

[引用格式] 何咏晖, 陈景华, 刘欣然. 时间分数阶反应-扩散方程的高阶数值方法[J] 集美大学学报, 2026, 31(2): 240-252. DOI:10.19715/j.jmuzr.2026.02.11

时间分数阶反应-扩散方程的高阶数值方法

何咏晖¹, 陈景华^{1,2}, 刘欣然¹

(1. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021;

2. 数字福建大数据建模与智能计算研究所, 福建 厦门 361021)

[摘要] 本文提出了一种求解 Caputo 时间分数阶反应扩散方程的高阶数值方法。对 Caputo 时间分数阶数采用 L2 插值逼近离散, 对空间二阶导数采用中心差分离散, 从而构造方程的数值离散格式; 并证明了该数值格式是无条件稳定的, 且收敛阶为 $O(\tau^{3-\alpha} + h^2)$ ($0 < \alpha < 1$); 同时给出一个数值算例, 验证该数值格式具有稳定性和收敛性。

[关键词] 分数阶; 反应-扩散方程; L2 格式; 有限差分; 稳定性; 收敛性

[中图分类号] O 241.82 [文章编号] 1007-7405(2026)02-0240-13 DOI:10.19715/j.jmuzr.2026.02.11

Higher-Order Numerical Method for Time-Fractional Reaction-Diffusion Equation

HE Yonghui¹, CHEN Jinghua^{1,2}, LIU Xinran¹

(1. School of Sciences, Jimei University, Xiamen 361021, China;

2. Digital Fujian Big Data Modeling and Intelligent Computing Institute, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, a high order numerical method for solving time-fractional diffusion equations is presented. The time-fractional derivative of Caputo is discretized using the L2 interpolation approximation, and the second-order spatial derivative is discretized by the central difference scheme, thus constructing the numerical discrete scheme for the equation. It is proved that the numerical scheme is unconditionally stable and has a second-order convergence rate $O(\tau^{3-\alpha} + h^2)$ ($0 < \alpha < 1$). A numerical example is given to verify the stability and convergence of the scheme.

Keywords: fractional; reaction-diffusion equation; L2 scheme; finite difference; stability; convergence

0 引言

分数阶微分算子是拟微分算子, 具有非局部性, 因此含分数阶导数的偏微分方程是研究非线性问题的一个强有力的工具。这类方程应用于许多科学领域, 如物理^[1]、工程^[2]、金融^[3]、生物^[4]等。本文研究时间分数阶反应-扩散方程。

[收稿日期] 2024-03-19

[基金项目] 福建省自然科学基金项目 (2024J01724, 2024J01119); 福建省高校数学学科联盟其他高校项目 (2024SXLMS03); 数字福建大数据建模与智能计算研究所开放基金

[通信作者] 陈景华, 副教授, 从事分数阶偏微分方程数值解研究, E-mail: cjhdzdz@163.com

迄今为止, 关于时间分数阶扩散方程的数值方法已有较多的成果, 但时间上高于二阶收敛的文献还比较少。2006 年, Sun 等^[5]提出用有限差分法求解时间分数阶扩散方程, 时间上采用 $2 - \alpha$ 阶 ($\alpha \in (0, 1)$) 的 L1 有限差分离散格式, 空间上对二阶导数采用二阶中心差分格式, 并证明了该方法的稳定性和收敛性。此后, 学者开始尝试设计和分析求解分数阶扩散方程的高阶数值方法, 对方程进行变形处理。2011 年, Zhang 等^[6]提出了求解具有时间分数阶导数的二维反常次扩散方程的有限差分方法, 得到空间二阶精度、时间 $\min\{1 + \alpha, 2 - \alpha\}$ 阶 ($\alpha \in (0, 1)$) 精度的数值格式, 并证明了数值格式的稳定性和收敛性。2012 年, Sun 等^[7]提出了求解变阶时间分数扩散方程的有限差分方法, 时间上对变分数阶导数做离散, 收敛阶达到一阶; 空间上对二阶导数的逼近讨论了中心差分格式和 Crank-Nicolson 格式, 两种格式均为二阶收敛。2015 年, Alikhanov^[8]构造了 $L2 - 1_\sigma$ 格式, 用于求解非线性变系数时间分数阶扩散方程, 时间上达到二阶收敛, 并利用能量分析法证明了该格式的稳定性与收敛性。2016 年, Lv 等^[9]提出了求解时间分数阶扩散方程更高阶的数值方法, 时间上采用 L2 格式, 收敛阶为 $3 - \alpha$ 阶 ($\alpha \in (0, 1)$), 并证明了该格式的收敛性和稳定性; 空间上采用谱方法, 并给出了误差估计。本文在文献 [9] 的基础上进一步研究了时间分数阶反应-扩散方程。该方程是文献 [9] 中方程的推广。本文在时间上对分数阶导数采用 L2 格式, 达到 $3 - \alpha$ 阶 ($\alpha \in (0, 1)$) 精度; 空间上对二阶导数采用二阶中心差分格式, 并分析了该格式的稳定性与收敛性, 最后利用数值算例验证格式的有效性。

1 差分格式的建立

本文主要考虑如下时间分数阶反应-扩散方程的初边值问题:

$${}_0^CD_t^\alpha u(x,t) + u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), x \in (0,L), t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u(x,0) = \phi(x), x \in [0,1], \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu(t), u(1,t) = \gamma(t), t \in (0,T]. \tag{3}$$

其中: $f(x,t)$ 是源项; $\phi(x)$ 、 $\mu(t)$ 、 $\gamma(t)$ 为已知函数, 且 $\phi(0)=\mu(0), \phi(1)=\gamma(0)$, $0 < \alpha < 1$; ${}_0^CD_t^\alpha u(x,t)$ 为 α 阶左侧 Caputo 分数阶导数。

为了证明稳定性和收敛性的简洁性, 又不失一般性, 下文做稳定性收敛性分析时, 仅考虑 $f=0$ 的情形。即

$${}_0^CD_t^\alpha u(x,t) + u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, x \in (0,L), t \in (0,T], \tag{4}$$

$$u(x,0) = \phi(x), x \in [0,L], \tag{5}$$

$$u(0,t) = \mu(t), u(1,t) = \gamma(t), t \in (0,T]. \tag{6}$$

取正整数 m 、 n 。设空间步长 $h = L/m$, 时间步长 $\tau = T/n$ 。记 $x_i = ih (0 \leq i \leq m)$, $t_k = k\tau (0 \leq k \leq n)$, 空间区域 $\Omega_h = \{x_i \mid 0 \leq i \leq m\}$, 时间区域 $\Omega_\tau = \{t_k \mid 0 \leq k \leq n\}$, $\Omega_{h\tau} = \Omega_h \times \Omega_\tau$ 。定义如下网格函数空间: $U_h = \{u \mid u = (u_0, u_1, \cdots, u_m)\}$, $\dot{U}_h = \{u \mid u \in U_h,$

$u_0 = u_m = 0$ 。对于任意网格函数 $u \in U_h$, 引进如下记号: $\delta_x u_{i-\frac{1}{2}} = (u_i - u_{i-1})/h, \delta_x^2 u_i = (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2$ 。定义 $\Omega_{h\tau}$ 上的网格函数 $U = \{U_i^k \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n\}$ 。其中 $U_i^k = u(x_i, t_k)$ 。另外记 $\psi_i = \psi(x_i)$ 。在结点 (x_i, t_k) 处考虑微分方程式 (4), 得到

$${}_0^C D_t^\alpha u(x_i, t_k) + u(x_i, t^k) = u_{xx}(x_i, t_k), 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq n. \quad (7)$$

对式 (7) 中的时间分数阶导数采用文献 [9] 的格式进行离散, 空间二阶导数则采用二阶中心差商离散。即

$${}_0^C D_t^\alpha U_i^1 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} (U_i^1 - U_i^0) + (R_1)_i^1, k=1, \quad (8)$$

$${}_0^C D_t^\alpha U_i^k = \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)\tau^\alpha} \sum_{j=1}^{k-1} (a_j U_i^{k-j-1} + b_j U_i^{k-j} + c_j U_i^{k-j+1}) + \frac{\alpha}{2} U_i^{k-2} - 2U_i^{k-1} + \frac{4-\alpha}{2} U_i^k + (R_2)_i^k, 2 \leq k \leq n, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 U_i^k}{\partial x^2} = \partial_x^2 U_i^k + O(x^2). \quad (10)$$

其中: 式 (8)~(10) 中的系数 a_j, b_j, c_j 表达式为:

$$a_j = -\frac{3}{2}(2-\alpha)(j+1)^{1-\alpha} + \frac{1}{2}(2-\alpha)j^{1-\alpha} + (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}, \quad (11)$$

$$b_j = 2(2-\alpha)(j+1)^{1-\alpha} - 2(j+1)^{2-\alpha} + 2j^{2-\alpha},$$

$$c_j = -\frac{1}{2}(2-\alpha)[(j+1)^{1-\alpha} + j^{1-\alpha}] + (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}. \quad (12)$$

且 $(R_1)_i^1, (R_2)_i^k$ 是截断误差, 有下式成立: $|(R_1)_i^1| \leq C(\tau^{2-\alpha} + h^2), |(R_2)_i^k| \leq C(\tau^{3-\alpha} + h^2) (2 \leq k \leq n)$ 。其中 C 是与 h, τ 无关的正常数。

由此引入以下有限差分算子: ${}_0^C L_t^\alpha U_i^1 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} (U_i^1 - U_i^0), {}_0^C L_t^\alpha U_i^k = \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)\tau^\alpha} [\sum_{j=1}^{k-1} (a_j U_i^{k-j-1} + b_j U_i^{k-j} + c_j U_i^{k-j+1}) + \frac{\alpha}{2} U_i^{k-2} - 2U_i^{k-1} + \frac{4-\alpha}{2} U_i^k] (2 \leq k \leq n)$ 。则有: $(R_1)_i^1 = {}_0^C D_t^\alpha U_i^1 - {}_0^C L_t^\alpha U_i^1, (R_2)_i^k = {}_0^C D_t^\alpha U_i^k - {}_0^C L_t^\alpha U_i^k, 2 \leq k \leq n$ 。在结点 (x_i, t_k) 处考虑微分方程式 (4)~(6), 得到:

$${}_0^C L_t^\alpha U_i^k + U_i^k = \delta_x^2 U_i^k - (R_1)_i^1, 1 \leq i \leq m-1, \quad (13)$$

$${}_0^C L_t^\alpha U_i^k + U_i^k = \delta_x^2 U_i^k - (R_2)_i^k, 1 \leq i \leq m-1, 2 \leq k \leq n, \quad (14)$$

$$U_i^0 = \varphi(x_i), 1 \leq i \leq m-1, \quad (15)$$

$$U_0^k = \mu(t_k), U_m^k = \gamma(t_k), 0 \leq k \leq n. \quad (16)$$

在式 (13) 和式 (14) 中略去截断误差 $(R_1)_i^1, (R_2)_i^k$, 并用数值解 u_i^k 代替精确解 U_i^k , 可得求解问题式 (4)~(6) 的差分格式为:

$${}_0^C L_t^\alpha u_i^k + u_i^k = \delta_x^2 u_i^k, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq k \leq n, \quad (17)$$

$$U_i^0 = \varphi(x_i), 1 \leq i \leq m-1, \quad (18)$$

$$U_0^k = \mu(t_k), U_m^k = \gamma(t_k), 0 \leq k \leq n. \quad (19)$$

2 差分格式的可解性

定理 1 差分格式 (17)~(19) 是唯一可解的。

证明 记 $u^k = (u_0^k, u_1^k, \dots, u_{m-1}^k, u_m^k)$ 。由式 (17)~(19) 知第 0 层 u^0 已知。设前 k 层 $u^0, u^1, \dots, u^{k-1}$ 已唯一确定, 则由式 (17) 和式 (19) 可得关于 u^k 的线性方程组。要证明它的唯一可解性, 只需要证明它相应的齐次方程组

$$\begin{cases} (1/\tilde{\alpha}_0 + 1)u_i^1 = \delta_x^2 u_i^1, 1 \leq i \leq m-1, \\ (\beta_0/\alpha_0 + 1)u_i^k = \delta_x^2 u_i^k, 1 \leq i \leq m-1, 2 \leq k \leq n, \text{ 仅有零解。} \\ u_0^k = u_M^k = 0, \end{cases}$$

由 $\delta_x^2 u_i^k = (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k)/h^2$,

$$[h^2(1/\tilde{\alpha}_0 + 1) + 2]u_i^1 = u_{i-1}^1 + u_{i+1}^1, 1 \leq i \leq m-1, \quad (20)$$

$$[h^2(\beta_0/\alpha_0 + 1) + 2]u_i^k = u_{i-1}^k + u_{i+1}^k, 1 \leq i \leq m-1, 2 \leq k \leq n. \quad (21)$$

设 $\|u^k\|_\infty = |u_{i_k}^k|$ 。其中 $i_k \in 1, 2, \dots, m-1$ 。令 $i = i_k$, 然后在式 (20) 和式 (21)

两边取绝对值, 利用三角不等式, 可得: $[h^2(1/\tilde{\alpha}_0 + 1) + 2]\|u^1\|_\infty \leq 2\|u^1\|_\infty$, $[h^2(\beta_0/\alpha_0 + 1) + 2]\|u^k\|_\infty \leq 2\|u^k\|_\infty$ 。故 $\|u^k\|_\infty = 0$, 易知 $u^k = 0$ 。故差分格式是唯一可解的。

3 差分格式的稳定性及收敛性

3.1 差分格式的稳定性

本节采用能量分析方法证明稳定性, 首先引入一些符号来重新表示式 (17)~(19)。

令

$$\alpha_0 = \Gamma(3 - \alpha)\tau^\alpha, \tilde{\alpha}_0 = \Gamma(2 - \alpha)\tau^\alpha, \beta_0 = c_1 + 2 - \frac{\alpha}{2}, \quad (22)$$

那么将式 (17)~(19) 改写成如下等价形式:

对 $k \geq 4$, 有

$$u_i^k - \alpha_0 \beta_0^{-1} \delta_x^2 u_i^k + \alpha_0 \beta_0^{-1} u_i^k = \beta_0^{-1} \{ -(b_1 + c_2 - 2)u_i^{k-1} + (-a_1 - b_2 - c_3 - \alpha/2)u_i^{k-2} + \sum_{j=3}^{k-2} (-a_{j-1} - b_j - c_{j+1})u_i^{k-j} + (-a_{k-2} - b_{k-1})u_i^1 - a_{k-1}u_i^0 \}, 1 \leq i \leq m-1. \quad (23)$$

对 $k = 3, 2, 1$, 有:

$$u_i^3 - \alpha_0 \beta_0^{-1} \delta_x^2 u_i^3 + \alpha_0 \beta_0^{-1} u_i^3 = \beta_0^{-1} \{ -(b_1 + c_2 - 2)u_i^2 + (-a_1 - b_2 - \alpha/2)u_i^1 - a_2 u_i^0 \}, 1 \leq i \leq m-1, \quad (24)$$

$$u_i^2 - \alpha_0 \beta_0^{-1} \delta_x^2 u_i^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} u_i^2 = \beta_0^{-1} \{ -(b_1 - 2)u_i^1 + (-\alpha_1 - \frac{\alpha}{2})u_i^0 \}, 1 \leq i \leq m-1, \quad (25)$$

$$u_i^1 - \tilde{\alpha}_0 \delta_x^2 u_i^1 + \tilde{\alpha}_0 u_i^1 = u_i^0, 1 \leq i \leq m-1. \quad (26)$$

为了进一步简化符号, 引入如下系数: $d_1^2 = -(b_1 - 2)\beta_0^{-1}$, $d_0^2 = (-a_1 - \alpha/2)\beta_0^{-1}$, $d_2^3 = -(b_1 + c_2 - 2)\beta_0^{-1}$, $d_1^3 = (-a_1 - b_2 - \alpha/2)\beta_0^{-1}$, $d_0^3 = -a_2\beta_0^{-1}$ 。

对 $k \geq 4$, 有: $d_{k-1}^k = -(b_1 + c_2 - 2)\beta_0^{-1}$, $d_{k-2}^k = (-a_1 - b_2 - c_3 - \alpha/2)\beta_0^{-1}$, $d_{k-j}^k = (-a_{j-1} - b_j - c_{j+1})\beta_0^{-1}$, $j = 3, 4, \dots, k-2$; $d_1^k = (-a_{k-2} - b_{k-1})\beta_0^{-1}$, $d_0^k = -a_{k-1}\beta_0^{-1}$ 。

因此式 (23) ~ (26) 可简写成:

$$(1 + \alpha_0 \beta_0^{-1}) u_i^k - \alpha_0 \beta_0^{-1} \delta_x^2 u_i^k = \sum_{j=1}^k d_{k-j}^k u_i^{k-j}, 1 \leq i \leq m-1, 2 \leq k \leq n, \quad (27)$$

$$(1 + \tilde{\alpha}_0) u_i^1 - \tilde{\alpha}_0 \delta_x^2 u_i^1 = u_i^0, 1 \leq i \leq m-1. \quad (28)$$

在进行稳定性证明之前, 首先给出以下两个重要引理。

引理 1 对于任意 $0 < \alpha < 1$, $k \geq 2$, 式 (27) 中的系数满足:

$$\beta_0 = (1 + \frac{\alpha}{2}) 2^{1-\alpha} > 0, 0 < \alpha_0 \beta_0^{-1} < \tilde{\alpha}_0, \quad (29)$$

$$\sum_{i=1}^k d_{k-i}^k = 1, \quad (30)$$

$$\text{对 } k \geq 3, d_{k-i}^k > 0, i = 3, 4, \dots, k, \quad (31)$$

$$0 < d_{k-1}^k < 4/3, \quad (32)$$

$$-1/2 < d_{k-2}^k < 1/3, \quad (33)$$

$$\frac{1}{4} (d_{k-1}^k)^2 + d_{k-2}^k > 0. \quad (34)$$

证明 1) 由式 (12) 和式 (22), 得到 $0 < \alpha_0 \beta_0^{-1} = \tilde{\alpha}_0 (2 - \alpha) (1 + \frac{\alpha}{2})^{-1} 2^{\alpha-1} = \tilde{\alpha}_0 \times$

$$\frac{2 - \alpha}{2 + \alpha} 2^\alpha < \tilde{\alpha}_0.$$

2) 由 $d_{k-i}^k (i = 1, 2, \dots, k)$ 的定义, 例如 $k = 2$, 得到 $d_0^2 + d_1^2 = (2 - b_1 - a_1 - \frac{\alpha}{2}) \beta_0^{-1} = (2 - (2 - \alpha) 2^{2-\alpha} + 2^{3-\alpha} - 2 + \frac{3}{2} (2 - \alpha) 2^{1-\alpha} - \frac{1}{2} (2 - \alpha) - 2^{2-\alpha} + 1 - \frac{\alpha}{2}) \beta_0^{-1} = (1 + \frac{\alpha}{2}) 2^{1-\alpha} ((1 + \frac{\alpha}{2}) 2^{1-\alpha})^{-1} = 1$ 。对于 k 取其他值的情况也可类似地验证。

3) 由微分中值定理, 可得 $3^{1-\alpha} \leq 2^{1-\alpha} + (1 - \alpha) 2^{1-\alpha}$; 结合式 (10), 可得 $-a_2 = \frac{3}{2} (2 - \alpha) 3^{1-\alpha} - \frac{1}{2} (2 - \alpha) 2^{1-\alpha} - 3^{2-\alpha} + 2^{2-\alpha} = -\frac{3}{2} \alpha \cdot 3^{1-\alpha} + (1 + \frac{\alpha}{2}) 2^{1-\alpha} \geq (1 + \frac{\alpha}{2}) 2^{1-\alpha} - \frac{3}{2} \alpha [2^{1-\alpha} + (1 - \alpha) 2^{1-\alpha}] > 0$ 。因此, 有 $d_0^3 = -a_2 \beta_0^{-1} > 0$ 。

下面讨论 $d_{k-i}^k (i = 3, 4, \dots, k)$ 在 $k \geq 4$ 的情形。观察到 $-a_{i-1} - b_i - c_{i+1} = \frac{3}{2} (2 - \alpha) i^{1-\alpha} - 3i^{2-\alpha} - \frac{1}{2} (2 - \alpha) (i - 1)^{1-\alpha} + (i - 1)^{2-\alpha} - \frac{3}{2} (2 - \alpha) (i + 1)^{1-\alpha} + 3(i + 1)^{2-\alpha} + \frac{1}{2} (2 - \alpha) (i + 2)^{1-\alpha} - (i + 2)^{2-\alpha} = \frac{3}{2} (2 - \alpha) i^{1-\alpha} - 3i^{2-\alpha} - \frac{1}{2} (2 - \alpha) i^{1-\alpha} (1 - \frac{1}{i})^{1-\alpha} + i^{2-\alpha} (1 - \frac{1}{i})^{2-\alpha} - \frac{3}{2} (2 - \alpha) i^{1-\alpha} (1 + \frac{1}{i})^{1-\alpha} + 3i^{2-\alpha} (1 + \frac{1}{i})^{2-\alpha} + \frac{1}{2} (2 - \alpha) i^{1-\alpha} (1 + \frac{2}{i})^{1-\alpha} + i^{2-\alpha} (1 + \frac{2}{i})^{2-\alpha}$ 。利用泰勒公式, 可得

$$\begin{aligned} -a_{i-1} - b_i - c_{i+1} &= \frac{3}{2}(2-\alpha)i^{1-\alpha} - 3i^{2-\alpha} - \frac{1}{2}(2-\alpha)i^{1-\alpha}\left[1 - (1-\alpha)\frac{1}{i} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2!}\left(\frac{1}{i}\right)^2 - \dots\right] + i^{2-\alpha}\left[1 - (2-\alpha)\frac{1}{i} + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2!}\left(\frac{1}{i}\right)^2 - \right. \\ &\quad \left. \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)}{3!}\left(\frac{1}{i}\right)^3 + \dots\right] - \frac{3}{2}(2-\alpha)i^{1-\alpha}\left[1 + (1-\alpha)\frac{1}{i} + \frac{(2-\alpha)(-\alpha)}{2!}\right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \frac{(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)}{3!}\left(\frac{1}{i}\right)^3 + \dots\right] + 3i^{2-\alpha}\left[1 + (2-\alpha)\frac{1}{i} + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2!}\right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{i}\right)^2 + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)}{3!}\left(\frac{1}{i}\right)^3 + \dots\right] \frac{1}{2}(2-\alpha)i^{1-\alpha}\left[1 + (1-\alpha)\frac{2}{i} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2!}\left(\frac{1}{i}\right)^2 + \frac{(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)}{3!}\left(\frac{2}{i}\right)^3 + \dots\right] - i^{2-\alpha}\left[1 + (2-\alpha)\frac{2}{i} + \right. \\ &\quad \left. \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2!}\left(\frac{1}{i}\right)^2 + \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)}{3!}\left(\frac{1}{i}\right)^3 + \dots\right] = -(2-\alpha)(1-\alpha) \\ &\quad (-\alpha)i^{-\alpha-1} + \frac{1}{4!}(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)(-\alpha-3)i^{-\alpha-4} + \\ &\quad \frac{12}{6!}(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)(-\alpha-3)(-\alpha-4)i^{-\alpha-5} + \frac{1}{7!}\frac{63}{2} \\ &\quad (2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)(-\alpha-3)(-\alpha-4)(-\alpha-5)i^{-\alpha-6} + \\ &\quad \dots = -(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)i^{-\alpha-1}S_{\alpha}. \end{aligned} \tag{35}$$

其中: $S_{\alpha} = 1 - \frac{1}{4!}(-\alpha-1)(-\alpha-2)(-\alpha-3)i^{-3} - \frac{12}{6!}(-\alpha-1)(-\alpha-2)(-\alpha-3)(-\alpha-4)i^{-4} - \frac{1}{7!}\frac{63}{2}(-\alpha-1)(-\alpha-2)(-\alpha-3)(-\alpha-4)(-\alpha-5)i^{-5} + \dots \geqslant \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4!}i^{-3} - \frac{12}{6!}(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)\left(1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \dots\right)$ 。由于 $1 < 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{i}} \leqslant 3/2$, 对 $i \geqslant 3$, 得到

$$S_{\alpha} \geqslant 1 + \frac{3!}{4!}i^{-3} - \frac{12}{6!}5!i^{-4} \frac{3}{2} = i^{-4}(i^4 - 3) + \frac{1}{4}i^{-3} > 0. \tag{36}$$

结合式 (35) 和式 (36), $k \geqslant 4$ 时, 得到 $d_k^{k-i} = \frac{-a_{i-1} - b_i - c_{i+1}}{(1 + \frac{\alpha}{2})2^{1-\alpha}} > 0, i = 3, 4, \dots$,

$k - 2$ 。采用类似的方法也可得到 $d_1^k > 0, d_0^k > 0$ 。

4) $k = 2$ 时, $0 < d_1^2 = -(b_1 - 2)\beta_0^{-1} = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{2}} < \frac{2}{3} < \frac{4}{3}$ 。 $k \geqslant 3$ 时, 一方面 $d_{k-1}^k =$

$$-(b_1 + c_2 - 2)\beta_0^{-1} = \frac{(3 + \frac{3}{2}\alpha)2^{1-\alpha} + (-\frac{\alpha}{2} - 2)3^{1-\alpha}}{(1 + \frac{\alpha}{2})2^{1-\alpha}} \leqslant \frac{(3 + \frac{3}{2}\alpha)2^{1-\alpha} + (-\frac{\alpha}{2} - 2)2^{1-\alpha}}{(1 + \frac{\alpha}{2})2^{1-\alpha}} =$$

$1 + \frac{\frac{\alpha}{2}}{1 + \frac{\alpha}{2}}, \forall \alpha \in (0, 1)$; 另一方面, 通过微分中值定理, 有 $3^{1-\alpha} \leq 2^{1-\alpha} + (1-\alpha)2^{-\alpha}$ 。

因此 $(3 + \frac{3}{2}\alpha)2^{1-\alpha} + (-\frac{\alpha}{2} - 2)3^{1-\alpha} \geq (3 + \frac{3}{2}\alpha)2^{1-\alpha} - (\frac{\alpha}{2} + 2)[2^{-\alpha} + (1-\alpha)2^{-\alpha}] = \alpha(\frac{\alpha}{2} + \frac{7}{2})2^{-\alpha} > 0$, 可得 $d_k^{k-i} > 0$ 。

5) 使用泰勒公式, 得到

$$\begin{aligned} -a_1 - b_2 - c_3 - \frac{\alpha}{2} &= \left(-3 - \frac{3\alpha}{2}\right)2^{1-\alpha} + \left(6 + \frac{3\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} - \left(3 + \frac{\alpha}{2}\right)4^{1-\alpha} = \left(-3 - \frac{3\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} \\ &\quad \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{1-\alpha} + \left(6 + \frac{3\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} - \left(3 + \frac{\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha}\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{1-\alpha} = \left(-3 - \frac{3\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} \left[1 - \right. \\ &\quad \left.(1-\alpha)\frac{1}{3} + \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots\right] + \\ &\quad \left(6 + \frac{3\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} - \left(3 + \frac{\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} \left[1 + (1-\alpha)\frac{1}{3} + \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left.\frac{(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)}{3!}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots\right] = \left(-\frac{\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha)3^{-\alpha} + (-6-2\alpha) \\ &\quad \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2!}3^{-\alpha-1} + \alpha\frac{(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)}{3!}3^{-\alpha-2} + (-6-2\alpha) \\ &\quad \frac{(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)}{4!}3^{-\alpha-3} + \cdots + ((-1)^{k+1}\left(3 + \frac{3\alpha}{2}\right) - \\ &\quad \left(3 + \frac{\alpha}{2}\right))\frac{(1-\alpha)(-\alpha)\cdots(-\alpha-k+2)}{k!}3^{1-\alpha-k} + \cdots \end{aligned} \quad (37)$$

可以看出, 除式 (37) 右边的第一项外, 其余的项都是正的。因此 $-a_1 - b_2 - c_3 - \frac{\alpha}{2} \geq$

$$\left(-\frac{\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha)3^{-\alpha}。根据定义可知 d_{k-2}^k \geq \frac{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha)3^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)2^{1-\alpha}} =$$

$$\frac{\left(-\frac{\alpha}{2} - \alpha^2\right)3^{1-\alpha}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)2^{1-\alpha}} \geq \frac{\left(-\frac{\alpha}{2} - \alpha^2\right)3^{1-\alpha}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)2 \cdot 3^{-\alpha}} = -\left((\alpha+2) + \frac{3}{\alpha+2}\right) + \frac{7}{2}, 从而得到 d_{k-2}^k > -\frac{1}{2}。$$

另一方面, 证明 $d_{k-2}^k < \frac{1}{3}$, 一些计算从式 (37) 给出。 $-a_1 - b_2 - c_3 - \frac{\alpha}{2} = \left(-\frac{\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha)3^{-\alpha} + (-6-2\alpha)\frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2!}3^{-\alpha-1} + \alpha\frac{(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)}{3!}3^{-\alpha-2} + (-6-2\alpha)\frac{(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)(-\alpha-2)}{4!}3^{-\alpha-3} + \cdots \leq \left(-\frac{\alpha}{2}\right)3^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha)3^{-\alpha} +$

$$3^{-\alpha} \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 \cdots \right) = \left(-\frac{\alpha}{2} \right) 3^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha) 3^{-\alpha} + \frac{1}{2} 3^{-\alpha}。 于是 d_{k-2}^k \leqslant$$

$$\frac{\left(-\frac{\alpha}{2} \right) 3^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha) 3^{-\alpha} \frac{1}{2} 3^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) 2^{1-\alpha}} = \frac{-2\alpha^2 - \alpha + 1}{6 + 3\alpha} \left(\frac{3}{2} \right)^{1-\alpha} \leqslant \left| \frac{-2\alpha^2 - \alpha + 1}{6 + 3\alpha} \right| \frac{3}{2} =$$

$$\left| \frac{7}{3} - \left(\frac{2}{3}(\alpha + 2) + \frac{5}{3} \frac{1}{\alpha + 2} \right) \right| \frac{3}{2} < \frac{1}{3}, \forall \alpha \in (0, 1)。 k = 2, k = 3 的情形也可类似地证明。$$

6) 从式 (32) 和式 (33) 可得到:

$$d_{k-2}^k \geqslant \frac{\alpha \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{7}{2} \right) 2^{-\alpha}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) 2^{1-\alpha}} = \frac{\alpha(\alpha + 7)}{2(2 + \alpha)} > 0, \quad (38)$$

$$d_{k-2}^k \geqslant \frac{\left(-\frac{\alpha}{2} \right) 3^{1-\alpha} + \alpha(1-\alpha) 3^{-\alpha} + (-6-2\alpha) \frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2!} 3^{-\alpha-1}}{\left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) 2^{1-\alpha}} = \frac{\alpha(-2\alpha^2 - 10\alpha + 3) 3^{-\alpha}}{6(2 + \alpha)} \frac{3^{-\alpha}}{2^{-\alpha}}。 \quad (39)$$

使用式 (38) 和式 (39), 得到

$$\frac{1}{4} (d_{k-2}^k)^2 + d_{k-2}^k \geqslant \frac{1}{4} \frac{\alpha^2 (\alpha + 7)^2}{4(\alpha + 2)^2} + \frac{\alpha(-2\alpha^2 - 10\alpha + 3) 3^{-\alpha}}{6(2 + \alpha)} \frac{3^{-\alpha}}{2^{-\alpha}} =$$

$$\frac{3\alpha^2 (\alpha + 7)^2 2^{-\alpha} + 8\alpha(-2\alpha^2 - 10\alpha + 3) (\alpha + 2) 3^{-\alpha}}{48(\alpha + 2)^2 2^{-\alpha}} =$$

$$\frac{3\alpha^2 (\alpha + 7)^2 (3^{-\alpha} + 3^{-\alpha-1}) + 8\alpha(-2\alpha^2 - 10\alpha + 3) (\alpha + 2) 3^{-\alpha}}{48(\alpha + 2)^2 2^{-\alpha}} =$$

$$\frac{\alpha 3^{-\alpha} (\alpha^4 + \alpha^3 + 21(1 - \alpha^2) + 11\alpha + 27)}{48(\alpha + 2)^2 2^{-\alpha}} > 0。$$

引理 1 的证明完成。

引入参数 $\eta := \frac{1}{2} d_{k-1}^k$ 。将式 (27) 改写为 $(1 + \alpha_0 \beta_0^{-1}) u_i^k - \eta u_i^{k-1} - \alpha_0 \beta_0^{-1} \delta_x^2 u_i^k = \eta(u_i^{k-1} - \eta u_i^{k-2}) + (\eta^2 + d_{k-2}^k) u_i^{k-2} + d_{k-3}^k u_i^{k-3} + \cdots + d_0^k u_i^0 = \eta(u_i^{k-1} - \eta u_i^{k-2}) + (\eta^2 + d_{k-2}^k)(u_i^{k-2} - \eta u_i^{k-3}) + (\eta^3 + d_{k-2}^k \eta + d_{k-3}^k) u_i^{k-3} + d_{k-4}^k u_i^{k-4} + \cdots + d_0^k u_i^0 = \eta(u_i^{k-1} - \eta u_i^{k-2}) + (\eta^2 + d_{k-2}^k)(u_i^{k-2} - \eta u_i^{k-3}) + (\eta^3 + d_{k-2}^k \eta + d_{k-3}^k)(u_i^{k-3} - u_i^{k-4}) + \cdots + (\eta^{k-1} + d_{k-2}^k \eta^{k-3} + \cdots + d_2^k \eta + d_1^k)(u_i^1 - \eta u_i^0) + (\eta^k + d_{k-2}^k \eta^{k-2} + \cdots + d_1^k \eta + d_0^k) u_i^0$ 。现在表示为:

$$\bar{d}_{k-i}^k := \eta^i + \sum_{j=2}^i \eta^{i-j} d_{k-j}^k, i = 2, 3, \cdots, k。 \quad (40)$$

$$\bar{u}_i^l := u_i^l - \eta u_i^{l-1}, l = 1, 2, \cdots, k。$$

因此, 式 (27) 可以等价于:

$$\bar{u}_i^k + \alpha_0 \beta_0^{-1} u_i^k - \alpha_0 \beta_0^{-1} \delta_x^2 u_i^k = \eta \bar{u}_i^{k-1} + \sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k \bar{u}_i^{k-j} + \bar{d}_0^k u_i^0, k \geqslant 2。 \quad (41)$$

下面引理提供式 (41) 中的系数的一些很好的性质。

引理 2 对 $0 < \alpha < 1, k \geq 2$ 和式 (41) 中的系数满足:

$$0 < \eta = \frac{1}{2}d_{k-1}^k < 2/3, \quad (42)$$

$$\bar{d}_{k-i}^k > 0, i = 2, 3, \dots, k,$$

$$\eta + \bar{d}_0^2 \leq 1, \quad (43)$$

$$\text{对 } k \geq 3, \eta + \sum_{i=2}^{k-1} \bar{d}_{k-i}^k + \bar{d}_0^k \leq 1, \quad (44)$$

$$\frac{1}{\bar{d}_0^k} < \frac{k^\alpha}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \circ \quad (45)$$

证明 1) 使用式 (32) 即可得到式 (42)。

2) 由式 (40) 和式 (32), 得

$$\bar{d}_{k-2}^k = \eta^2 + d_{k-2}^k = \frac{1}{4}(d_{k-1}^k)^2 + d_{k-2}^k > 0 (k \geq 2). \quad (46)$$

更进一步, 可以验证 $\bar{d}_{k-i}^k = \bar{d}_{k-i+1}^k \eta + d_{k-i}^k, i = 3, 4, \dots, k$ 。运用式 (46)、式 (32) 和 $\eta > 0$, 可得 $\bar{d}_{k-i}^k > 0, i = 3, 4, \dots, k$ 。

3) 令 $q_2 = \eta + \bar{d}_0^2$, 由式 (40) 可得 $q_2 = \eta + d_0^2 = \eta + \eta^2 + d_0^2 = \eta(1 + \eta) + d_0^2 = \eta \cdot \frac{1 - \eta^2}{1 - \eta} + d_0^2$ 。于是 $(1 - \eta)q_2 = \eta(1 - \eta^2) + d_0^2(1 - \eta) = (\eta + d_0^2) - \eta(\eta^2 + d_0^2)$ 。其中 $\eta + d_0^2 = \frac{1}{2}d_1^2 + d_0^2 = -\frac{1}{2}d_1^2 + (d_0^2 + d_1^2) = 1 - \eta$ 。上述结合式 (31) 和式 (34), 可得 $(1 - \eta)q_2 \leq (1 - \eta) - \eta(\frac{1}{4}(d_1^2)^2 + d_0^2) \leq 1 - \eta$, 得到 $q_2 \leq 1$, 即 $\eta + \bar{d}_0^2 \leq 1$ 。

4) 令 $q_k = \eta + \sum_{i=2}^{k-1} \bar{d}_{k-i}^k + \bar{d}_0^k$ 。由式 (40) 得 $q_k = \eta(1 + \eta + \eta^2 + \dots + \eta^{k-1}) + d_{k-2}^k(1 + \eta + \eta^2 + \dots + \eta^{k-2}) + \dots + d_2^k(1 + \eta + \eta^2) + d_1^k(1 + \eta) + d_0^k$ 。于是 $(1 - \eta)q_k = \eta(1 + \eta^k) + d_{k-2}^k\eta(1 + \eta^{k-1}) + d_{k-3}^k + \dots + d_1^k + d_0^k - d_{k-3}^k\eta^{k-2} - \dots - d_2^k\eta^3 - d_1^k\eta^2 - d_0^k\eta$ 。使用式 (30)、式 (31)、式 (34) 和 $\eta = \frac{1}{2}d_{k-1}^k$, 得 $(1 - \eta)q_k \leq \eta(1 - \eta^k) + d_{k-2}^k\eta(1 - \eta^{k-1}) + d_{k-3}^k + \dots + d_1^k + d_0^k = (\eta + d_{k-2}^k + d_{k-3}^k + \dots + d_1^k + d_0^k) - \eta^{k-1}(\eta^2 + d_{k-2}^k) \leq (1 - \eta) - \eta^{k-1}(\eta^2 + d_{k-2}^k) \leq (1 - \eta) - \eta^{k-1}\left(\frac{1}{4}(d_{k-1}^k)^2 + d_{k-2}^k\right)$ 。于是, 得到 $q_k \leq 1$, 即 $\eta + \sum_{i=2}^{k-1} \bar{d}_{k-i}^k + \bar{d}_0^k \leq 1$ 。

5) 显然 $\bar{d}_0^k \geq d_0^k > 0$, $d_0^k = \frac{3}{2}(2 - \alpha)k^{1-\alpha} - \frac{1}{2}(2 - \alpha)(k - 1)^{1-\alpha} - k^{2-\alpha} + (k - 1)^{2-\alpha} = \frac{3}{2}(2 - \alpha)k^{1-\alpha} - \frac{1}{2}(2 - \alpha)k^{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{1-\alpha} - k^{2-\alpha} + \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2-\alpha} = \frac{3}{2}k^{1-\alpha} - \frac{1}{2}(2 - \alpha)k^{1-\alpha} \left(1 - (1 - \alpha)\frac{1}{k} + \frac{(1 - \alpha)(-\alpha)}{2!}\left(\frac{1}{k}\right)^2 - \frac{(1 - \alpha)(-\alpha)(-\alpha - 1)}{3!}\left(\frac{1}{k}\right)^3 + \dots\right) - k^{2-\alpha} +$

$$\begin{aligned} & k^{2-\alpha}(1-(2-\alpha)\frac{1}{k}+\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)}{2!}\left(\frac{1}{k}\right)^2-\frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)}{3!}\left(\frac{1}{k}\right)^3+ \\ & \frac{(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)}{4!}\left(\frac{1}{k}\right)^4-\cdots)=(2-\alpha)(1-\alpha)k^{-\alpha}+(-\frac{1}{4}-\frac{1}{6})(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)k^{-\alpha-1} \\ & +\left(\frac{1}{2}\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)(2-\alpha)(1-\alpha)(-\alpha)(-\alpha-1)k^{-\alpha-2}+\cdots\geqslant(2-\alpha)(1-\alpha)k^{-\alpha}, \end{aligned}$$

于是 $\frac{1}{d_0^k} < \frac{k^\alpha}{(2-\alpha)(1-\alpha)}$ 。

定理 2 设 $\{u_i^k \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq i \leq n\}$ 为差分格式 (17) ~ (19) 的解, 则有 $\|u^k\| + \sqrt{\alpha_0\beta_0^{-1}}\|\delta_x u^k\| \leq 4\|u^0\|, 1 \leq k \leq n$ 。

证明 $k = 1$ 时, 由式 (28), 有

$$(1 + \tilde{\alpha}_0)u_i^1 - \tilde{\alpha}_0\delta_x^2 u_i^1 = u_i^0. \tag{47}$$

将式 (47) 等号两边与 u_i^1 做内积, 得 $(1 + \tilde{\alpha}_0)\|u^1\|^2 + \tilde{\alpha}_0\|\delta_x u^1\|^2 = (u^0, u^1) \leq \|u^0\|^2/2 + \|u^1\|^2/2$ 。化简得 $\|u^1\|^2 + \tilde{\alpha}_0\|\delta_x u^1\|^2 \leq \|u^0\|^2$ 。显然能得到 $\|u^1\| \leq \|u^0\|$, $\sqrt{\tilde{\alpha}_0}\|\delta_x u^1\| \leq \|u^0\|$, 结合式 (29), $k = 1$ 情形证得。

下证 $k \geq 2$ 的情形。由式 (41), 有

$$\bar{u}_i^k + \alpha_0\beta_0^{-1}u_i^k - \alpha_0\beta_0^{-1}\delta_x^2 u_i^k = \eta\bar{u}_i^{k-1} + \sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k \bar{u}_i^{k-j} + \bar{d}_0^k u_i^0. \tag{48}$$

将式 (48) 等号两边与 $2\bar{u}^k$ 做内积, 得 $2\|\bar{u}^k\|^2 + 2\alpha_0\beta_0^{-1}(u^k, \bar{u}^k) + 2\alpha_0\beta_0^{-1}(\delta_x u^k, \delta_x \bar{u}^k) = 2\eta(\bar{u}^{k-1}, \bar{u}^k) + 2\sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k(\bar{u}^{k-j}, \bar{u}^k) + 2\bar{d}_0^k(u^0, \bar{u}^k)$ 。

使用引理 1、柯西施瓦兹不等式和公式

$$2(\delta_x u^k, \delta_x \bar{u}^k) = \|\delta_x u^k\|^2 + \|\delta_x \bar{u}^k\|^2 - \eta^2\|\delta_x u^{k-1}\|^2, \tag{49}$$
$$2(u^k, \bar{u}^k) = \|u^k\|^2 + \|\bar{u}^k\|^2 - \eta^2\|u^{k-1}\|^2, \tag{50}$$

可得到 $2\|\bar{u}^k\|^2 + \alpha_0\beta_0^{-1}\|\delta_x u^k\|^2 - \alpha_0\beta_0^{-1}\eta^2\|u^{k-1}\|^2 - \alpha_0\beta_0^{-1}\eta^2\|\delta_x u^{k-1}\|^2 \leq \eta\|\bar{u}^{k-1}\|^2 + \sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k\|\bar{u}^{k-j}\|^2 + \bar{d}_0^k\|u^0\|^2 + (\eta + \sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-l}^k + \bar{d}_0^k)\|\bar{u}^k\|^2$ 。接着使用式 (42) ~ (44) 和能量分析法, 得到

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^k\|^2 + \alpha_0\beta_0^{-1}\|\delta_x u^k\|^2 &\leq \eta\|\bar{u}^{k-1}\|^2 + \alpha_0\beta_0^{-1}\eta\|u^{k-1}\|^2 + \alpha_0\beta_0^{-1}\eta\|\delta_x u^{k-1}\|^2 + \\ &\sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k\|\bar{u}^{k-j}\|^2 + \bar{d}_0^k\|u^0\|^2 \leq \eta(\|\bar{u}^{k-1}\|^2 + \alpha_0\beta_0^{-1}\eta\|\delta_x u^{k-1}\|^2) + \\ &\sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k(\|\bar{u}^{k-j}\|^2 + \alpha_0\beta_0^{-1}\|\delta_x u^{k-j}\|^2) + \bar{d}_0^k\|u^0\|^2. \end{aligned} \tag{51}$$

下证 $\|\bar{u}^k\|^2 + \alpha_0\beta_0^{-1}\|\delta_x u^k\|^2 \leq \|u^0\|^2, 1 \leq k \leq n$ 。

用数学归纳法证明, 下证 $k = 1$ 的情形。由式 (28) 和式 (41) 可得

$$\bar{u}_i^1 + \tilde{\alpha}_0\delta_x^2 u_i^1 = (1 - \eta)u_i^0. \tag{52}$$

将式 (52) 等号两边与 $2u_i^1$ 做内积, 得 $2(\bar{u}^1, u^1) + 2\tilde{\alpha}_0 \|u^1\|^2 + 2\tilde{\alpha}_0 \|\delta_x u^1\|^2 = 2(1 - \eta)(u^0, u^1)$ 。结合式 (50), 得到

$$\|\bar{u}^1\|^2 + \tilde{\alpha}_0 \|\delta_x u^1\|^2 \leq (1 - \eta + \eta^2) \|u^0\|^2 \leq \|u^0\|^2. \quad (53)$$

由式 (51) 和式 (53) 和引理 2 得 $\|\bar{u}^2\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\delta_x u^2\|^2 \leq \eta \|\bar{u}^1\|^2 \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\delta_x u^1\|^2 + \bar{d}_0^2 \|u^0\|^2 \leq (\eta + \bar{d}_0^2) \|u^0\|^2 \leq \|u^0\|^2$ 。故 $k = 2$ 的情形已证得。假设结论对 $k = 2, 3, \dots, j-1$ 成立, 下证 $k = j$ 的情形。

由式 (43) 和式 (44) 可得

$$\|\bar{u}^j\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\delta_x u^j\|^2 \leq (\eta + \sum_{i=2}^{j-1} \bar{d}_{j-i}^j + \bar{d}_0^j) \|u^0\|^2 \leq \|u^0\|^2. \quad (54)$$

最后, 去估计 $\|u^k\|$, 使用 $\bar{u}^k = u^k - \eta u^{k-1}$ 和范数的三角不等式, 可得

$$\begin{aligned} \|u^k\| &= \|\bar{u}^k + \eta u^{k-1}\| \leq \|\bar{u}^k\| + \|\eta u^{k-1}\| \leq (1 + \eta) \|u^0\| + \eta^2 \|u^{k-2}\| \leq \\ &(1 + \eta + \eta^2 + \dots + \eta^k) \|u^0\| \leq 3 \|u^0\|. \end{aligned} \quad (55)$$

结合式 (54) 和式 (55), 就完成了定理 2 的证明。

3.2 差分格式的收敛性

定理 3 设 $\{U_i^k \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n\}$ 为原方程式 (1) ~ (3) 的精确解, $\{u_i^k \mid 0 \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n\}$ 为差分格式 (17) ~ (19) 的解。令 $e_i^k = U_i^k - u_i^k$, 则存在正常数 c , 使得 $\|e^k\| + \sqrt{\alpha_0 \beta_0^{-1}} \|\delta_x e^k\| \leq c(\tau^{3-\alpha} + h^2), 0 \leq i \leq m, 2 \leq k \leq n$ 。

证明 结合式 (13) ~ (19), 可得

$$\bar{e}_i^k + \alpha_0 \beta_0^{-1} e_i^k - \alpha_0 \beta_0^{-1} \delta_x^2 e_i^k = \eta \bar{e}_i^{k-1} + \sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k \bar{e}_i^{k-j} + \bar{d}_0^k e_i^0 - \alpha_0 \beta_0^{-1} (R_2)_i^k. \quad (56)$$

对式 (56) 等号两边同时与 $2\bar{e}_i^k$ 做内积, 可得

$$\begin{aligned} 2\|\bar{e}^k\|^2 + 2\alpha_0 \beta_0^{-1} (e^k, \bar{e}^k) + 2\alpha_0 \beta_0^{-1} (\delta_x e^k, \delta_x \bar{e}^k) = \\ 2\eta (e^{k-1}, \bar{e}^k) + 2 \sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k (\bar{e}^{k-j}, \bar{e}^k) + 2\bar{d}_0^k (e^0, \bar{e}^k) - 2\alpha_0 \beta_0^{-1} ((R_2)^k, \bar{e}^k). \end{aligned}$$

结合柯西施瓦兹不等式、式 (45) 以及 $2\alpha_0 \beta_0^{-1} ((R_2)^k, \bar{e}^k) \leq 2\alpha_0 \beta_0^{-1} \|(R_2)^k\| \|\bar{e}^k\| =$

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\alpha_0 \beta_0^{-1} \frac{1}{\bar{d}_0^k}} \|(R_2)^k\| \sqrt{\alpha_0 \beta_0^{-1} \bar{d}_0^k} \|\bar{e}^k\| \leq 4\alpha_0 \beta_0^{-1} \frac{1}{\bar{d}_0^k} \|(R_2)^k\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\bar{e}^k\|^2 < 4\alpha_0 \beta_0^{-1} \frac{k^\alpha}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \times \\ \|(R_2)^k\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\bar{e}^k\|^2 = (4\Gamma(1-\alpha)T^\alpha/\beta_0) \|(R_2)^k\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\bar{e}^k\|^2, \end{aligned}$$

类似于定理 2 的方法, 利用引理 2、柯西施瓦兹不等式、式 (49) 以及式 (50) 得 $\|\bar{e}^k\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\delta_x e^k\|^2 \leq \eta(\|\bar{e}^{k-1}\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\delta_x e^{k-1}\|^2) + \sum_{j=2}^{k-1} \bar{d}_{k-j}^k (\|\bar{e}^{k-j}\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\delta_x e^{k-j}\|^2) + \bar{d}_0^k \|e^0\|^2 + (4\Gamma(1-\alpha)T^\alpha/\beta_0) \|(R_2)^k\|^2$ 。

下证 $\|\bar{e}^k\|^2 + \alpha_0 \beta_0^{-1} \|\delta_x e^k\|^2 \leq \|e^0\|^2 + (4\Gamma(1-\alpha)T^\alpha/\beta_0) \max_{2 \leq k \leq n} \|(R_2)^k\|^2, 2 \leq k \leq n$ 。证明方法与定理 2 类似, 采用数学归纳法即可证得。对 $\|e^k\|$ 做估计, $\|e^k\| = \|\bar{e}^k + \eta e^{k-1}\| \leq (\|e^0\|^2 + (4\Gamma(1-\alpha)T^\alpha/\beta_0) \max_{2 \leq k \leq n} \|(R_2)^k\|^2)^{\frac{1}{2}} + \eta \|e^{k-1}\| \leq (1 + \eta)(\|e^0\|^2 + (4\Gamma(1-\alpha)T^\alpha/\beta_0) \max_{2 \leq k \leq n} \|(R_2)^k\|^2)^{\frac{1}{2}} + \eta \|e^{k-1}\|$ 。

$\alpha) T^\alpha/\beta_0) \max_{2 \leq k \leq n} \|(R_2)^k\|^{\frac{1}{2}} + \eta^2 \|e^{k-2}\| \leq (1 + \eta + \eta^2 + \cdots + \eta^k) (\|e^0\|^2 + (4\Gamma(1 - \alpha) T^\alpha/\beta_0) \max_{2 \leq k \leq n} \|(R_2)^k\|^{\frac{1}{2}} \leq 3((4\Gamma(1 - \alpha) T^\alpha/\beta_0) \max_{2 \leq k \leq n} \|(R_2)^k\|^{\frac{1}{2}})$ 。又由于 $(R_2)_i^k \leq c(\tau^{3-\alpha} + h^2), 2 \leq k \leq n$, 该定理证毕。

4 数值算例

本节提供数值例子, 以说明所给理论分析的有效性。考虑以下分数阶反应-扩散方程: ${}_0^C D_t^\alpha(x, t) + u(x, t) = \partial^2 u(x, t) / \partial x^2 + f(x, t), x \in (0, 1), t \in (0, 1]; u(x, 0) = \varphi(x), x \in [0, 1]; u(0, t) = \mu(t), u(1, t) = \gamma(t), t \in (0, 1]$ 。其中右端源项为 $f(x, t) = e^x t^{4+\alpha} \Gamma(5 + \alpha) / 24$ 。该方程的精确解为 $u(x, t) = e^x t^{4+\alpha}$ 。定义 L^2 误差范数为 $E(h, \tau) = \sqrt{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n (u(x_i, t_j) - u_i^j)^2}$ 。其中: $u(x_i, t_j)$ 和 u_i^j 分别表示该问题在点 (x_i, t_j) 处的精确解和数值解; τ 表示时间步长; h 表示空间步长。

表 1 给出了当 $h = 1/20\ 000, \alpha = 0.3, 0.5, 0.9$ 时精确解和数值解的 L^2 误差及时间方向上的收敛阶, t 的收敛阶接近 $3 - \alpha$ 。这与本文的理论分析结果一致。表 2 给出了当 $\tau = 1/20\ 000, \alpha = 0.3, 0.5, 0.9$ 时精确解和数值解的 L^2 误差及空间方向上的收敛阶, h 的收敛阶接近 2 阶。这与本文的理论分析结果一致。

表 1 当 $h = 1/20\ 000, \alpha = 0.3, 0.5, 0.9$ 时, L^2 误差和 t 的收敛阶				表 2 当 $\tau = 1/20\ 000, \alpha = 0.3, 0.5, 0.9$ 时, L^2 误差和 h 的收敛阶			
Tab. 1 When $h = 1/20\ 000$, for $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$, the L^2 error and the convergence rate of t				Tab. 2 When $\tau = 1/20\ 000$, for $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$, the L^2 error and the convergence rate of h			
α	τ	$E(h, \tau)$	$\log_2 \frac{E(h, 2\tau)}{E(h, \tau)}$	α	h	$E(h, \tau)$	$\log_2 \frac{E(2h, \tau)}{E(h, \tau)}$
0.3	1/8	8.300×10^{-4}		0.3	1/4	0.850×10^{-3}	
	1/16	1.285×10^{-4}	2.691 1		1/8	0.215×10^{-3}	1.983 411
	1/32	1.910×10^{-5}	2.747 2		1/16	0.054×10^{-3}	1.980 454
	1/64	2.800×10^{-6}	2.773 0		1/32	0.014×10^{-3}	1.998 654
	1/128	4.000×10^{-7}	2.830 3	0.5	1/4	0.807×10^{-3}	
0.5	1/8	3.200×10^{-3}			1/8	0.204×10^{-3}	1.985 396
	1/16	1.323×10^{-3}	2.418 5		1/16	0.052×10^{-3}	1.982 477
	1/32	5.343×10^{-4}	2.476 5		1/32	0.013×10^{-3}	1.999 060
	1/64	2.136×10^{-4}	2.500 9	0.9	1/4	0.682×10^{-3}	
	1/128	8.510×10^{-5}	2.510 3		1/8	0.173×10^{-3}	1.975 688
0.9	1/8	2.586×10^{-2}			1/16	0.044×10^{-3}	1.966 849
	1/16	6.675×10^{-3}	1.953 816		1/32	0.011×10^{-3}	1.970 591
	1/32	1.635×10^{-3}	2.029 865				
	1/64	3.900×10^{-4}	2.065 961				
	1/128	9.200×10^{-5}	2.083 467				

5 结论

本文提出了一个 Caputo 时间分数阶反应-扩散方程的数值方法。在时间上采用 L2 格式、空间上采用二阶中心差分对所得微分方程进行数值求解,并证明了该差分格式是无条件稳定和收敛的。此外,本文数值方法的收敛阶为 $O(\tau^{3-\alpha} + h^2)$ 。最后,通过数值算例验证了本文的数值方法与理论结果的一致性。这种方法和分析技术可用于求解和分析其他类型的分数阶偏微分方程。

[参考文献]

- [1] PUROHIT S D, BALWANU D, JANGID K. On the solutions for generalised multiorder fractional partial differential equations arising in physics[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2023, 46(7): 8139-8147.
- [2] GAO X W, ZHU Y M, PAN T. Finite line method for solving high-order partial differential equations in science and engineering[J]. Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 2023, 7: 100477.
- [3] ARA A, KHAN N A, RAZZAQ O A, et al. Wavelets optimization method for evaluation of fractional partial differential equations; an application to financial modelling[J]. Advances in Difference Equations, 2018, 2018(1): 1-13.
- [4] ABRO K A, ATANGANA A, GÓMEZ-AGUILAR J F. A comparative analysis of plasma dilution based on fractional integro-differential equation; an application to biological science[J]. International Journal of Modelling and Simulation, 2023, 43(1): 1-10.
- [5] SUN Z, WU X. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system[J]. Applied Numerical Mathematics, 2006, 56(2): 193-209.
- [6] ZHANG Y, SUN Z. Alternating direction implicit schemes for the two-dimensional fractional sub-diffusion equation[J]. Journal of Computational Physics, 2011, 230(24): 8713-8728.
- [7] SUN H, CHEN W, LI C, et al. Finite difference schemes for variable-order time fractional diffusion equation[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2012, 22(4): 1250085.
- [8] ALIKHANOV A A. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation[J]. Journal of Computational Physics, 2015, 280: 424-438.
- [9] LV C, XU C. Error analysis of a high order method for time-fractional diffusion equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2016, 38(5): 2699-2724.

(责任编辑 彭海滨 英文审校 黄振坤)