

RLW 方程六阶空间精度的线性守恒差分格式

付天浩^{1,2}, 王晓峰^{1,2}, 刘佳垚^{1,2}, 付瑶^{1,2}

(1. 闽南师范大学数学与统计学院, 福建 漳州 363000; 2. 福建省粒计算及其重点实验室, 福建 漳州 363000)

[摘要] 对正则长波(RLW)方程建立一个具有高精度的三层隐式差分格式, 该格式具有二阶时间精度和六阶空间精度, 且在离散意义下能够合理地模拟原问题的质量守恒和能量守恒。采用离散能量法和 Von Neumann 分析法证明了所构造数值格式的收敛性和稳定性。数值算例验证了所建格式的有效性, 且该格式明显优于其他数值格式。

[关键词] 正则长波(RLW)方程; 线性差分格式; 六阶精度; 收敛性; 稳定性

[中图分类号] O 241.82

A Linear Conservative Difference Scheme with Six-Order Spatial Accuracy for the RLW Equation

FU Tianhao^{1,2}, WANG Xiaofeng^{1,2}, LIU Jiayao^{1,2}, FU Yao^{1,2}

(1. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China;

2. Fujian Key Laboratory of Granular Computing and Applications, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: A three-level implicit difference scheme with high-order spatial accuracy is proposed for the regularised long wave (RLW) equation. The proposed scheme has second-order temporal accuracy and sixth-order spatial accuracy. Also, the scheme can reasonably simulate the mass conservation and energy conservation of the original problem in discrete sense. The convergence and stability of the proposed numerical scheme are proved using the discrete energy method and Von Neumann analysis. Numerical example is given to verify the validity of the proposed scheme and the scheme is obviously better than other numerical schemes.

Keywords: regularised long wave (RLW) equation; linear difference scheme; sixth-order accuracy; convergence; stability

0 引言

正则长波(RLW)方程也称之为 Benjamin-Bona-Mahony (BBM) 方程^[1], 最初由 Peregrine^[2]提出, 用于描述波状孔的行为, 并作为由一端的造波器在均匀的明渠中产生的小但有限振幅的长水波模型^[1]。在非线性色散介质的传播中, 该方程因能够模拟大量重要的非线性物理现象(如浅水波、离子波等)而备受关注。由于 RLW 方程中包含非线性项 uu_x , 不易得到其精确解, 许多学者致力于研究 RLW 方程初边值问题的数值方法。当前许多学者已经利用如变分迭代法^[3]、无网格法^[4]、有限元法^[5]等数值技术求解 RLW 方程。此外, 利用有限差分法求解 RLW 方程的研究也引起了学者们极大

[收稿日期] 2023-11-09

[基金项目] 福建省自然科学基金项目(2020J01796)

[通信作者] 王晓峰(1977—), 教授, 硕导, 从事微分方程数值解研究。E-mail: wxfmeng@163.com

的兴趣。Zhang^[6]对广义正则长波方程 (GRLW) 的柯西问题提出了具有二阶精度的守恒差分格式。随后, Achouri 等^[7]对 BBM 方程提出了一种在离散 H^1 -范数下具有二阶精度的 Crank-Nicolson 有限差分格式。为进一步提高格式精度, Zheng 等^[8]和 Hu 等^[9]先后提出两层非线性和三层线性的守恒差分格式求解 RLW 方程, 具有二阶时间精度和四阶空间精度。刘佳垚等^[10]对 RLW 方程构造了一种能量守恒的三层外推型线性差分格式。值得注意的是, 郭祯等^[11]借助理查德森外推法提出了一个具有六阶空间精度的 Crank-Nicolson 守恒差分格式求解 KdV 方程。受此启发, 考虑对 RLW 方程直接建立一个具有六阶空间精度的线性守恒差分格式, 以进一步提高其理论精度。

考虑如下 RLW 方程的初边值问题^[12]:

$$u_t - u_{xxt} + \mu u_x + uu_x = 0, \quad x_l \leq x \leq x_r, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x_l \leq x \leq x_r, \quad (2)$$

$$u(x_l, t) = 0, u(x_r, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

其中: μ 为正常数, $u_0(x)$ 是给定的光滑函数。容易验证, 式(1)~(3)具有如下守恒性^[12], 即

$$Q(t) = \int_{x_l}^{x_r} u(x, t) dx = \int_{x_l}^{x_r} u_0(x) dx = Q(0), \quad (4)$$

$$E(t) = \|u\|_{L^2}^2 + \mu \|u_x\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2 + \mu \|(u_0)_x\|_{L^2}^2 = E(0), \quad t > 0. \quad (5)$$

对式(1)~(3)建立一个具有高精度的三层线性差分格式, 所建格式具有二阶时间精度和六阶空间精度, 且能够很好地模拟式(4)和式(5), 并证明了所构造数值格式的收敛性与稳定性。最后通过数值算例验证了格式的有效性。

1 差分格式的构造

记剖分区域为 $[x_l, x_r] \times [0, T]$, 时间步长为 τ , $t_n = n\tau (0 \leq n \leq N)$, $N = [T/\tau]$, $x_j = x_l + jh (0 \leq j \leq J)$, $h = (x_r - x_l)/J$ 为空间步长。设 $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$ 为近似解, 记 $Z_h^0 = \{u = (u_j) \mid u_{-2} = u_{-1} = u_0 = u_1 = u_{J-1} = u_J = u_{J+1} = u_{J+2} = 0, -2 \leq j \leq J+2\}$ 。

对任意的 $u^n, v^n \in Z_h^0$, 进一步定义如下符号: $(u_j^n)_t = (u_j^{n+1} - u_j^{n-1})/(2\tau)$, $(u_j^n)_x = (u_{j+1}^n - u_j^n)/h$, $(u_j^n)_{\bar{x}} = (u_j^n - u_{j-1}^n)/h$, $u^{\frac{1}{2}} = (u^0 + u^1)/2$, $(u_j^n)_{\dot{x}} = (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)/(2h)$, $(u_j^n)_{\ddot{x}} = (u_{j+2}^n - u_{j-2}^n)/(4h)$, $(u_j^n)_{\ddot{x}} = (u_{j+3}^n - u_{j-3}^n)/(6h)$, $\bar{u}_j^n = (u_j^{n+1} + u_j^{n-1})/2$, $(u_j^n)_{x\bar{x}} = (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)/h^2$, $(u_j^n)_{\dot{x}\dot{x}} = (u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n)/(4h^2)$, $(u_j^n)_{\ddot{x}\ddot{x}} = (u_{j+3}^n - u_{j-1}^n - u_{j+1}^n + u_{j-3}^n)/(8h^2)$, $\langle u^n, v^n \rangle = h \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n v_j^n$, $\|u^n\|^2 = \langle u^n, u^n \rangle$, $\|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq J} |u_j^n|$ 。

接下来考虑对 RLW 方程构造具有六阶空间精度的线性差分格式, 首先给出如下高阶 Taylor 展开式。

引理 1^[11] 若函数 $u(x)$ 足够光滑, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 则有 $3(u_j)_{\dot{x}}/2 - 3(u_j)_{\bar{x}}/5 + (u_j)_{\ddot{x}}/10 = (du)/(dx)|_{x=x_j} + O(h^6)$ 。

引理 2 若函数 $u(x)$ 足够光滑, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 则有 $\frac{68}{45}(u_j)_{\ddot{x}\ddot{x}} - \frac{3}{5}(u_j)_{\dot{x}\dot{x}} + \frac{4}{45}(u_j)_{\ddot{x}\ddot{x}} = \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x=x_j} + O(h^6)$ 。

证明 根据 Taylor 公式展开可得 $(u_j)_{x\bar{x}} = \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x=x_j} + \frac{h^2}{12} \frac{d^4 u}{dx^4} \Big|_{x=x_j} + \frac{h^4}{360} \frac{d^6 u}{dx^6} \Big|_{x=x_j} + O(h^6)$, $(u_j)_{\dot{x}\dot{x}} = \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x=x_j} + \frac{h^2}{3} \frac{d^4 u}{dx^4} \Big|_{x=x_j} + \frac{2h^4}{45} \frac{d^6 u}{dx^6} \Big|_{x=x_j} + O(h^6)$, 以及 $(u_j)_{\ddot{x}\ddot{x}} = \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x=x_j} + \frac{5h^2}{6} \frac{d^4 u}{dx^4} \Big|_{x=x_j} + \frac{91h^4}{360} \frac{d^6 u}{dx^6} \Big|_{x=x_j} + O(h^6)$, 从而有 $\frac{68}{45}(u_j)_{\ddot{x}\ddot{x}} - \frac{3}{5}(u_j)_{\dot{x}\dot{x}} + \frac{4}{45}(u_j)_{\ddot{x}\ddot{x}} = \frac{d^2 u}{dx^2} \Big|_{x=x_j} + O(h^6)$ 。

应用引理 1 及引理 2, 考虑对式(1)~(3)构造差分格式为

$$(u_j^n)_i - \mu[68(u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}i}/45 - 3(u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}i}/5 + 4(u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}i}/45] + [3(\bar{u}_j^n)_{\bar{x}}/2 - 3(\bar{u}_j^n)_{\bar{x}}/5 + (\bar{u}_j^n)_{\bar{x}}/10] + [3\psi_1(u_j^n, \bar{u}_j^n)/2 - 3\psi_2(u_j^n, \bar{u}_j^n)/5 + \psi_3(u_j^n, \bar{u}_j^n)/10] = 0, \quad 1 \leq j \leq J-1, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (6)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq J, \quad (7)$$

$$u^n \in Z_h^0, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (8)$$

其中: $\psi_1(u_j^n, \bar{u}_j^n) = [u_j^n (\bar{u}_j^n)_{\bar{x}} + (u_j^n \bar{u}_j^n)_{\bar{x}}]/3$; $\psi_2(u_j^n, \bar{u}_j^n) = [u_j^n (\bar{u}_j^n)_{\bar{x}} + (u_j^n \bar{u}_j^n)_{\bar{x}}]/3$; $\psi_3(u_j^n, \bar{u}_j^n) = [u_j^n (\bar{u}_j^n)_{\bar{x}} + (u_j^n \bar{u}_j^n)_{\bar{x}}]/3$ 。

由于格式(6)~(8)在时间上是三层的, 且为隐式格式, 需先通过格式 $(u_j^0)_i - \mu[68(u_j^0)_{\bar{x}\bar{x}i}/45 - 3(u_j^0)_{\bar{x}\bar{x}i}/5 + 4(u_j^0)_{\bar{x}\bar{x}i}/45] + 3(u_j^{\frac{1}{2}})_{\bar{x}}/2 - 3(u_j^{\frac{1}{2}})_{\bar{x}}/5 + (u_j^{\frac{1}{2}})_{\bar{x}}/10 + 3\psi_1(u_j^0, u_j^{\frac{1}{2}})/2 - 3\psi_2(u_j^0, u_j^{\frac{1}{2}})/5 + \psi_3(u_j^0, u_j^{\frac{1}{2}})/10 = 0, \quad 1 \leq j \leq J-1$, 求解出 u^1 才能执行计算。

2 差分格式的守恒性

本节考虑所构造数值格式(6)~(8)守恒性的证明, 先给出如下引理。

引理3^[13-14] 对任意的 $u^n, v^n \in Z_h^0$, 有 $\langle u_x^n, v^n \rangle = -\langle u^n, v_x^n \rangle, \langle u_x^n, v^n \rangle = -\langle u^n, v_x^n \rangle, \langle u_{xx}^n, v^n \rangle = -\langle u^n, v_{xx}^n \rangle, \langle u_{xx}^n, v^n \rangle = -\langle u^n, v_{xx}^n \rangle, \langle u_{xx}^n, v^n \rangle = -\langle u^n, v_{xx}^n \rangle$ 。当 $u^n = v^n$ 时, 有 $\langle u_x^n, u^n \rangle = 0, \langle u_{xx}^n, u^n \rangle = 0, \langle u_{xx}^n, u^n \rangle = 0, \langle u_{xx}^n, u^n \rangle = -\|u_{xx}^n\|^2, \langle u_{xx}^n, u^n \rangle = -\|u_{xx}^n\|^2$ 。

引理4 对任意的 $u^n, v^n \in Z_h^0$, 有 $\langle u_{xx}^n, v^n \rangle = -\langle u_x^n, v_x^n \rangle$ 。当 $v^n = u^n$ 时, 进一步有 $\langle u_{xx}^n, u^n \rangle = -\langle u_x^n, u_x^n \rangle$ 。

证明 根据内积的定义及边界条件, 对任意的 $u^n, v^n \in Z_h^0$, 有 $\langle u_{xx}^n, v^n \rangle = h \sum_{j=1}^{J-1} \frac{1}{8h^2} (u_{j+3}^n - u_{j+1}^n - u_{j-1}^n + u_{j-3}^n) v_j^n = \frac{1}{8h} \sum_{j=1}^{J-1} (u_{j+3}^n - u_{j-1}^n) v_j^n - \frac{1}{8h} \sum_{j=1}^J (u_{j+1}^n - u_{j-3}^n) v_j^n = \frac{1}{8h} \sum_{j=2}^J (u_{j+2}^n - u_{j-2}^n) v_{j-1}^n - \frac{1}{8h} \sum_{j=0}^{J-1} (u_{j+2}^n - u_{j-2}^n) v_{j+1}^n = -h \sum_{j=1}^{J-1} \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} \right) \left(\frac{u_{j+2}^n - u_{j-2}^n}{4h} \right) = -\langle u_x^n, v_x^n \rangle$ 。当 $v^n = u^n$ 时, 则有 $\langle u_{xx}^n, u^n \rangle = -\langle u_x^n, u_x^n \rangle$ 。

引理5^[13-14] 对任意的 $u^n \in Z_h^0$, $\langle \psi_1(u^n, \bar{u}^n), \bar{u}^n \rangle = 0, \langle \psi_2(u^n, \bar{u}^n), \bar{u}^n \rangle = 0, \langle \psi_3(u^n, \bar{u}^n), \bar{u}^n \rangle = 0$ 。

引理6^[13-14] 对任意的 $u^n \in Z_h^0$, 恒有 $\|u_x^n\|^2 \leq \|u_x^n\|^2 \leq \|u_x^n\|^2$ 及 $\|u_{xx}^n\|^2 \leq \|u_{xx}^n\|^2$ 。

下面将详细证明所构造数值格式(6)~(8)的离散质量守恒和能量守恒。

定理1 设 $u_0 \in H_0^2[x_l, x_r]$, 则格式(6)~(8)是离散质量和能量守恒的, 即 $Q^n = Q^{n-1} = \dots = Q^0, E^n = E^{n-1} = \dots = E^0$ 。其中: $Q^n = \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} + u_j^n) + \frac{h\tau}{4} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n (u_j^{n+1})_{\bar{x}} - \frac{h\tau}{10} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n (u_j^{n+1})_{\bar{x}} + \frac{h\tau}{60} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n (u_j^{n+1})_{\bar{x}}, E^n = \frac{1}{2} (\|u^{n+1}\|^2 + \|u^n\|^2) + \frac{34\mu}{45} (\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2) - \frac{3\mu}{10} (\|u_{xx}^{n+1}\|^2 + \|u_{xx}^n\|^2) + \frac{2\mu}{45} (\langle u_x^{n+1}, u_x^{n+1} \rangle + \langle u_x^n, u_x^n \rangle)$ 。

证明 将式(6)两端同时乘以 h 后, 对 j 从 1 到 $J-1$ 求和, 则有 $h \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n)_i - \mu h \sum_{j=1}^{J-1} \left[\frac{68}{45} (u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}i} - \frac{3}{5} (u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}i} + \frac{4}{45} (u_j^n)_{\bar{x}\bar{x}i} \right] + \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} (\bar{u}_j^n)_{\bar{x}} - \frac{3}{5} h \sum_{j=1}^{J-1} (\bar{u}_j^n)_{\bar{x}} + \frac{1}{10} h \sum_{j=1}^{J-1} (\bar{u}_j^n)_{\bar{x}} + \frac{3}{2} h \sum_{j=1}^{J-1} \psi_1(u_j^n, \bar{u}_j^n) - \frac{3}{5} h \sum_{j=1}^{J-1} \psi_2(u_j^n, \bar{u}_j^n) + \frac{1}{10} h \sum_{j=1}^{J-1} \psi_3(u_j^n, \bar{u}_j^n) = 0$ 。由式(8)和引理3, 可得 $\frac{h}{2\tau} \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} - u_j^{n-1}) + \frac{h}{4} \sum_{j=1}^{J-1} [u_j^n (u_j^{n+1})_{\bar{x}} - u_j^{n-1} (u_j^n)_{\bar{x}}] - \frac{h}{10} \sum_{j=1}^{J-1} [u_j^n (u_j^{n+1})_{\bar{x}} - u_j^{n-1} (u_j^n)_{\bar{x}}] + \frac{h}{60} \sum_{j=1}^{J-1} [u_j^n (u_j^{n+1})_{\bar{x}} - u_j^{n-1} (u_j^n)_{\bar{x}}] = 0$, 整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} + u_j^n) + \frac{h\tau}{4} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n (u_j^{n+1})_{\dot{x}} - \frac{h\tau}{10} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n (u_j^{n+1})_{\ddot{x}} + \frac{h\tau}{60} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^n (u_j^{n+1})_{\ddot{\ddot{x}}} = \\ & \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n + u_j^{n-1}) + \frac{h\tau}{4} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^{n-1} (u_j^n)_{\dot{x}} - \frac{h\tau}{10} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^{n-1} (u_j^n)_{\ddot{x}} + \frac{h\tau}{60} \sum_{j=1}^{J-1} u_j^{n-1} (u_j^n)_{\ddot{\ddot{x}}}。 \end{aligned} \quad (9)$$

对式(9)递推可得 $Q^n = Q^{n-1} = \cdots = Q^0$ 。将式(6)与 $2\bar{u}^n$ 作内积,由引理3~5可得 $\|u^n\|_i^2 + 68\mu(\|u_x^n\|_i^2)/45 - 3\mu(\|u_x^n\|_i^2)/5 - 4\mu(\langle u_{\dot{x}\dot{x}}^n, 2\bar{u}^n \rangle)/45 = 0$, 整理可得

$$\begin{aligned} & (\|u^{n+1}\|^2 + \|u^n\|^2)/2 + 34\mu(\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2)/45 - 3\mu(\|u_x^{n+1}\|^2 + \|u_x^n\|^2)/10 + \\ & 2\mu(\langle u_x^{n+1}, u_x^{n+1} \rangle + \langle u_x^n, u_x^n \rangle)/45 = (\|u^n\|^2 + \|u^{n-1}\|^2)/2 + 34\mu(\|u_x^n\|^2 + \|u_x^{n-1}\|^2)/45 - \\ & 3\mu(\|u_x^n\|^2 + \|u_x^{n-1}\|^2)/10 + 2\mu(\langle u_x^n, u_x^n \rangle + \langle u_x^{n-1}, u_x^{n-1} \rangle)/45。 \end{aligned} \quad (10)$$

由 E^n 的定义,对式(10)递推可得 $E^n = E^{n-1} = \cdots = E^0$ 。

3 差分格式的收敛性和稳定性

本节将详细分析所构造数值格式(6)~(8)的收敛性和稳定性情况。

引理7^[13-14] (离散 Growall 不等式) 假设 $\{G^n | n \geq 0\}$ 是非负数列,且满足 $G^0 \leq A$, $G^n \leq A +$

$B\tau \sum_{i=1}^{n-1} G^i, n = 1, 2, \cdots$ 。其中: A 和 B 均为非负数,则 $G^n = Ae^{Bn\tau}, n = 0, 1, 2, \cdots$ 。

引理8^[13-14] (离散 Sobolev 不等式) 存在常数 C_1, C_2 ,使得 $\|u^n\|_\infty \leq C_1 \|u^n\|^2 + C_2 \|u_x^n\|^2$ 。

定理2 设 $u_0 \in H_0^2[x_l, x_r]$, 格式(6)~(8)的解 u^n 依 L^∞ -范数收敛到原问题式(1)~(3)的解,收敛阶为 $O(\tau^2 + h^6)$ 。

证明 令 $e^n = U^n - u^n$, 其中 $U_j^n = u(x_j, t_n)$, 则格式(6)~(8)的截断误差为

$$\begin{aligned} r_j^n &= (e_j^n)_i - 68\mu(e_j^n)_{\dot{x}\dot{x}}/45 + 3\mu(e_j^n)_{\dot{x}\dot{x}}/5 - 4\mu(e_j^n)_{\dot{x}\dot{x}}/45 + 3(\bar{e}_j^n)_{\dot{x}}/2 - 3(\bar{e}_j^n)_{\dot{x}}/5 + \\ & (\bar{e}_j^n)_{\dot{x}}/10 + 3[\psi_1(U_j^n, \bar{U}_j^n) - \psi_1(u_j^n, \bar{u}_j^n)]/2 - 3[\psi_2(U_j^n, \bar{U}_j^n) - \psi_2(u_j^n, \bar{u}_j^n)]/5 + \\ & [\psi_3(U_j^n, \bar{U}_j^n) - \psi_3(u_j^n, \bar{u}_j^n)]/10, 1 \leq j \leq J-1, 1 \leq n \leq N-1。 \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)中: $e_j^0 = 0, 1 \leq j \leq J, e^n \in Z_h^n, 0 \leq n \leq N$ 。由 Taylor 展开可知, $\max_{j,n} |r_j^n| \leq C(\tau^2 + h^6)$, 其中常数 C 不依赖于 τ 和 h 。将式(11)与 $2\bar{e}^n$ 作内积,由引理3和引理4可得

$$\begin{aligned} \langle r^n, 2\bar{e}^n \rangle &= \|e^n\|_i^2 + 68\mu\|e_x^n\|_i^2/45 - 3\mu\|e_x^n\|_i^2/5 - 4\mu(\langle e_{\dot{x}\dot{x}}^n, 2\bar{e}^n \rangle)/45 + 3\langle \psi_1(U^n, \bar{U}^n) - \psi_1(u^n, \bar{u}^n), \\ & 2\bar{e}^n \rangle/2 - 3\langle \psi_2(U^n, \bar{U}^n) - \psi_2(u^n, \bar{u}^n), 2\bar{e}^n \rangle/5 + \langle \psi_3(U^n, \bar{U}^n) - \psi_3(u^n, \bar{u}^n), 2\bar{e}^n \rangle/10。 \end{aligned} \quad (12)$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式^[15]及引理6,可得

$$\langle r^n, 2\bar{e}^n \rangle \leq \|r^n\|^2 + (\|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2)/2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 3\langle \psi_1(U^n, \bar{U}^n) - \psi_1(u^n, \bar{u}^n), 2\bar{e}^n \rangle/2 &= 3h \sum_{j=1}^{J-1} \left\{ \frac{1}{3} [U_j^n (\bar{U}_j^n)_{\dot{x}} + (U_j^n \bar{U}_j^n)_{\dot{x}}] - \frac{1}{3} [u_j^n (\bar{u}_j^n)_{\dot{x}} + (u_j^n \bar{u}_j^n)_{\dot{x}}] \right\} \bar{e}^n = \\ & h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n (\bar{e}_j^n)_{\dot{x}} \bar{e}_j^n + h \sum_{j=1}^{J-1} e_j^n (\bar{u}_j^n)_{\dot{x}} \bar{e}_j^n - h \sum_{j=1}^{J-1} U_j^n (\bar{e}_j^n)_{\dot{x}} \bar{e}_j^n - h \sum_{j=1}^{J-1} e_j^n (\bar{e}_j^n)_{\dot{x}} \bar{u}_j^n \leq C(\|e_x^{n+1}\|^2 + \\ & \|e_x^{n-1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 + \|e^n\|^2)。 \end{aligned} \quad (14)$$

同理可得

$$-3\langle \psi_2(U^n, \bar{U}^n) - \psi_2(u^n, \bar{u}^n), 2\bar{e}^n \rangle/5 \leq C(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 + \|e^n\|^2), \quad (15)$$

$$\langle \psi_3(U^n, \bar{U}^n) - \psi_3(u^n, \bar{u}^n), 2\bar{e}^n \rangle/10 \leq C(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 + \|e^n\|^2)。 \quad (16)$$

将式(13)~式(16)代入式(12),可得

$$\begin{aligned} \|e^n\|_i^2 + 68\mu\|e_x^n\|_i^2/45 - 3\mu\|e_x^n\|_i^2/5 - 4\mu(\langle e_{\dot{x}\dot{x}}^n, 2\bar{e}^n \rangle)/45 &\leq C(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n-1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \\ & \|e^{n+1}\|^2 + \|e^{n-1}\|^2 + \|e^n\|^2) + \|r^n\|^2。 \end{aligned} \quad (17)$$

令

$$A^n = \|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + 68\mu(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2)/45 - 3\mu(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2)/5 + 4\mu(\langle e_x^{n+1}, e_x^{n+1} \rangle + \langle e_x^n, e_x^n \rangle)/45, \quad (18)$$

将式(17)从1到 n 累加, 则有

$$A^n \leq A^0 + C\tau \sum_{i=0}^{n+1} (\|e^i\|^2 + \|e_x^i\|^2) + 2\tau \sum_{i=1}^n \|r^i\|^2. \quad (19)$$

其中 τ 、 C 为正常数。由 Cauchy-Schwarz 不等式^[15]及引理6进一步可得

$$\langle e_x^{n+1}, e_x^{n+1} \rangle \geq -(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2)/2 \geq -\|e_x^{n+1}\|^2, \langle e_x^n, e_x^n \rangle \geq -(\|e_x^n\|^2 + \|e_x^n\|^2)/2 \geq -\|e_x^n\|^2. \quad (20)$$

将式(20)代入式(18), 同时结合 A^n 的定义及引理6, 则有

$$c_0(\|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2) \leq \|e^n\|^2 + \|e^{n+1}\|^2 + 37\mu(\|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2)/45 \leq A^n. \quad (21)$$

其中: $c_0 = \min(1, 37\mu/45)$ 。从而由式(19)~(21)可得 $\|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2 \leq A^0 +$

$$C\tau \sum_{i=0}^{n+1} (\|e^i\|^2 + \|e_x^i\|^2) + 2\tau \sum_{i=1}^n \|r^i\|^2. \text{ 令 } G^n = \|e^{n+1}\|^2 + \|e^n\|^2 + \|e_x^{n+1}\|^2 + \|e_x^n\|^2, \text{ 则有 } G^n \leq C\tau \sum_{i=0}^n G^i +$$

$$C\tau \sum_{i=1}^n \|r^i\|^2. \text{ 其中 } C\tau \sum_{i=1}^n \|r^i\|^2 \leq Cn\tau \max_{1 \leq i \leq n} \|r^i\|^2 \leq CT(\tau^2 + h^6)^2. \text{ 从而有}$$

$$G^n \leq C\tau \sum_{i=0}^n G^i + C(\tau^2 + h^6)^2. \quad (22)$$

式(22)进一步可写为 $(1 - C\tau)G^n \leq C\tau \sum_{i=0}^{n-1} G^i + C(\tau^2 + h^6)^2$, 当 τ 足够小, 使得 $1 - C\tau > 0$ 时, 则

有 $G^n \leq C\tau \sum_{i=0}^{n-1} G^i + C(\tau^2 + h^6)^2$ 。根据引理7可得 $G^n \leq C(\tau^2 + h^6)^2 e^{CT} \leq C(\tau^2 + h^6)^2$, 即 $\|e^n\| \leq C(\tau^2 + h^6)$, $\|e_x^n\| \leq C(\tau^2 + h^6)$, 再由引理8可得 $\|e^n\|_\infty \leq C(\tau^2 + h^6)$ 。

定理3 格式(6)~(8)是无条件稳定的。

证明 利用 Von Neumann 稳定性分析法, 令 $u_j^n = \varepsilon^n e^{ij\theta}$ (其中: $i^2 = -1$; θ 为波数), 从而有

$$(u_j^n)_i = (u_j^{n+1} - u_j^{n-1})/2\tau = \varepsilon^{n-1} e^{ij\theta} (\varepsilon^2 - 1)/2\tau, \quad (23)$$

$$(u_j^n)_{\hat{x}\hat{t}} = \varepsilon^{n-1} e^{ij\theta} (\varepsilon^2 \cos \theta - \cos \theta - \varepsilon^2 + 1)/\tau h^2, \quad (24)$$

$$(u_j^n)_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} = \varepsilon^{n-1} e^{ij\theta} (\varepsilon^2 \cos 2\theta - \cos 2\theta - \varepsilon^2 + 1)/\tau h^2, \quad (25)$$

$$(u_j^n)_{\hat{x}\hat{x}\hat{t}} = \varepsilon^{n-1} e^{ij\theta} (\varepsilon^2 \cos 3\theta - \cos 3\theta - \varepsilon^2 + 1)/\tau h^2, \quad (26)$$

$$(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}} = \varepsilon^{n-1} e^{ij\theta} (i\varepsilon^2 \sin \theta + i \sin \theta)/2h, \quad (27)$$

$$(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}} = \varepsilon^{n-1} e^{ij\theta} (i\varepsilon^2 \sin 2\theta + i \sin 2\theta)/4h, \quad (28)$$

$$(\bar{u}_j^n)_{\hat{x}} = \varepsilon^{n-1} e^{ij\theta} (i\varepsilon^2 \sin 3\theta + i \sin 3\theta)/6h, \quad (29)$$

$$\psi_1(u_j^n, \bar{u}_j^n) = u_j^n (\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n+1}) e^{ij\theta} (i \sin \theta + i \sin 2\theta)/3h, \quad (30)$$

$$\psi_2(u_j^n, \bar{u}_j^n) = u_j^n (\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n+1}) e^{ij\theta} (i \sin 2\theta + i \sin 4\theta)/6h, \quad (31)$$

$$\psi_3(u_j^n, \bar{u}_j^n) = u_j^n (\varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n+1}) e^{ij\theta} (i \sin 3\theta + i \sin 6\theta)/9h, \quad (32)$$

将式(23)~(32)代入式(6), 可得 $\varepsilon^2 = |(A - Bi)/(A + Bi)| \leq 1$ 。其中: $A = 1 - \frac{136\mu}{45h^2}(\cos \theta - 1) +$

$$\frac{3\mu}{10h^2}(\cos 2\theta - 1) - \frac{\mu}{45h^2}(\cos 3\theta - \cos \theta); B = \frac{3\tau}{2h} \sin \theta - \frac{3\tau}{10h} \sin 2\theta + \frac{\tau}{30h} \sin 3\theta + u_j^n \left[\frac{\tau}{h} (\sin \theta + \sin 2\theta) -$$

$$\frac{\tau}{5h} (\sin 2\theta + \sin 4\theta) + \frac{\tau}{45h} (\sin 3\theta + \sin 6\theta) \right]. \text{ 因此, 格式(6)~(8)是无条件稳定的。}$$

4 数值算例

本节将验证所构造数值格式(6)~(8)的守恒性和理论精度。首先给出如下误差的 L^∞ 范数定义 $\|e(\tau,h)\|_\infty=\|U^n-u^n\|_\infty=\max_{1\leq j\leq J-1}|U_j^n-u_j^n|$ ，然后给出时间和空间收敛阶的定义： $\text{Order1}=\log_2\left(\frac{\|e(\tau,h)\|_\infty}{\|e(\tau/2,h)\|_\infty}\right)$ ， $\text{Order2}=\log_2\left(\frac{\|e(\tau,h)\|_\infty}{\|e(\tau/8,h/2)\|_\infty}\right)$ 。已知式(1)~(3)的初始条件为 $u_0(x)=A\text{sech}^2(kx)$ ，则精确解取为 $u(x)=A\text{sech}^2(kx-\omega t)^{[12]}$ 。其中： $A=3a^2/(1-a^2)$ ； $k=a/2$ ； $\omega=a/2(1-a^2)$ 。

取 $\mu=1$ 、 $a=1/2$ 、 $x_l=-50$ 、 $x_r=50$ 进行计算。表1为 $h=0.01$ 、 $T=1$ 时，不同步长下时间上的误差和收敛精度；表2为 $T=10$ 时，不同空间步长下的误差和收敛精度。由表1、表2的数值结果可知，所建格式明显具有二阶时间精度和六阶空间精度。表3的数值结果说明本文格式能够合理地模拟定理1的离散质量守恒和能量守恒。表4为当 $h=0.1$ 、 $\tau=0.006\,25$ 时，不同时刻下本文格式与文献[9-10]的数值误差比较结果。由表4可知，所构造数值格式能够进一步减小误差，提高精度。因此，格式(6)~(8)是有效的，且明显优于其他数值格式。图1为当 $h=0.2$ 、 $\tau=0.05$ 和 $h=0.1$ 、 $\tau=0.006\,25$ 时，不同时刻的数值解。由图1可清晰地发现，不同时刻波形图的高度几乎相同，进一步说明了本文格式是稳定和守恒的。

表 1 不同 τ 下时间上的误差和收敛精度 ($h=0.01$ 、 $T=1$)
Tab.1 Errors and convergence accuracy of the scheme in time with difference τ sizes ($h=0.01$, $T=1$)

τ	$\ e(\tau,h)\ _\infty$	Order1
$\tau=0.1000$	3.2404×10^{-4}	—
$\tau=0.0500$	8.1095×10^{-5}	1.9985
$\tau=0.0250$	2.0275×10^{-5}	1.9999
$\tau=0.0125$	5.0683×10^{-6}	2.0001

表 2 不同步长下空间的误差和收敛精度 ($T=10$)
Tab.2 Error and convergence accuracy of the scheme in space with difference step sizes ($T=10$)

h,τ	$\ e(\tau,h)\ _\infty$	Order2
$h=0.40,\tau=0.400\,000\,00$	4.2552×10^{-2}	—
$h=0.20,\tau=0.050\,000\,00$	7.1567×10^{-4}	5.8938
$h=0.10,\tau=0.006\,250\,00$	1.1212×10^{-5}	5.9962
$h=0.05,\tau=0.000\,781\,25$	1.7523×10^{-7}	5.9997

表 3 在不同时刻下守恒量的数值模拟 ($h=0.1$ 、 $\tau=0.006\,25$)
Tab.3 Numerical simulations of the conserved quantities at different times ($h=0.1$, $\tau=0.006\,25$)

T	E^n	Q^n	离散 E^n	离散 Q^n
2	5.600 000 000 000 000	7.999 999 999 549 224	5.599 999 999 983 365	8.000 002 314 225 753
4	5.600 000 000 000 000	7.999 999 998 393 287	5.599 999 999 982 945	8.000 002 312 609 309
6	5.600 000 000 000 000	7.999 999 993 931 917	5.599 999 999 983 230	8.000 002 306 215 107
8	5.600 000 000 000 000	7.999 999 976 986 891	5.599 999 999 983 658	8.000 002 281 682 843
10	5.599 999 999 999 998	7.999 999 912 697 801	5.599 999 999 983 127	8.000 002 188 322 776

表 4 在不同时刻下本文格式与文献[9-10]的数值误差比较结果 ($h=0.1$ 、 $\tau=0.006\,25$)
Tab.4 Comparison of numerical error values at different times ($h=0.1$, $\tau=0.006\,25$)

T	格式(6)~(8)	文献[9]	文献[10]
1	1.2671×10^{-6}	1.4205×10^{-6}	1.1220×10^{-4}
5	6.3029×10^{-6}	6.9500×10^{-6}	5.4887×10^{-4}
10	1.1212×10^{-5}	1.2072×10^{-5}	9.3739×10^{-4}
15	1.5014×10^{-5}	1.6011×10^{-5}	1.2235×10^{-3}

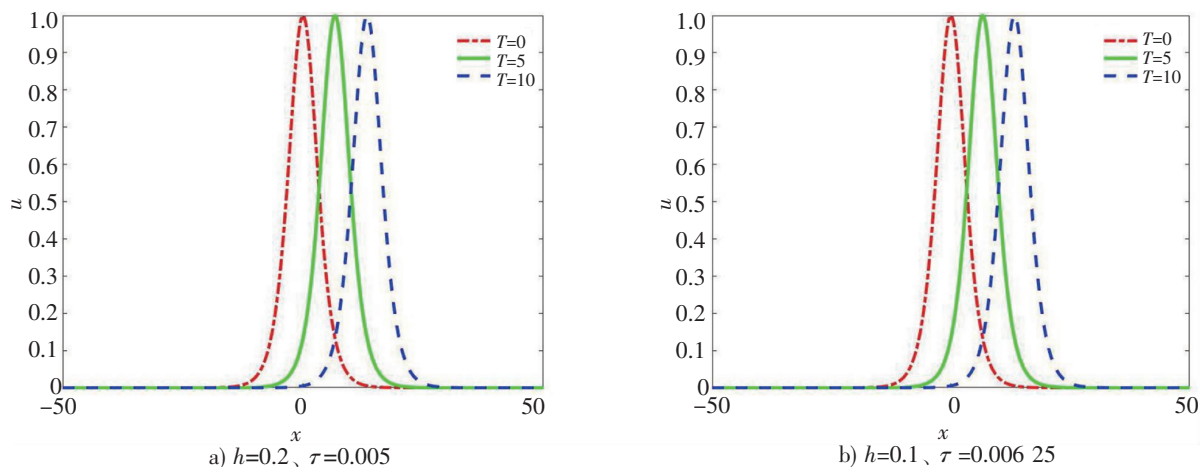


图1 当 $h=0.2$ 、 $\tau=0.05$ 和 $h=0.1$ 、 $\tau=0.00625$ 时,不同时刻的数值解

Fig.1 Numerical solutions at various time at $h=0.2$, $\tau=0.05$ and $h=0.1$, $\tau=0.00625$

[参 考 文 献]

- [1] BONA J L, BRYANT P J. A mathematical model for long waves generated by wavemakers in non-linear dispersive systems[C]// Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge: Cambridge University Press, 1973: 391-405.
- [2] PEREGRINE D H. Calculations of the development of an undular bore[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1966, 25(2): 321-330.
- [3] HE J H. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998, 167(1/2): 57-68.
- [4] HAQ S, ALI A. A meshfree method for the numerical solution of the RLW equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 223(2): 997-1012.
- [5] OMRANI K. The convergence of fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 180(2): 614-621.
- [6] ZHANG L. A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 168(2): 962-972.
- [7] ACHOURI T, KHIARI N, OMRANI K. On the convergence of difference schemes for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(2): 999-1005.
- [8] ZHENG K, HU J. High-order conservative Crank-Nicolson scheme for regularized long wave equation[J]. Advances in Difference Equations, 2013, 2013(1): 1-12.
- [9] HU J S, LI J J, WANG X. New high-order conservative difference scheme for the regularized long wave equation with Richardson extrapolation[J]. Thermal Science, 2019, 23(3): 737-745.
- [10] 刘佳垚, 王晓峰, 钟瑞华. 求解 RLW 方程的能量守恒有限差分格式[J]. 闽南师范大学学报(自然科学版), 2022, 35(2): 8-13.
- [11] 郭祯, 吴明明, 胡劲松. KdV 方程的一个六阶空间精度守恒差分格式[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2023, 60(3): 39-44.
- [12] SOLIMAN A A, HUSSEIN M H. Collocation solution for RLW equation with septic spline[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 161(2): 623-636.
- [13] AHLEM G, KHALED O. New conservative difference schemes with fourth-order accuracy for some model equation for nonlinear dispersive waves[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 356(1): 98-117.
- [14] WANG X, DAI W. A new implicit energy conservative difference scheme with fourth-order accuracy for the generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation[J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37: 6560-6581.
- [15] 张华民, 殷红彩, 梅红. Cauchy-Schwarz 不等式的一种推广[J]. 晋中学院学报, 2017, 34(3): 1-4.

(责任编辑 彭海滨 英文审校 黄振坤)