控制同步性[J]. 廊坊师范学院学报(自然科学版), 2021, 21(2): 60-63.
- [9] HU J, WANG J. Global stability of complex-valued recurrent neural networks with time-delays[J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2012, 23(6): 853. DOI:10.1109/TNNLS. 2012. 2195028.
- [10] YUAN W J, LUO X S, JIANG P Q, et al. Stability of a complex dynamical network model[J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2007, 374(1): 478-482. DOI:10.1016/j.physa. 2006. 07. 001.
- [11] YUAN W J, LUO X S, JIANG P Q, et al. Stability of two typical complex dynamical networks[J]. International Journal of Modern Physics B, 2008, 22(5): 553-560. DOI:10.1142/S0217979208038752.
- [12] 巩长忠, 张瑜. 基于牵制控制的变时滞复杂网络自适应同步[J]. 渤海大学学报(自然科学版), 2014, 35(4): 336-341.
- [13] 马益聪, 白亚丽. 基于自适应牵制控制的时变时滞复杂网络同步[J]. 盐城工学院学报(自然科学版), 2020, 33(4): 30-35.
- [14] 万佑红. 基于状态反馈控制的无线网络传输控制及拓扑辨识研究[D]. 南京: 南京邮电大学, 2010.
- [15] TAN J, LI C D. Finite-time stability of neural networks with impulse effects and time-varying delay[J]. Neural Processing Letters, 2016, 46(1): 29-39. DOI:10.1007/s11063-016-9570-6.
- [16] CHEN L P, HAN Z Z, MA Z H. Exponential stability for impulsive stochastic nonlinear network systems with time delay[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014: 1-5. DOI:10.1155/2014/787568.
- [17] WANG J L, WU H N. Stability analysis of impulsive parabolic complex networks[J]. Chaos Solitons Fractals, 2011, 44(11): 1020-1034. DOI:10.1016/j.chaos. 2011. 08. 005.
- [18] GAO B. Memory event-triggered output feedback synchronization control for complex dynamic network with bounded distributed delays[J]. Journal of Advances in Applied Mathematics, 2021, 6(2): 89-111. DOI:10.22606/JAAM. 2021. 62004.
- [19] YANG Z, LIAO X F. Invariant and attracting sets of complex-valued neural networks with both time-varying and infinite distributed delays[J]. Neural Processing Letters, 2019, 49: 1201-1215. DOI:10.1007/s11063-018-9848-y.
- [20] HE D H, XU L G. Ultimate boundedness of nonautonomous dynamical complex networks under impulsive control[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, II. Express Briefs, 2015, 62(10): 997-1001. DOI:10.1109/TCSII. 2015. 2436191.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)