

非线性 Schrödinger 方程的五次 B-样条逼近

谢 烨, 梁宗旗

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 利用五次 B-样条配点有限元方法研究了经典的三次非线性 Schrödinger 方程. 在该格式中, 关于时间方向的离散是基于 Crank-Nicolson 差分格式, 而空间方向采用了分片五次 B-样条函数逼近, 其得到的刚度矩阵是一个分块五对角型矩阵. 同时, 利用线性稳定性分析方法证明了该格式是无条件稳定的. 通过数值例子, 验证了该格式保持了方程的守恒性质及具有较高的精度, 最后模拟了两个孤立子的碰撞.

[关键词] 非线性 Schrödinger 方程; B-样条; 数值逼近; 孤立子

[中图分类号] O 241.82

[文献标志码] A

Numerical Approach of the Nonlinear Schrödinger Equation by the Quintic B-Spline

XIE Ye, LIANG Zong-qi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the quintic B-spline collocation finite element method is implemented to find numerical solution of the classic cubic nonlinear Schrödinger equation. The scheme is based on the Crank-Nicolson formulation for time discretization and quintic B-spline functions for space discretization, and the stiffness matrix of the scheme is a block-five-diagonal matrix. The scheme is verified to be unconditionally stable by the method of linear stability analysis. By numerical examples, it is confirmed that the scheme keeps the conservative property of the equation preferably. Finally, the collision of two solitons is simulated.

Key words: nonlinear Schrödinger equation; B-spline; numerical approach; soliton

0 引言

非线性 Schrödinger 方程是一种典型的色散波动方程^[1], 这类方程从数学角度揭示了线性色散与非线性的交互作用, 同时也是研究光孤子特性的基本方程. 等离子体的 Langmuir 波、一维色散的自调制、二维定态平面波的自聚焦、超导电子对电磁场中的运动等都可以用非线性 Schrödinger 方程来描述. 非线性 Schrödinger 方程不仅具有无穷个守恒律, 存在 Backlund 变换和完全可积等特性, 同时利用散射反演法和修正映射等方法得到了该方程及带有克尔效应的非线性 Schrödinger 的精确解及其孤立子解^[2-7]. 为了考察孤立子的稳定性和相互作用, 一大批非线性进化方程的数值计算方法也随之应运而生, 因为是否保持原方程的守恒性和孤立子碰撞及是否改变其形态可以作为衡量和检验数值方

[收稿日期] 2014-05-15

[修回日期] 2014-10-12

[基金项目] 福建省自然科学基金资助项目 (2012J01013); 福建省高校科研专项基金资助项目 (JK2012025); 福建省科技厅重点课题 (2014H0034)

[作者简介] 谢烨 (1989—), 女, 硕士生, 从事计算数学方向研究. 通讯作者: 梁宗旗 (1964—), 男, 教授, 硕导, 从事计算数学方向研究, E-mail: zqliang@jmu.edu.cn.

法好坏的一个重要标尺.

本文研究如下的三次非线性 Schrödinger 方程的 Dirichlet 初边值问题:

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - q|u|^2u = 0, x \in \mathbf{R}, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $u(x, t)$ 是未知复值函数; $u_t = \partial u / \partial t$; $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$; $u_0(x)$ 是已知函数; $i^2 = -1$; q 为实常数, 如果 $q < 0$ 称为散焦, $q > 0$ 称为聚焦. 设 $u(x, t)$ 及其导数在 $x \rightarrow \pm \infty$ 时指数衰减为 0, 则方程的解满足如下的守恒律^[1]:

$$E_1 = \|u(x, t)\|^2 = \|u_0(x)\|^2, E_2 = \|u_x(x, t)\|^2 + q/2 \|u(x, t)\|_4^4 = \|u_x(x, 0)\|^2 + q/2 \|u(x, 0)\|_4^4. \quad (2)$$

其中 $\|\cdot\|$ 是通常的 L^2 模.

近几十年来, 许多学者对非线性 Schrödinger 方程在数值计算方法中的应用进行了广泛的研究: Delfour 等人^[8]提出了一个有限差分格式; Taha 等人^[9]总结和提出了 5 个有限差分格式和 2 种 Fourier 分裂法和拟谱方法; Sanz-Serna^[10]提出了“蛙跳格式”和改进的 Crank-Nicolson 格式, 并用半离散的方法讨论了守恒和不守恒的格式^[11]. 关于该方程有大量的数值方法研究文献, 如谱方法^[12]、拟谱方法^[13]、有限元方法^[14]、有限差分方法^[15-16]、多辛格式^[17]等等. 近年来 Bao 等^[18]利用分裂 Hermite 及 Legurrer 谱方法在研究非线性 Schrödinger 方程以及更广泛的 Gross-Pitaevskii 方程和 Bose-Einstein 凝聚态方程方面取得了突破性的进展.

B-样条是样条曲线一种特殊的表示形式, 由于其具有很好的支撑性、灵活性和光滑性, 被广泛应用于计算几何中. B-样条是贝兹曲线^[19]的一种一般化, 可以进一步推广为非均匀有理 B 样条 (NURBS), 使得能给更多一般的几何体建造精确的模型. 自从石钟慈^[20]基于均匀分划的 B 样条展开定理构造三次 B 样条基函数来表示位移场函数和应用最小势能原理导出样条有限元以来, 以三次和五次 B-样条基函数为逼近函数的计算方法得到了极大的发展, 如: 应用四、五、七次 B-样条方法求解 Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) 方程^[21-23]; 应用五次 B-样条求解混合 Korteweg-de Vries (CMKdV) 方程的数值解^[24]. 本文拟通过在空间方向采用五次 B-样条离散, 时间方向采用 Crank-Nicolson 差分格式离散的方法来求解非线性 Schrödinger 方程的数值解, 通过 Matlab 来实现数值解的计算.

1 五次 B-样条法

1.1 五次 B-样条的构建

问题 (1) 是定义在无界区域上的, 一般有 3 种方法求解无界区域问题: 1) 截取有限区间, 加入人工边界条件; 2) 利用 Hermite 谱方法或 Lagurrer 谱方法; 3) 通过映射将无界区域变为有界区域, 再利用有界区域的 Legendre 多项式或有理多项式逼近.

本文采用第一种方法, 即将问题 (1) 转化为有限区间 $[a, b]$ 上初边值问题, 其中 a, b 的选择取决于 $u(x, t)$ 的衰减情况. 这样原方程的 Dirichlet 初边值问题变为如下的问题:

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} - q|u|^2u = 0, x \in (a, b), 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in (a, b), \\ u(a, t) = u(b, t) = u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (3)$$

为了避免复数计算, 把 $u(x, t)$ 分解为实部和虚部两个部分, 即 $u(x, t) = v(x, t) + iw(x, t)$. 令 $\alpha = q|u|^2$, 原方程 (1) 变成: $iv_t - w_t + v_{xx} + iw_{xx} - \alpha v - \alpha iw = 0$ 或 $\begin{cases} v_t + w_{xx} - \alpha v = 0 \\ w_t - v_{xx} + \alpha v = 0 \end{cases}$. 令 $\vec{z} = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$, 方程 (1) 就变为:

$$\partial \vec{z} / \partial t + \mathbf{M} \partial^2 \vec{z} / \partial x^2 - \alpha \mathbf{M} \vec{z} = 0. \quad (4)$$

其中 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

本文将区间 $[a, b]$ 等分为 N 个有限单元, 步长 $h = (b - a)/N$, 节点为 x_i , $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$. 五次 B 样条集合 $\{B_{-2}(x), B_{-1}(x), \cdots, B_{N+2}(x)\}$ 构成定义在区间上的一组基函数. B 样条定义为:

$$B_i(x) = (1/h^5) \begin{cases} (x - x_{i-3})^5, x \in [x_{i-3}, x_{i-2}], \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5, x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5, x \in [x_{i-1}, x_i], \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - 20(x - x_i)^5, x \in [x_i, x_{i+1}], \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - 20(x - x_i)^5 + 15(x - x_{i+1})^5, \\ \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - 20(x - x_i)^5 + 15(x - x_{i+1})^5 - \\ \quad 6(x - x_{i+2})^5, x \in [x_{i+2}, x_{i+3}], \\ 0, \text{其他 } x \notin [x_{i-3}, x_{i+3}]. \end{cases} \quad (5)$$

其中 $h = x_{i+1} - x_i, i = -2, -1, \cdots, N+2$.

设原方程解的方程式为: $\vec{Z} = \sum_{i=-2}^{N+2} \vec{\delta}_i B_i(x)$, 其中 $\vec{\delta}_i = \begin{pmatrix} \text{Re } \delta_i \\ \text{Im } \delta_i \end{pmatrix}$ 是依赖于时间的参数, 五次 B-样条

有限元在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 是确定的, 且在区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上 $\vec{Z}(x, t)$ 的值的形式为:

$$\vec{Z}(x, t) = \sum_{j=i-2}^{i+3} \vec{\delta}_j(t) B_j(x), \quad (6)$$

令 $\eta = (x - x_i)/h$, 其中 $0 \leq \eta \leq 1$, 代入式 (5) 得:

$$\begin{cases} B_{i-2} = 1 - 5\eta + 10\eta^2 - 10\eta^3 + 5\eta^4 - \eta^5, \\ B_{i-1} = 26 - 50\eta + 20\eta^2 + 20\eta^3 - 20\eta^4 + 5\eta^5, \\ B_i = 66 - 60\eta^2 + 30\eta^4 - 10\eta^5, \\ B_{i+1} = 26 + 50\eta + 20\eta^2 - 20\eta^3 - 20\eta^4 + 10\eta^5, \\ B_{i+2} = 1 + 5\eta + 10\eta^2 + 10\eta^3 + 5\eta^4 - 5\eta^5, \\ B_{i+3} = \eta^5. \end{cases} \quad (7)$$

则 \vec{Z}_i, \vec{Z}'_i 和 \vec{Z}''_i 在结点 x_i 的值由参数 $\vec{\delta}_i$ 项给出:

$$\begin{cases} \vec{Z}_i = \vec{\delta}_{i-2} + 26\vec{\delta}_{i-1} + 66\vec{\delta}_i + 26\vec{\delta}_{i+1} + \vec{\delta}_{i+2}, \\ \vec{Z}'_i = 5(-\vec{\delta}_{i-2} - 10\vec{\delta}_{i-1} + 10\vec{\delta}_{i+1} + \vec{\delta}_{i+2})/h, \\ \vec{Z}''_i = 20(\vec{\delta}_{i-2} + 2\vec{\delta}_{i-1} - 6\vec{\delta}_i + 2\vec{\delta}_{i+1} + \vec{\delta}_{i+2})/h^2, \end{cases} \quad (8)$$

式 (7) 代入方程 (6) 中得:

$$\begin{aligned} & (\vec{Z}_{i-2} + 26\vec{\delta}_{i-1} + 66\vec{\delta}_i + 26\vec{\delta}_{i+1} + \vec{\delta}_{i+2}) + M20/h^2(\vec{\delta}_{i-2} + 2\vec{\delta}_{i-1} - 6\vec{\delta}_i + 2\vec{\delta}_{i+1} + \vec{\delta}_{i+2}) - \\ & \alpha_i M(\vec{\delta}_{i-2} + 26\vec{\delta}_{i-1} + 66\vec{\delta}_i + 26\vec{\delta}_{i+1} + \vec{\delta}_{i+2}) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中: $\alpha_i = q(v_i^2 + w_i^2) = q[(\text{Re } \delta_{i-2} + 26\text{Re } \delta_{i-1} + 66\text{Re } \delta_i + 26\text{Re } \delta_{i+1} + \text{Re } \delta_{i+2})^2 + (\text{Im } \delta_{i-2} + 26\text{Im } \delta_{i-1} + 66\text{Im } \delta_i + 26\text{Im } \delta_{i+1} + \text{Im } \delta_{i+2})^2], i = 0, 1, 2, \cdots, N$.

用 Crank-Nicolson 方法, 得:

$$\vec{\delta}_i = \vec{\delta}_i^{n+1} + \vec{\delta}_i^n/2, \vec{\delta}'_i = (\vec{\delta}_i^{n+1} - \vec{\delta}_i^n)/\Delta t. \quad (10)$$

将式 (10) 代入方程 (9) 得:

$$\begin{aligned} & [(\vec{\delta}_{i-2}^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i-1}^{n+1} + 66\vec{\delta}_i^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i+1}^{n+1} + \vec{\delta}_{i+2}^{n+1}) - (\vec{\delta}_{i-2}^n + 26\vec{\delta}_{i-1}^n + 66\vec{\delta}_i^n + 26\vec{\delta}_{i+1}^n + \vec{\delta}_{i+2}^n)]/\Delta t + \\ & 10M(\vec{\delta}_{i-2}^{n+1} + 2\vec{\delta}_{i-1}^{n+1} - 6\vec{\delta}_i^{n+1} + 2\vec{\delta}_{i+1}^{n+1} + \vec{\delta}_{i+2}^{n+1} + \vec{\delta}_{i-2}^n + 2\vec{\delta}_{i-1}^n - 6\vec{\delta}_i^n + 2\vec{\delta}_{i+1}^n + \vec{\delta}_{i+2}^n)/h^2 - \\ & \alpha_i^n/2M(\vec{\delta}_{i-2}^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i-1}^{n+1} + 66\vec{\delta}_i^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i+1}^{n+1} + \vec{\delta}_{i+2}^{n+1} + \vec{\delta}_{i-2}^n + 26\vec{\delta}_{i-1}^n + 66\vec{\delta}_i^n + 26\vec{\delta}_{i+1}^n + \vec{\delta}_{i+2}^n) = 0, \quad (11) \end{aligned}$$

其中 $\alpha_i^n = q[(v_i^{n+1} + v_i^n)/2]^2 + ((w_i^{n+1} + w_i^n)/2)^2]$.

容易验证式 (11) 满足守恒律:

$$E_1^n = \|u(x, t_n)\|^2 = \|u_0(x)\|^2, \quad (12)$$

$$E_2^n = \|u_{xx}(x, t_n)\|^2/2 + q\|u(x, t_n)\|_4^4/4 = \|u_{0xx}(x)\|^2/2 + q\|u_0(x)\|_4^4/4. \quad (13)$$

式 (11) 是全隐格式, 为了避免求解非线性方程组, 对非线性项进行处理, 利用 Taylor 展开式:

$$v_i^{n+1} = v_i^* \approx v_i^n + \Delta t (v_t)_i^n = v_i^n + \Delta t \{ -(w_{xx})_i^n + q[(v_i^n)^2 + (w_i^n)^2]w_i^n \},$$

$$w_i^{n+1} = w_i^* \approx w_i^n + \Delta t (w_t)_i^n = w_i^n + \Delta t \{ (v_{xx})_i^n - q[(v_i^n)^2 + (w_i^n)^2]v_i^n \},$$

$$\alpha_i^n = q[(v_i^{n+1} + v_i^n)/2]^2 + ((w_i^{n+1} + w_i^n)/2)^2] \approx q[(v_i^* + v_i^n)/2]^2 + ((w_i^* + w_i^n)/2)^2].$$

经过这样处理后的方程组 (11) 变为一个线性方程组, 更利于计算.

显然式 (11) 是含有 $2N + 10$ 个未知量 $(\vec{\delta}_{-2}, \vec{\delta}_{-1}, \vec{\delta}_0, \dots, \vec{\delta}_N, \vec{\delta}_{N+1}, \vec{\delta}_{N+2})$, 具有 $2N + 2$ 个方程的方程组. 为了解该方程, 需要额外的 8 个约束条件. 由边界条件 $u(a, t) = u(b, t) = u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0$, 或 $v(a, t) = v(b, t) = v_x(a, t) = v_x(b, t) = 0, w(a, t) = w(b, t) = w_x(a, t) = w_x(b, t) = 0$, 也可表示为

$$\vec{Z}(a, t) = \vec{Z}_x(a, t) = \vec{Z}(b, t) = \vec{Z}_x(b, t) = 0. \quad (14)$$

利用式 (14) 估计 $\vec{\delta}_{-2}^{n+1}, \vec{\delta}_{-1}^{n+1}, \vec{\delta}_{N+1}^{n+1}, \vec{\delta}_{N+2}^{n+1}$ 参数, 这些参数可以有: $\vec{Z}(a, t) = \vec{\delta}_2 + 26\vec{\delta}_1 + 66\vec{\delta}_0 + 26\vec{\delta}_{-1} + \vec{\delta}_{-2} = 0, \vec{Z}_x(a, t) = 5(\vec{\delta}_2 + 10\vec{\delta}_1 - 10\vec{\delta}_{-1} + \vec{\delta}_{-2})/h = 0$, 即 $\vec{\delta}_{-2} = 9\vec{\delta}_2/4 + 65\vec{\delta}_1/2 + 165\vec{\delta}_0/4, \vec{\delta}_{-1} = -\vec{\delta}_2/8 - 9\vec{\delta}_1/4 - 33\vec{\delta}_0/8$. 同理当 $x = b$ 时, 由边界条件可得: $\vec{\delta}_{N+2} = 9\vec{\delta}_{N-2}/4 + 65\vec{\delta}_{N-1}/2 + 165\vec{\delta}_N/4, \vec{\delta}_{N+1} = -\vec{\delta}_{N-2}/8 - 9\vec{\delta}_{N-1}/4 - 33\vec{\delta}_N/8$, 消去 $\vec{\delta}_{-2}^{n+1}, \vec{\delta}_{-1}^{n+1}, \vec{\delta}_{N+1}^{n+1}, \vec{\delta}_{N+2}^{n+1}$, 方程化简为 $2N + 2$ 个未知数的 $2N + 2$ 阶矩阵方程, 即

$$A\vec{\delta}^{n+1} = B\vec{\delta}^n. \quad (15)$$

其中 $\vec{\delta}^n = [\vec{\delta}_0^n, \vec{\delta}_1^n, \dots, \vec{\delta}_{N-1}^n, \vec{\delta}_N^n]$,

$$A = \begin{bmatrix} 42k_1 - 33k_2/8 + k_3 & 65k_1/2 - 9k_2/4 + k_4 & 9k_1/4 - k_2/8 + k_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -33k_1/8 + k_2 & k_3 - 9k_1/4 & k_4 - k_1/8 & k_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_1 & -k_5/8 + k_2 & k_3 - 9k_5/4 & k_4 - 33k_5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9k_5/4 - k_4/8 + k_1 & 65k_5/2 - 9k_4/4 + k_2 & 42k_5 - 33k_4/8 + k_3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 42d_1 - 33d_2/8 + d_3 & 65d_1/2 - 9d_2/4 + d_4 & 9d_1/4 - d_2/8 + d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -33d_1/8 + d_2 & d_3 - 9d_1/4 & d_4 - d_1/8 & d_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & -d_5/8 + d_2 & d_3 - 9d_5/4 & d_4 - 33d_5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9d_5/4 - d_4/8 + d_1 & 65d_5/2 - 9d_4/4 + d_2 & 42d_5 - 33d_4/8 + d_3 \end{bmatrix}.$$

$k_1 = I/\Delta t + 10M/h^2 - \alpha M/2, k_2 = 26I/\Delta t + 20M/h^2 - 13\alpha M, k_3 = 66I/\Delta t - 60M/h^2 - 33\alpha M, k_1 = k_4, k_2 = k_5,$
 $d_1 = I/\Delta t - 10M/h^2 + \alpha M, d_2 = 26I/\Delta t - 20M/h^2 + 13\alpha M, d_3 = 66I/\Delta t + 60M/h^2 + 33\alpha M, d_1 = d_4, d_2 = d_5,$
 k_1, d_1 都是 2×2 的矩阵, I 是二阶单位矩阵, A 和 B 都是分块对称五对角型矩阵. 从式 (15) 中计算出 $\vec{\delta}^{n+1}$, 向量 \vec{Z}_i^{n+1} 就可以由 $\vec{Z}_i^{n+1}(x_i, t) = \vec{\delta}_{i-2}^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i-1}^{n+1} + 66\vec{\delta}_i^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i+1}^{n+1} + \vec{\delta}_{i+2}^{n+1}$ 得到. 需要指出的是数值格式 (11) 对时间步长 Δt 是二阶精度, 对空间步长 h 是四阶精度^[15].

1.2 初值问题的处理

初始向量 $\vec{\delta}^0$ 是由初始值 $u(x, 0) = u_0(x)$ 来确定的, 但 $\vec{\delta}^0$ 含有 $N+5$ 未知量, 初值只给出 $N+1$ 个方程, 所以还必须利用以下的边值条件:

$$\begin{cases} \vec{Z}_x(a, 0) = \vec{\delta}_2^0 + 10\vec{\delta}_1^0 - 10\vec{\delta}_{-1}^0 - \vec{\delta}_{-2}^0 = 0, \\ \vec{Z}_{xx}(a, 0) = \vec{\delta}_2^0 + 2\vec{\delta}_1^0 - 6\vec{\delta}_0^0 + 2\vec{\delta}_{-1}^0 + \vec{\delta}_{-2}^0 = 0, \\ \vec{Z}_i(x_i, 0) = \vec{\delta}_{i-2}^0 + 26\vec{\delta}_{i-1}^0 + 66\vec{\delta}_i^0 + \vec{\delta}_{i+2}^0 + 26\vec{\delta}_{i+1}^0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \vec{Z}_x(b, 0) = \vec{\delta}_{N+2}^0 + 10\vec{\delta}_1^0 - 10\vec{\delta}_{N-1}^0 - \vec{\delta}_{N-2}^0 = 0, \\ \vec{Z}_{xx}(b, 0) = \vec{\delta}_{N+2}^0 + 2\vec{\delta}_{N+1}^0 - 6\vec{\delta}_N^0 + \vec{\delta}_{N-2}^0 + 2\vec{\delta}_{N-1}^0 = 0, \end{cases}$$

从而得到如下的矩阵方程组: $A^0 \vec{\delta}^0 = B^0$. 其中:

$$\vec{\delta}^0 = (\delta_{-2}^0, \delta_{-1}^0, \delta_0^0, \delta_1^0, \dots, \delta_N^0, \delta_{N+1}^0, \delta_{N+2}^0)^T, B^0 = (u''(x_0), u'(x_0), u(x_0), u(x_1), \dots, u(x_N), u'(x_N), u''(x_N))^T,$$

$$A^0 = \begin{bmatrix} 20 & 40 & -120 & 40 & 20 & & & & & \\ -5 & -50 & & 0 & 50 & 5 & & & & \\ & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & & \\ & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & & 1 & 26 & 66 & 26 & 1 \\ & & & & & & & -5 & -50 & 0 & 50 & 5 \\ & & & & & & & 20 & 40 & -120 & 40 & 20 \end{bmatrix}.$$

2 稳定性分析

由于 Von Neumann 方法只适应于线性方程, 为讨论格式 (11) 的稳定性, 将式 (11) 中的 α_i^n 用 α 来代换, 得到如下的线性化格式:

$$\begin{aligned}
& [(\vec{\delta}_{i-2}^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i-1}^{n+1} + 66\vec{\delta}_i^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i+1}^{n+1} + \vec{\delta}_{i+2}^{n+1})/\Delta t - (\vec{\delta}_{i-2}^n + 26\vec{\delta}_{i-1}^n + 66\vec{\delta}_i^n + 26\vec{\delta}_{i+1}^n + \vec{\delta}_{i+2}^n)] + \\
& 10\mathbf{M}(\vec{\delta}_{i-2}^{n+1} + 2\vec{\delta}_{i-1}^{n+1} - 6\vec{\delta}_i^{n+1} + 2\vec{\delta}_{i+1}^{n+1} + \vec{\delta}_{i+2}^{n+1} + \vec{\delta}_{i-2}^n + 2\vec{\delta}_{i-1}^n - 6\vec{\delta}_i^n + 2\vec{\delta}_{i+1}^n + \vec{\delta}_{i+2}^n)/h^2 - \\
& \alpha\mathbf{M}(\vec{\delta}_{i-2}^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i-1}^{n+1} + 66\vec{\delta}_i^{n+1} + 26\vec{\delta}_{i+1}^{n+1} + \vec{\delta}_{i+2}^{n+1} + \vec{\delta}_{i-2}^n + 26\vec{\delta}_{i-1}^n + 66\vec{\delta}_i^n + 26\vec{\delta}_{i+1}^n + \vec{\delta}_{i+2}^n)/2 = 0.
\end{aligned}$$

假设 (11) 的解的形式是:

$$\vec{\delta}_m^n = \vec{\delta}^n e^{i\beta m h}, \quad (16)$$

将式 (16) 代入式 (11) 得:

$$[(\mathbf{I}/\Delta t - \alpha\mathbf{M}/2)r_1 + 10\mathbf{M}r_2/h^2]\vec{\delta}^{n+1} = [(\mathbf{I}/\Delta t + \alpha\mathbf{M}/2)r_1 - 10\mathbf{M}r_2/h^2]\vec{\delta}^n,$$

其中: $r_1 = 2\cos(2\beta h) + 52\cos(\beta h) + 66$, $r_2 = 2\cos(2\beta h) + 4\cos(\beta h) - 6$. 或等价于 $\vec{\delta}^{n+1} = \mathbf{Q}\vec{\delta}^n$,

其中: $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} r_1/\Delta t, 10r_2/h^2 + \alpha r_1/2 \\ 10r_2/h^2 + \alpha r_1/2, -r_1/\Delta t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1/\Delta t, -10r_2/h^2 - \alpha r_1/2 \\ -10r_2/h^2 - \alpha r_1/2, -r_1/\Delta t \end{pmatrix}$. 令: $X = r_1/\Delta t, Y = 10r_2/h^2 - \alpha r_1/2$, 矩阵 \mathbf{Q} 变为:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & -X \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X & -Y \\ -Y & -X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X/(X^2 + Y^2) & Y/(X^2 + Y^2) \\ Y/(X^2 + Y^2) & -X/(X^2 + Y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & -Y \\ -Y & -X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2 - Y^2 & -2XY \\ 2XY & X^2 - Y^2 \end{pmatrix} / (X^2 + Y^2).$$

矩阵 \mathbf{Q} 的特征值为: $\lambda_1 = [(X^2 - Y^2) + 2XYi]/(X^2 + Y^2)^2$, $\lambda_2 = [(X^2 - Y^2) - 2XYi]/(X^2 + Y^2)^2$, 且 $|\lambda_j| = 1, (j = 1, 2)$.

根据 Von Neumann 稳定性分析, 说明本文所提供的格式是无条件稳定的, 这也意味着该格式对步长 h 和 Δt 没有任何限制, 但在实际计算中应选择适当小的网格, 保证不降低精度.

3 数值例子

例 1 为了便于比较和简单起见, 取文献 [7] 中的例子:

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, & -20 < x < 20, 0 < t \leq 20, \\ u(x, 0) = \sec h(x) \exp[2ix], & -20 \leq x \leq 20, \\ u(-20, t) = u(20, t) = u_x(-20, t) = u_x(20, t) = 0, \\ u_{xx}(-20, t) = u_{xx}(20, t) = 0, & 0 < t \leq 20, \end{cases}$$

该方程的精确的孤波解为: $u(x, t) = \sec h(x - 4t) \exp[2ix - 3it]$. 定义如下的 L_2 误差来度量数值解 u^n 和精确解 u^{exact} 在每一时间层上的误差:

$$\begin{aligned}
\text{Re } L^2 &= \sqrt{\|\text{Re } u^{\text{exact}} - \text{Re } u^n\|} = \sqrt{h \sum_{j=1}^N |\text{Re } u_j^{\text{exact}} - \text{Re } u_j^n|^2}, \\
\text{Im } L^2 &= \sqrt{\|\text{Im } u^{\text{exact}} - \text{Im } u^n\|} = \sqrt{h \sum_{j=1}^N |\text{Im } u_j^{\text{exact}} - \text{Im } u_j^n|^2}, \\
L^2 &= \sqrt{\|(|u^{\text{exact}}|^2 - |u^n|^2)\|} = \sqrt{h \sum_{j=1}^N (|u_j^{\text{exact}}|^2 - |u_j^n|^2)}.
\end{aligned}$$

取时间步长和空间步长 $h = 0.01$, $\Delta t = 0.001$, 图 1—图 3 分别画出了 $\text{Re } L^2$ 、 $\text{Im } L^2$ 及模 L^2 在时间 $t = 20$ s 时的误差图. 从中可以看出, 随着时间的增加, 实部误差、虚部误差和模误差, 在大约 $t \in [0, 6]$ 时误差是递增的, 但当 $t \geq 6$ s 之后, 误差将会在一个较小的但稳定的区域震荡, 之后基本保持不变或递减, 说明该格式有较好的稳定性和较好的精度. 图 4 给出的原方程关于能量函数 E_1, E_2 守恒律的验证, 其中 E_1, E_2 分别表示精确解 (2) 的能量函数, EE_1, EE_2 表示数值解 (12), (13) 的计算值. 从图 4 可以看出, 格式较好地保持了原方程的守恒律.

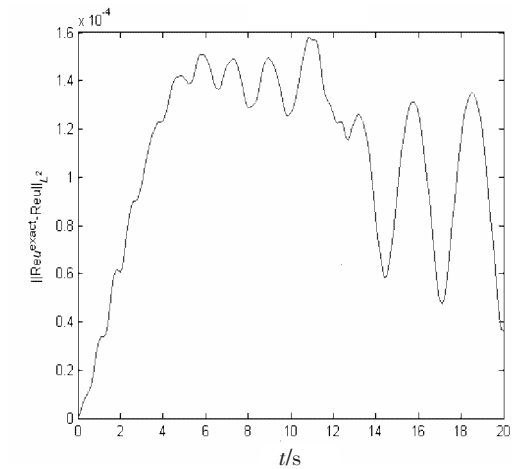


图 1 $h=0.01, \Delta t=0.001$ Re u 误差图

Fig.1 The error of the real part of the u when $h=0.01, \Delta t=0.001$

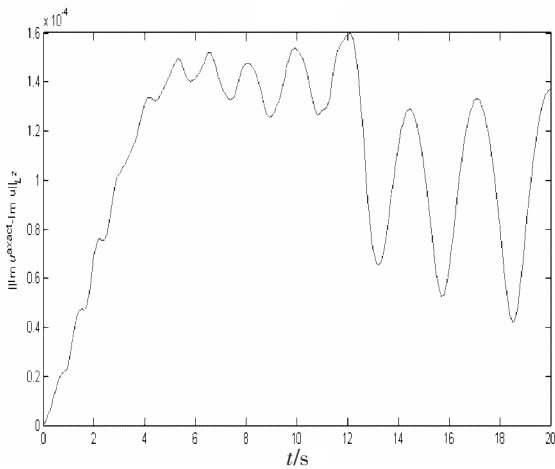


图 2 $h=0.01, \Delta t=0.001$ Im u 误差图

Fig.2 The error of the imaginary part of the u when $h=0.01, \Delta t=0.001$

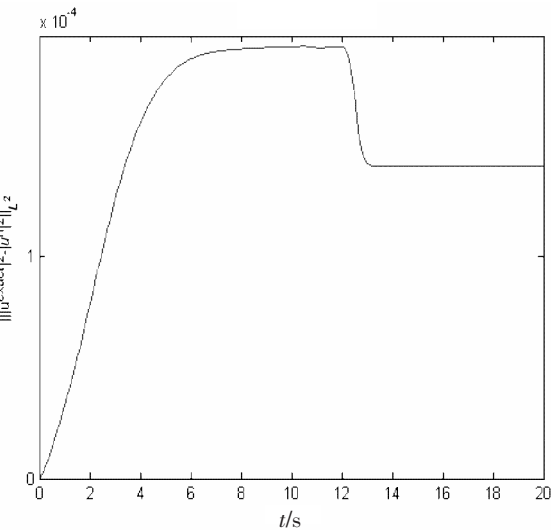


图 3 $h=0.01, \Delta t=0.001$ $|u|^2$ 误差图

Fig.3 The error of the $|u|^2$ when $h=0.01, \Delta t=0.001$

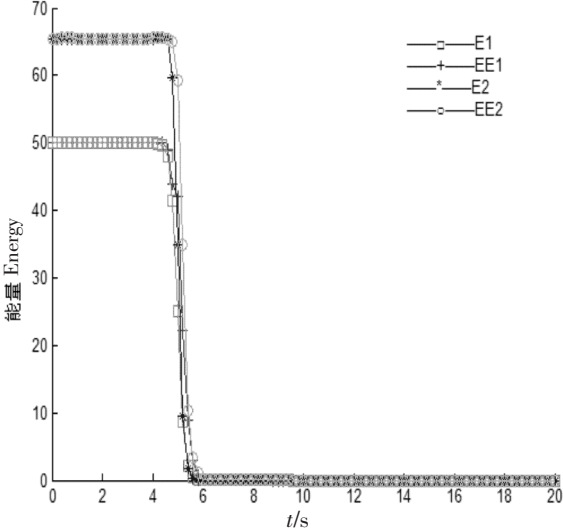


图 4 方程能量函数 E_1, E_2 数值模拟

Fig.4 Numerical simulation of the energy function E_1, E_2

本文构造的计算方法是一种简单、有效、具守恒性、有较高精度的格式.

例 2 设方程

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, & -20 < x < 20, 0 < t < 1, \\ u(-20, t) = u(20, t) = 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ u(x, 0) = e^{2ix} \sec h(x) + e^{-2ix} \sec h(x - 10). \end{cases}$$

其精确解是: $u(x, t) = e^{-2ix-3it} \sec h(x - 10 + 4t) + e^{2ix-3it} \sec h(x - 4t)$. 该方程具有孤生子碰撞的现象, 用五次 B-样条数值方法模拟了两个孤立解碰撞模型.

从图 5—图 7 中可以看出, 两个孤生子在 $t = 0$ s 两个孤生子保持各自的振幅和频率相向运动, 当 $t = 0.5$ s 时, 两个孤生子发生碰撞, 当 $t = 1$ s 时, 碰撞后两个孤生子基本保持原有振幅和频率相背运动. 它的时空图见图 8. 孤生子碰撞是该方程最具特征的性质, 本文的数值计算很好地模拟了这一现象.

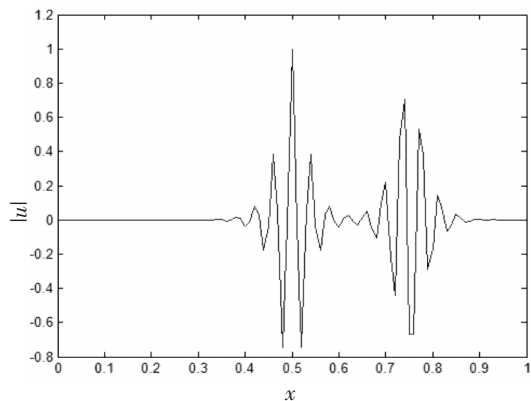
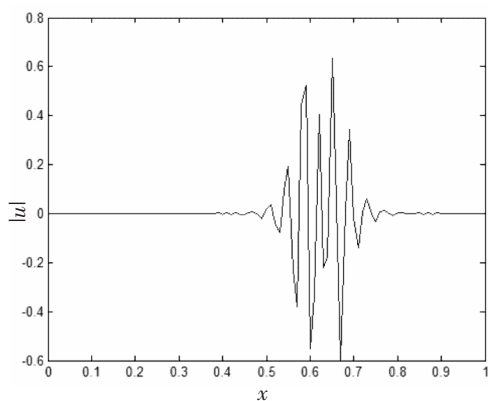
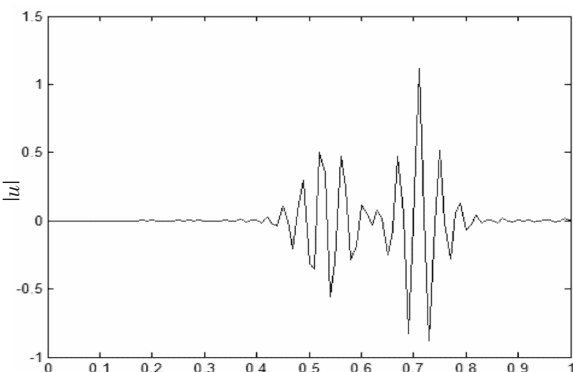
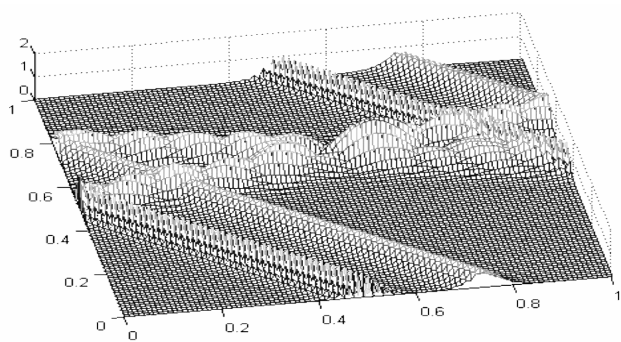
图 5 $t=0$ s 时 $|u|$ 的数值模拟Fig.5 Numerical simulation of the $|u|$ when $t=0$ 图 6 $t=0.5$ s 时 $|u|$ 的数值模拟Fig.6 Numerical simulation of the $|u|$ when $t=0.5$ s图 7 $t=1$ s 时 $|u|$ 的数值模拟Fig.7 Numerical simulation of the $|u|$ when $t=1$ s

图 8 孤子碰撞时空图

Fig.8 Space-time diagram of the solution collision

4 结论

本文主要运用五次 B-样条配置方法求非线性 Schrödinger 方程的数值解, 构造了一个时间具二阶精度、空间方向具四阶精度的计算格式. 该格式的主要特点是在空间方向的离散采用了五次 B-样条方法, 这样的格式是一个全隐格式, 对应的将要求解一个非线性方程组. 为克服这一缺点, 对非线性项, 利用 Taylor 展开, 将原非线性方程组求解问题降解为只需求解一个分块五对角型的一个线性方程组, 这样大大减低了计算量和计算复杂度, 同时证明了该格式是无条件稳定的. 最后通过数值结果, 验证了该格式的稳定性、守恒性、精度等.

[参考文献]

- [1] SULEM C, SULEM P L. The nonlinear Schrödinger equation-self-focusing and wave collapse [M]. New York: Springer, 1999.
- [2] ZHANG Z Y, LIU Z H. New exact solutions to the perturbed nonlinear Schrödinger's equation with Kerr law nonlinearity [J]. Appl Math Comput, 2010, 216: 3064-3072.
- [3] ZHANG Z Y, LI Y X, LIU Z H. New exact solutions to the perturbed nonlinear Schrödinger's equation with Kerr law nonlinearity via modified trigonometric function series method [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(8): 3097-3106.
- [4] ZHANG Z Y, LIU Z H, MIAO X J, et al. Qualitative analysis and traveling wave solutions for the perturbed nonlinear

- Schrödinger's equation with Kerr law nonlinearity [J]. *Physics Letters A*, 2011, 375: 1275-1280.
- [5] ZHANG Z Y, GAN X Y, YU D M. Bifurcation behaviour of the travelling wave solutions of the perturbed nonlinear Schrödinger equation with kerr law nonlinearity [J]. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2011, 66: 721-727.
- [6] ZHANG Z Y, GAN X Y, YU D M, et al. A note on exact traveling wave solutions of the perturbed nonlinear Schrödinger's equation with kerr law nonlinearity [J]. *Commun Theor Phys*, 2012, 57: 764-770.
- [7] ZHANG Z Y, HUANG J H, ZHONG J, et al. The extended (G'/G)-expansion method and travelling wave solutions for the perturbed nonlinear Schrödinger's equation with Kerr law nonlinearity [J]. *Pramana-Journal of Physics*, 2014, 82(6): 1011-1029.
- [8] DEFLOUR M, FORTIN M, PAYRE G. Finite-difference solution of nonlinear Schrödinger equation [J]. *Comput Phys*, 1981, 44: 277-288.
- [9] TAHAAND T R, ABLOWITA M J. Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations II: numerical nonlinear Schrödinger equation [J]. *J Comput Phys*, 1984, 55: 203-230.
- [10] SANZ-SERNA J M. Methods for the numerical solution of the nonlinear Schrödinger equation [J]. *Math Comput*, 1984, 43(167): 21-27.
- [11] SANZ-SERNA J M, VERWER J G. Conservative and nonconservative schemes for the solution of the nonlinear Schrödinger equation [J]. *IMA J Numer Anal*, 1986, 6: 24-42.
- [12] WANG H Q. An efficient Chebyshev-Tau spectral method for Ginzburg-Landau-Schrödinger equations [J]. *Computer Physics Communications*, 2010, 181: 325-340.
- [13] JAVIDI M. A Golbab numerical studies on nonlinear Schrödinger equations by spectral collocation method with preconditioning [J]. *Math Anal Appl*, 2007, 333: 1119-1127.
- [14] LI W. Two-grid mixed finite-element methods for nonlinear Schrödinger equations [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2012, 28(1): 63-73.
- [15] WANG T C. Maximum norm error bound of a linearized difference scheme for a coupled nonlinear Schrödinger equations [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, 235: 4237-4250.
- [16] CHANG Q, JIA E, SUN W. Difference schemes for solving the generalized nonlinear Schrödinger equation [J]. *Comput Phys*, 1999, 148: 397-415.
- [17] 徐金平, 单双荣. 带五次项的非线性 Schrödinger 方程的多辛 Fourier 拟谱算法 [J]. *数值计算与计算机应用*, 2010, 31(1): 55-64.
- [18] BAO W Z, LI H L, JIESHEN. A generalized Laguerre-Fourier-Hermite pseudospectral method for computing the dynamics of rotating in Bose-Einstein condensates [J]. *SIAM J Sci Comput*, 2009, 31: 3685-3711.
- [19] PRENTER P M. Splines and variational methods [M]. New York: John Wiley & Sons, 1975: 58-69.
- [20] 石钟慈. 样条有限元 [J]. *计算数学*, 1979, 1(1): 50-72.
- [21] BULENT SAKA, IDRIS DAG. Quartic B-spline Galerkin approach to the numerical solution of the KdVB equation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 215: 746-758.
- [22] ZAKI S I. A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2000, 188: 121-134.
- [23] TALAAT S, ALY EL-DANAF. Septic B-spline method of the Korteweg-de-Vries-Burger's equation [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13: 554-566.
- [24] ISMAIL M S. Numerical solution of complex modified Korteweg-de Vries equation by collocation method [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14: 749-759.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)