

具 Allee 效应和食饵避难的随机捕食 模型的动力学分析

陈 超

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究一类具 Allee 效应和食饵避难的随机食饵捕食模型的全局动力学。证明模型存在唯一的全局正解, 且给出模型存在唯一遍历的平稳分布的充分条件。最后, 通过数值模拟, 验证了结论的可行性和有效性。

[关键词] 食饵捕食模型; 随机; Allee 效应; 避难

[中图分类号] O 175

Dynamics of Stochastic Predator-Prey Model with Allee Effect and Prey Refuge

CHEN Chao

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the dynamics of a stochastic predator-prey model with Allee effect and prey refuge were investigated. The sufficient criteria for the existence of a unique global positive solution and a unique ergodic stationary distribution were established by constructing suitable Lyapunov functions. Finally, numerical simulations were given to illustrate the feasibility and effectiveness of the conclusion.

Keywords: predator-prey model; stochastic; Allee effect; refuge

0 引言

在生物数学中, 食饵和捕食者之间的动力学关系是一个非常重要的研究课题。文献 [1-2] 提出了 Lotka-Volterra 模型来描述种群之间的竞争关系, 之后大量的学者对此进行了广泛的研究^[3-4]。食饵避难在生态系统稳定中发挥着重要的作用, 它通过减少捕食者和猎物之间的冲突, 能够有效降低捕获率。近年来, 很多的捕食模型都考虑了食饵避难的情况, 如文献 [5] 考虑了具有食饵避难和非单调功能性反应的食饵捕食模型的多周期性; 文献 [6] 研究了具有避难和恐惧效应的随机食饵捕食模型的阈值行为后得出, 可以通过增加避难程度来提高猎物的存活率, 或者减弱避难程度以提高捕食者的生存率; 文献 [7] 研究了一个包含食饵避难和额外食物的食饵捕食模型, 发现稍高的食饵避难有利于物种共存, 但强避难程度将导致捕食者种群的灭绝; 文献 [8] 考虑了具有食饵避难的模型

[收稿日期] 2022-08-09

[作者简介] 陈超 (1978—), 讲师, 硕士, 从事复杂网络与生物教学方向研究, E-mail: 200461000017@jmu.edu.cn。

<http://xuebaobangong.jmu.edu.cn/zkb>

$$\begin{cases} dx/dt = rx(1-x/K) - [m(1-\delta y)xy]/[a + (1-\delta y)x], \\ dy/dt = [em(1-\delta y)xy]/[a + (1-\delta y)x] - cy. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别为 t 时刻食饵和捕食者的种群数量; r 为食饵的内禀增长率; K 为环境容纳量; m 为捕食者的捕获率; $\delta \in (0,1)$ 为食饵避难参数; a 为半饱和参数; e 为捕食转化率; c 为捕食者的死亡率, 所有的参数都大于零。

1931 年, 文献 [9] 发现种群过密或者过疏都不利于种群的生存和发展, 即种群生长中应当有一个最佳的繁殖密度, 这就是 Allee 效应。对 Allee 效应的研究已经有了丰富的成果。如文献 [10] 发现, 弱 Allee 效应和时滞可以控制斑图形状的变化; 文献 [11] 发现, 在反应扩散的情况下, Allee 效应会形成洞状斑图; 文献 [12] 研究了具有合作捕猎和 Allee 效应的捕食系统, 发现在 Allee 阈值很小的情况下, 捕食者种群会灭绝。

另一方面, 在自然环境中, 生态系统具有复杂性和多样性, 各种随机干扰无处不在, 比如温度、湿度、雨水等, 它们以各种形式和各种强度存在, 这些干扰可能会对生态系统产生很大的影响, 甚至导致一些系统的崩溃。因此, 必须考虑食饵捕食系统所处环境的随机性^[13-14]。

受文献 [8-14] 的启发, 本文考虑了具 Allee 效应和食饵避难的随机捕食模型

$$\begin{cases} dx = \{rx[1-x/K-n/(x+h)] - m(1-\delta y)xy/[a + (1-\delta y)x]\}dt + x(\sigma_{11} + \sigma_{12}x)dB_1(t), \\ dy = \{em(1-\delta y)xy/[a + (1-\delta y)x] - cy\}dt + y(\sigma_{21} + \sigma_{22}y)dB_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

其中: n 和 h 为 Allee 效应常数; δ 为食饵避难系数; $\sigma_{ij}^2 > 0 (i, j = 1, 2)$ 为白噪声的强度; $B_i(t) (i = 1, 2)$ 为定义在完备概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上的相互独立的布朗运动, 滤子 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 满足通常的条件。 $\mathbf{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2: x > 0, y > 0\}$ 。

1 全局正解的存在性

定理 1 令 $\sigma_{i2} = 0, i = 1, 2$ 。对于任意给定的初始条件 $(x(0), y(0)) \in \mathbf{R}_+^2$, 模型 (2) 存在唯一的正解 $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$, 并且以概率 1 存在于 \mathbf{R}_+^2 中。

证明 因为模型 (2) 的系数满足局部 Lipschitz 条件, 因此模型 (2) 存在唯一局部解 $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2, t \in [0, \tau_e)$, 其中 τ_e 是爆破时间。为了证明这个解是全局的, 只要证明 $\tau_e = \infty$ 。令 k_0 足够大, 使得 $(x(t), y(t)) \in [1/k_0, k_0] \times [1/k_0, k_0]$ 。对于任意 $k \geq k_0$, 定义停时序列 $\tau_k = \inf\{t \in [0, \tau_e): \min\{x(t), y(t)\} \leq 1/k \text{ 或 } \max\{x(t), y(t)\} \geq k\}$ 。

令 $\inf \emptyset = \infty$, 根据停时的定义可知 $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$, 因此只要证明 $\tau_\infty = \infty$ 。假设 $\tau_\infty \neq \infty$, 那么存在常数 $T > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$, 使得 $P\{\tau_k \leq T\} \geq \varepsilon, k \geq k_0$ 。

定义 C^2 -函数 $V: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为 $V(x, y) = x - 1 - \ln x + y - 1 - \ln y$, 由 Itô's 公式可得

$$\begin{aligned} LV(x, y) &= (1 - 1/x) \{rx(1-x/K) - n/(x+h) - [m(1-\delta y)xy]/[a + (1-\delta y)x]\} + \sigma_{11}^2/2 + \\ &\quad (1 - 1/y) \{[em(1-\delta y)xy]/[a + (1-\delta y)x] - cy\} + \sigma_{21}^2/2 = \\ &\quad - rx^2/K + (r + r/K)x - rn/(x+h) - [m(1-\delta y)xy]/[a + (1-\delta y)x] - r + \\ &\quad rn/(x+h) + [m(1-\delta y)y]/[a + (1-\delta y)x] + \sigma_{11}^2/2 + c + \sigma_{21}^2/2 + \\ &\quad [em(1-\delta y)xy]/[a + (1-\delta y)x] - cy - [em(1-\delta y)x]/[a + (1-\delta y)x] \leq \\ &\quad - r[x - (K+1)/2]^2/K + r(K+1)^2/(4K) - m\delta[y - (1+ae)/2\delta]^2/a + \\ &\quad m(1+ae)^2/(4a\delta) + rn/h + c + (\sigma_{11}^2 + \sigma_{21}^2)/2 \leq r(K+1)^2/(4K) + \\ &\quad rm(1+ae)^2/(4a\delta) + rn/h + c + (\sigma_{11}^2 + \sigma_{21}^2)/2 := \Omega. \end{aligned}$$

从而有 $dV(x, y) \leq \Omega dt + (\sigma_{11}x - \sigma_{11})dB_1(t) + (\sigma_{21}y - \sigma_{21})dB_2(t)$, 对其两边在 $[0, \tau_k \wedge T) (\tau_k \wedge T = \min\{\tau_k, T\})$ 上积分可得,

$$V(x(\tau_k \wedge T), y(\tau_k \wedge T)) \leq V(x(0), y(0)) + \Omega(\tau_k \wedge T) - \sigma_{11}B_1(\tau_k \wedge T) -$$

$$\sigma_{21}B_2(\tau_k \wedge T) + \int_0^{\tau_k \wedge T} \sigma_{11}x(s)dB_1(s) + \int_0^{\tau_k \wedge T} \sigma_{21}y(s)dB_2(s). \quad (3)$$

对式 (3) 两边取期望可得 $EV(x(\tau_k \wedge T), y(\tau_k \wedge T)) \leq V(x(0), y(0)) + \Omega T$ 。

令 $\Psi_k = \{\omega \in \Psi: \tau_k(\omega) \leq T\}$, $k \geq k_0$, 则有 $P(\Psi_k) \geq \varepsilon$ 。对于任意的 $\omega \in \Psi_k$, 至少有一个 $x(\tau_k, \omega)$ 或 $y(\tau_k, \omega)$ 等于 k 或 $1/k$, 因此有 $V(x(\tau_k, \omega), y(\tau_k, \omega)) \geq (k-1-\ln k) \wedge (1/k-1+\ln k)$, 从而, $V(x(0), y(0)) + \Omega T \geq E[1_{\Psi_k(\omega)} V(x(\tau_k, \omega), y(\tau_k, \omega))] \geq \varepsilon[(k-1-\ln k) \wedge (1/k-1+\ln k)]$ 。

这里 $1_{\Psi_k(\omega)}$ 是 $\Psi_k(\omega)$ 的示性函数。令 $k \rightarrow \infty$, 则有 $\infty > V(x(0), y(0)) + \Omega T = \infty$ 。因此有 $\tau_\infty = \infty$, 即模型 (2) 存在唯一的全局正解。

2 平稳分布及遍历性

假设 $X(t)$ 是 R^l 中的自治 Markov 过程, 它可表示为随机微分方程 $dX(t) = f(X(t)) + \sum_{s=1}^k g_s(X(t))dB_s(t)$, 其扩散矩阵 $A(X(t)) = (a_{ij}(x))$, $a_{ij}(x) = \sum_{s=1}^k [g_s^i(x)g_s^j(x)]$ 。

引理 1^[14] Markov 过程 $X(t)$ 过程存在唯一的遍历平稳分布, 如果存在具有正则边界 Γ 的有界区域 $U \subset R^l$, 具有如下性质: 1) 对于任意 $x \in U$, 扩散矩阵 $A(X)$ 是严格正定的; 2) 存在非负 C^2 -函数 V , 使得在 $R^l \setminus U$ 上, LV 为负数。

引理 2^[15] 设 $y > 0$, $A_2 > 0$, 则有 $A_1 y^2 - A_2 y^{p+2} \leq [2/(p+2)]^{2/p} (A_1/A_2)^{2/p} [p/(p+2)] A_1$ 。

定理 2 设 $R = emK/(a+K) - K\beta_1(\sigma_{11} + K\sigma_{12})^2 - \sigma_{21}^2 - c - K\beta_1 nr/h - \beta_2 nr > 0$, 其中 $\beta_1 = 0.0001 + aem/[(a+K)^2(r+K^2\sigma_{11}\sigma_{12})] + aemK/(r+K^2\sigma_{11}\sigma_{12})$, 那么模型 (2) 存在唯一的遍历平稳分布。

证明 模型 (2) 的扩散矩阵 $A = \begin{pmatrix} x^2(\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2 & 0 \\ 0 & y^2(\sigma_{21} + \sigma_{22}y)^2 \end{pmatrix}$, 显然满足引理 1 的性质 1。

定义正定 C^2 -函数 $V: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $V(x, y) = \tilde{V}(x, y) - \tilde{V}(x_0, y_0) = N(V_1 + QV_2) + V_3$, 其中: $V_1 = \beta_1[x - K - K\ln(x/K)] - \beta_2x - \ln y + mK\beta_1y/(ac)$; $V_2 = y^\gamma/\gamma$, $0 < \gamma < 1$; $V_3 = (x^\gamma + y^\gamma)/\gamma - V(x_0, y_0)$; (x_0, y_0) 为 $\tilde{V}(x, y)$ 的最小值点。 $\beta_2 = 0.0001 + aem/[r(a+K)^2] - (\beta_1 K^2 \sigma_{12}^2 + \beta_1 K \sigma_{11} \sigma_{12})/r$, $N > 0$, 使得 $-NR/3 + B \leq -3/2$, 其中 $B = \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2} \{(\gamma-1)\sigma_{12}^2 x^{\gamma+2}/4 + (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/4 + rx^\gamma + emy^\gamma\}$ 。

由 Itô's 公式可得,

$$\begin{aligned} LV_1 = & (\beta_1 - K\beta_1/x - \beta_2) \{rx(1-x/K) - n/(x+h) - m(1-\delta y)xy/[a + (1-\delta y)x]\} + K\beta_1 \\ & (\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2/2 + (-1/y + mK\beta_1/(ac)) \{em(1-\delta y)xy/[a + (1-\delta y)x] - cy\} + \\ & (\sigma_{21} + \sigma_{22}y)^2/2 \leq -r\beta_1(x-K)^2/K + mK\beta_1(1-\delta y)y/a + r\beta_2(x^2 - Kx)/K - em(1-\delta y)x/[a \\ & + (1-\delta y)x] + m\beta_2(1-\delta y)xy/[a + (1-\delta y)x] + em^2K\beta_1(1-\delta y)xy/\{ac[a + (1-\delta y)x]\} - \\ & mK\beta_1y/a + K\beta_1(\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2/2 + (\sigma_{21} + \sigma_{22}y)^2/2 + K\beta_1rn/h + \beta_2rn + c \leq -r\beta_1(x-K)^2/ \\ & K + r\beta_2(x^2 - Kx)/K + K\beta_1\sigma_{12}^2(x-K)^2 + K^2\beta_1\sigma_{12}^2(x-K) + K\beta_1\sigma_{11}\sigma_{12}(x-K) + K\beta_1 \\ & (\sigma_{11} + K\sigma_{12})^2 + \sigma_{22}^2y^2 - em(1-\delta y)x/[a + (1-\delta y)x] + (em^2K\beta_1 + acm\beta_2)(1-\delta y)xy/\{ac[a + (1-\delta y)x]\} \\ & + \beta_2rn + c + \sigma_{21}^2 + K\beta_1rn/h + emx/(a+x) - emx/(a+x) + \\ & emK/(a+K) - emK/(a+K) \leq G(x) + K\beta_1(\sigma_{11} + K\sigma_{12})^2 + \sigma_{22}^2y^2 - emK/(a+K) + \beta_2rn + \\ & c + \sigma_{21}^2 + K\beta_1rn/h + (em^2K\beta_1 + acm\beta_2)(1-\delta y)xy/\{ac[a + (1-\delta y)x]\} + emx/(a+x) - \\ & em(1-\delta y)x/[a + (1-\delta y)x] \}. \end{aligned}$$

其中: $G(x) = -r\beta_1(x-K)^2/K + r\beta_2(x^2 - Kx)/K + K\beta_1\sigma_{12}^2(x-K)^2 + K^2\beta_1\sigma_{12}^2(x-K) + K\beta_1\sigma_{11}\sigma_{12}(x-K) - emx/(a+x) + emK/(a+K)$, 则有 $G(x) \leq G(K) = 0$ 。因此有 $LV_1 \leq K\beta_1(\sigma_{11} + K\sigma_{12})^2 + \sigma_{22}^2y^2 - emK/(a+K) + K\beta_1rn/h + \beta_2rn + c + \sigma_{21}^2 + (em^2K\beta_1 + acm\beta_2)(1-\delta y)xy/\{ac[a + (1-\delta y)x]\} +$

$emx/(a+x) - em(1-\delta y)x/[a+(1-\delta y)x] = -R + \sigma_{22}^2 y^2 + (em^2 K\beta_1 + acm\beta_2)(1-\delta y)xy/\{ac[a+(1-\delta y)x]\} + aem\delta xy/\{(a+x)[a+(1-\delta y)x]\}$ 。类似地, 可得 $LV_2 = y^{\gamma-1}\{em(1-\delta y)xy/[a+(1-\delta y)x] - cy\} + (\gamma-1)y^\gamma(\sigma_{21} + \sigma_{22}y)^2/2 \leq em(1-\delta y)xy^\gamma/[a+(1-\delta y)x] + (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/2$ 。

由引理 2 可得, $L(V_1 + QV_2) \leq -R + (em^2 K\beta_1 + acm\beta_2)(1-\delta y)xy/\{ac[a+(1-\delta y)x]\} + aem\delta xy/(a+x)[a+(1-\delta y)x] + emQ(1-\delta y)xy^\gamma/[a+(1-\delta y)x] + \gamma\sigma_{22}^2 [4/((\gamma+2)(1-\gamma))]^{2/\gamma}/(\gamma+2)$ 。取 $Q = 4(3\gamma)^{\gamma/2}\sigma_{22}^\gamma/[(2R)^{\gamma/2}(\gamma+2)^{1+\gamma/2}(1-\gamma)]$, 使得 $-R + \gamma\sigma_{22}^2 [4/((\gamma+2)(1-\gamma)Q)]^{2/\gamma}/(\gamma+2) = -R/3$, 则有 $L(V_1 + QV_2) \leq -R/3 + (em^2 K\beta_1 + acm\beta_2)(1-\delta y)xy/\{ac[a+(1-\delta y)x]\} + aem\delta xy/\{(a+x)[a+(1-\delta y)x]\} + emQ(1-\delta y)xy^\gamma/[a+(1-\delta y)x]$ 。

再由 Itô's 公式可得, $LV_3 = x^\gamma\{r(1-x/K) - n/(x+h) - m(1-\delta y)y/[a+(1-\delta y)x]\} + (\gamma-1)x^\gamma(\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2/2 + \{em(1-\delta y)y/[a+(1-\delta y)x] - c\}y^\gamma + (\gamma-1)y^\gamma(\sigma_{21} + \sigma_{22}y)^2/2 \leq (\gamma-1)\sigma_{12}^2 x^{\gamma+2}/4 + (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/4 + B$ 。因此, $LV \leq -NR/3 + N(em^2 K\beta_1 + acm\beta_2)(1-\delta y)xy/\{ac[a+(1-\delta y)x]\} + aem\delta Nxy/\{(a+x)[a+(1-\delta y)x]\} + emQN(1-\delta y)xy^\gamma/[a+(1-\delta y)x] + (\gamma-1)\sigma_{12}^2 x^{\gamma+2}/4 + (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/4 + B$ 。

定义开集 $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : \xi < x < 1/\xi, \xi < y < 1/\xi\}$, 其中: $0 < \xi < 1$ 是一个充分小的常数, 且满足: $(1-\gamma)\sigma_{22}^2/4 - N[m\beta_2/a + em^2 K\beta_1/(a^2c) + (em\delta + emQ)/a]\xi > 0$, $[(\gamma-1)\sigma_{12}^2/8]\xi^{\gamma+2} + D \leq -1$, $[(\gamma-1)\sigma_{22}^2/8]\xi^{\gamma+2} + D \leq -1$, 其中: $D = \sup_{(x,y) \in \mathbf{R}_+^2} \{(\gamma-1)\sigma_{12}^2 x^{\gamma+2}/8 + (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/8 - NR/3 + B + N(m\beta_2 + em^2 K\beta_1 + em\delta) + emQNy\}$ 。

为了方便, 将 $\mathbf{R}_+^2 \setminus U$ 分成 4 个区域, 分别为 $U_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : 0 < x < \xi\}$ 、 $U_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : 0 < y < \xi\}$ 、 $U_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : x > 1/\xi\}$ 、 $U_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 : y > 1/\xi\}$ 。

接下来证明, 在 $\mathbf{R}_+^2 \setminus U$ 上有 $LV(x, y) \leq -1$ 。

情形 1 对任意的 $(x, y) \in U_1$, 有

$$\begin{aligned} LV \leq & -NR/3 - \{(1-\gamma)\sigma_{22}^2/4 - N[m\beta_2/a + em^2 K\beta_1/(a^2c) + (em\delta + emQ)/a]\xi\}y^{\gamma+2} + \\ & N[m\beta_2/a + em^2 K\beta_1/(a^2c) + (em\delta + emQ)/a]\xi + B \leq \\ & -NR/3 + N[m\beta_2/a + em^2 K\beta_1/(a^2c) + (em\delta + emQ)/a]\xi + B \leq -1. \end{aligned} \quad (4)$$

情形 2 对任意的 $(x, y) \in U_2$, 有

$$LV \leq -NR/3 + N[m\beta_2/a + em^2 K\beta_1/(a^2c) + (em\delta + emQ)/a]\xi \leq -1. \quad (5)$$

情形 3 对任意的 $(x, y) \in U_3$, 有

$$\begin{aligned} LV \leq & (\gamma-1)\sigma_{12}^2 x^{\gamma+2}/8 - (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/8 - (\gamma-1)\sigma_{12}^2 x^{\gamma+2}/8 - (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/8 - \\ & NR/3 + N[m\beta_2 + em^2 K\beta_1/(ac) + em\delta]y + emQNy^\gamma + B \leq [(\gamma-1)\sigma_{12}^2/8]\xi^{\gamma+2} + D \leq -1. \end{aligned} \quad (6)$$

情形 4 对任意的 $(x, y) \in U_4$, 有

$$\begin{aligned} LV \leq & (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/8 + (\gamma-1)\sigma_{22}^2 y^{\gamma+2}/8 + (\gamma-1)\sigma_{12}^2 x^{\gamma+2}/8 - NR/3 + \\ & N[m\beta_2 + em^2 K\beta_1/(ac) + em\delta]y + emQNy^\gamma + B \leq [(\gamma-1)\sigma_{12}^2/8]\xi^{\gamma+2} + D \leq -1. \end{aligned} \quad (7)$$

由式 (4)~式 (7) 可得, 对任意的 $(x, y) \in \mathbf{R}_+^2 \setminus U$, 有 $LV(x, y) \leq -1$, 因此模型 (2) 存在唯一的遍历平稳分布。

3 灭绝性

定理 3 如果 $r < \sigma_{11}^2/2$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 即食饵种群几乎必然灭绝。

证明 由 Itô's 公式可得, $d \ln x(t) = \{r - rx/K - rn/(x+h) - m(1-\delta y)y/[a+(1-\delta y)x] - (\sigma_{11} + \sigma_{12}x)^2/2\}dt + (\sigma_{11} + \sigma_{12}x)dB_1(t)$, 对其两端在 $[0, t]$ 上积分可得, $\ln x(t) - \ln x(0) = (r -$

$$\sigma_{11}^2/2)t - r \int_0^t x(s) ds/K - rn \int_0^t 1/[x(s) + h] ds - \sigma_{11}\sigma_{12} \int_0^t x(s) ds - m \int_0^t [1 - \delta y(s)]y(s)/\{a + [1 - \delta y(s)]x(s)\} ds - \sigma_{12}^2 \int_0^t x^2(s) ds/2 + \sigma_{11}B_1(t) + \sigma_{12} \int_0^t x(s) dB_1(s) \leq (r - \sigma_{11}^2/2)t - \sigma_{12}^2 \int_0^t x^2(s) ds/2 + \sigma_{11}B_1(t) + M_2(t),$$
 其中: $M_2(t) = \sigma_{12} \int_0^t x(s) dB_1(s)$; $\langle M_2, M_2 \rangle(t) = \sigma_{12}^2 \int_0^t x^2(s) ds$ 。

由指数鞅不等式^[16]可得, $P\{\sup_{0 \leq t \leq n} [M_2(t) - \langle M_2, M_2 \rangle(t)/2] > 2\ln n\} \leq 1/n^2$ 。再由 Borel-Cantelli 引理^[16]可知, $\sup_{0 \leq t \leq n} [M_2(t) - \langle M_2, M_2 \rangle(t)/2] \leq 2\ln n$, 即有 $M_2(t) \leq 2\ln n + \langle M_2, M_2 \rangle(t)/2 = 2\ln n + \sigma_{12}^2 \int_0^t x^2(s) ds/2$, 因此有 $\ln x(t) - \ln x(0) \leq (r - \sigma_{11}^2/2)t + \sigma_{11}B_1(t) + 2\ln n$ 。那么当 $0 \leq n-1 \leq t \leq n$ 时, 则有 $[\ln x(t) - \ln x(0)]/t \leq r - \sigma_{11}^2/2 + \sigma_{11}B_1(t)/t + 2\ln n/(n-1)$ 。由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} B_1(t)/t = 0$, 所以 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \ln x(t)/t \leq r - \sigma_{11}^2/2 < 0$, 从而有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$, 即食饵种群几乎必然灭绝。

4 数值模拟结果

为了验证上述理论结果, 本文采用 Milstein 高阶方法^[17]给出模型 (2) 的数值模拟结果。选取参数 $r=1$ 、 $K=1.2$ 、 $a=0.01$ 、 $c=0.012$ 、 $e=0.3$ 、 $m=0.2$ 、 $n=1.2$ 、 $h=1.12$ 、 $\delta=0.6$ 。对于随机模型 (2), 取 $\sigma_{11}=0.01$ 、 $\sigma_{12}=0.03$ 、 $\sigma_{21}=0.02$ 、 $\sigma_{22}=0.04$, 则计算可得 $R=0.1176 > 0$, 由定理 2 可知, 模型 (2) 存在唯一的平稳分布 (见图 1~图 2)。

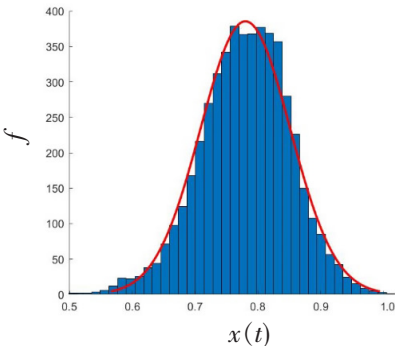


图 1 食饵种群的密度函数

Fig.1 Density function of bait population

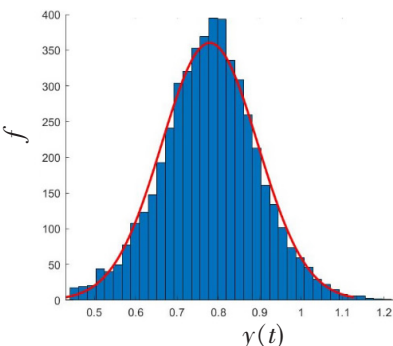


图 2 捕食者种群的密度函数

Fig.2 Density function of predator population

取 $x(0) = 1.8$ 、 $r=0.3$ 、 $\sigma_{11}=0.8$, 由定理 3 可知, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ (见图 3)。

取 $x(0) = 2.5$ 、 $r=0.5$ 、 $K=1.05$ 、 $a=0.1$ 、 $c=0.012$ 、 $e=0.3$ 、 $m=0.2$ 、 $n=1.2$ 、 $h=1.12$ 、 $\delta=0.6$ 。由图 4 可知, Allee 效应对食饵种群产生了不利的影响。

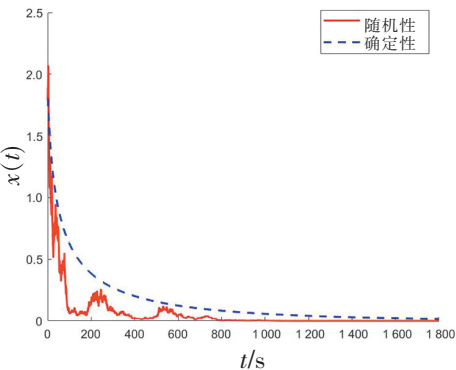


图 3 确定模型 (1) 和随机模型 (2) 中 $x(t)$ 的样本路径

Fig.3 Sample path of deterministic model and stochastic model

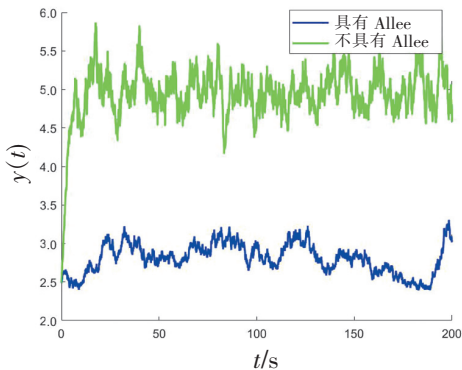


图 4 具有 Allee 效应和不具有 Allee 效应的食饵种群的样本路径

Fig.4 Sample path of bait population with and without Allee effect

[参考文献]

- [1] LOTKA A J. Analytical note on certain rhythmic relations in organic systems[J]. Proceeding of the National Academy of Sciences, 1920, 6: 410-415.
- [2] VOLTERA V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically[J]. Nature, 1926, 118(2972): 558-560.
- [3] 陈哲文, 魏春金, 张树文. 具有心理效应的随机扰动捕食-食饵模型[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2020, 25(1): 69-75.
- [4] 黄幼林, 魏春金, 张树文. 周期随机捕食-食饵系统的周期解的存在性[J]. 集美大学学报(自然科学版), 2022, 27(2): 171-180.
- [5] LU W L, XIA Y H. Multiple periodicity in a predator-prey model with prey refuge[J]. Mathematics, 2022, 421(10): 1-13.
- [6] QI H K, MENG X Z. Threshold behavior of a stochastic predator-prey system with prey refuge and fear effect[J]. Applied Mathematics Letters, 2021, 113: 106846.
- [7] GHOSH J, SAHOO B, PORIA W. Predator-prey dynamics with prey refuge providing additional food to predator[J]. Chaos Solitons and Fractals, 2017, 96: 110-119.
- [8] MOLLA H, SARWARDI S, SMITH S R, et al. Dynamics of adding variable prey refuge and an Allee effect to a predator-prey model[J]. Alexandria Engineering Journal, 2022, 61: 4175-4188.
- [9] ALLEE W C. Animal aggregations: a study in general sociology[M]. Chicago: University of Chicago Press, 1931.
- [10] LIU H, YE Y, WEI Y M, et al. Pattern formation in a reaction-diffusion predator-prey model with weak Allee effect and delay[J]. Complexity, 2019, 2020: 1-5.
- [11] WANG W, ZHU Y N, CAI Y, et al. Dynamical complexity induce by Allee effect in a predator-prey model[J]. Nonlinear Analysis, 2014, 16: 103-119.
- [12] TEIXEIRA A M, HILKER F M. Hunting cooperation and Allee effects in predators[J]. Journal of Theoretical Biology, 2017, 419: 13-22.
- [13] QI H K, MENG X Z, HAYAT T, et al. Stationary distribution of a stochastic predator-prey model with hunting cooperation[J]. Applied Mathematics Letters, 2022, 124: 107662.
- [14] LI J, LIU X H, WEI C J. The impact of role reversal on the dynamics of predator-prey model with stage structure[J]. Applied Mathematics Modelling, 2022, 104: 339-357.
- [15] LIU Q, JIANG D. Influence of the fear factor on the dynamics of a stochastic predator-prey model[J]. Applied Mathematics Letters, 2021, 112: 106756.
- [16] MAO X R. Stochastic differential equations and applications[M]. Chichester: Horwood Publishing, 1997.
- [17] HIGHAM D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. SIAM Review, 2001, 43: 525-546.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)