[文章编号] 1007-7405(2015)03-0225-05

一类双重退化渗流方程解的存在性

汤林冰[1]，詹华税[2]
（1. 集美大学理学院，福建 厦门 361021；2. 厦门理工学院应用数学学院，福建 厦门 361024）

[摘要] 结合 Fichera-Oleinik 理论，研究一类双重退化渗流方程 $u_t = \mathrm{div}(\rho^\alpha \nabla u^m),(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$ 的可解性问题. 其中 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界区域，边界 $\partial\Omega$ 充分光滑，$\rho(x)=dist(x,\partial\Omega)$，$m>1$，$\alpha\geqslant 2$，$u_0$ 非负，$u_0\in L^{m+1}(\Omega)$，$\rho^{\alpha/2}\nabla u_0^m\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. 借助于一般粘性解的定义，给出了该渗流方程存在具有齐次边界条件的弱解的定义，并证明其存在性.

[关键词] 双重退化；渗流方程；弱解；Fichera-Oleinik 理论
[中图分类号] O 175.26　　[文献标志码] A

The Existence of a Kind of Double Degenerate Filtration Equation

TANG Lin-bing[1]，ZHAN Hua-shui[2]
（1. School of Science，Jimei University，Xiamen 361021，China；
2. School of Applied Mathematics，Xiamen University of Technology，Xiamen 361024，China）

Abstract: By Fichera-Oleinik theory，the paper studies solvability of the singular double degenerate filtration equation $u_t = \mathrm{div}(\rho^\alpha \nabla u^m),(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T)$, where Ω is a bounded domain in $\mathbf{R}^N$ with appropriately smooth boundary $\partial\Omega$, $\rho(x)=dist(x,\partial\Omega)$, $m>1$, $\alpha\geqslant 2$, $u_0\geqslant 0$, $u_0\in L^{m+1}(\Omega)$, $\rho^{\alpha/2}\nabla u_0^m\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. By viscous solution theory，the paper gives the definition of the weak solution to the equation with homogeneous boundary value，then proves its existence.

Key words: double degeneratcy；filtration equation；week solution；Fichera-Oleinik theory

0　引言

本文研究一类双重退化渗流方程

$$u_t = \mathrm{div}(\rho^\alpha \nabla u^m),(x,t)\in Q_T=\Omega\times(0,T) \tag{1}$$

的可解性问题. 其中 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界区域，边界 $\partial\Omega$ 充分光滑，$\rho(x)=dist(x,\partial\Omega)$，$m>1$，$\alpha\geqslant 2$，$u_0$ 非负，$u_0\in L^{m+1}(\Omega)$，$\rho^{\alpha/2}\nabla u_0^m\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. 式（1）来源于流体力学的多孔介质方程、生物学中的群体扩散模型等. 如果初值

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\Omega\subset\mathbf{R}^N \tag{2}$$

适当光滑，有许多的成果[1-13]讨论方程（1）的可解性问题，下面给出方程的弱解定义.

定义1　u 是方程（1）的一个弱解，如果 $u\in L^\infty(0,T;L^{m+1}(\Omega))$，$\rho^{\alpha/2}\nabla u^m\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$，对任意在 $\partial\Omega$ 和 $t=T$ 上为零的函数 $\varphi\in C^1(Q_T)$，u 满足

[收稿日期] 2014-07-23　　[修回日期] 2014-11-07
[基金项目] 国家自然科学基金资助项目（11371297）；福建省自然科学基金资助项目（2015J01592，2012J01011）
[作者简介] 汤林冰（1989—），男，硕士生，从事偏微分方程方向研究. 通信作者：詹华税（1966—），男，教授，从事偏微分方程方向研究，E-mail: hszhan@jmu.edu.cn.

$$\int_{Q_T}((\rho^\alpha \nabla u^m)\nabla\varphi - u\varphi_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u_0\varphi(x,0)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

易知定义 1 等价于：1）$u \in L^\infty(0,T;L^{m+1}(\Omega))$，$\rho^{\alpha/2}\nabla u^m \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$；2）$\forall\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$，$u$ 满足 $\int_{Q_T}((\rho^\alpha \nabla u^m)\nabla\varphi - u\varphi_t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$；3）对所有 $t > 0$，$u(t) \in L^1(\Omega)$ 且 $\lim\limits_{t\to 0}\int_\Omega |u(x,t) - u_0(x)|\mathrm{d}x = 0$．需要注意的是，其中并没有涉及到边界值问题.

退化抛物方程解的这种性质很早就被数学家们所重视，文献［14］首次研究了

$$u_t = \mathrm{div}(\rho^\alpha |\nabla u|^{p-2}\nabla u) \tag{4}$$

的情形，得到了以下重要结论：若 $0 < \alpha < p-1$，则方程（4）可以提出一般的具有 Dirichlet 边值条件的初边值问题，并且存在唯一弱解；而 $\alpha \geqslant p-1$，则不能提出一般的具有 Dirichlet 边值条件的初边值问题. 读者还可以参阅比式（4）更广泛的方程的相类似的结果[15]. 前面已说明，$\alpha \geqslant 2$ 时，方程（1）的边界条件是不需要给的，所以也就无法按一般形式提出齐次边界条件. 因此，提出如下的概念：

定义 2 如果 u 是方程（1）具有初值（2）的在定义 1 下的解，并且 $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$，$u_n$ 是下面问题的解：

$$\begin{cases} u_{nt} = \mathrm{div}((\rho + 1/n)^\alpha \nabla u_n^m), & (x,t) \in Q_T, \\ u_n(x,t) = 1/n, & (x,t) \in S_T, \\ u_n(x,0) = u_0(x) + 1/n, & \end{cases}$$

则称 u 是方程（1）的具有齐次边界条件的解.

本文将借鉴多孔介质方程的解的存在性证明方法，证明如下的结论：

定理 1 设 u_0 非负，$u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$，$\rho^{\alpha/2}\nabla u_0^m \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$，$\alpha \geqslant 2$，则具有初值条件（2）的方程（1）在定义 1 下存在具有齐次边界条件的解.

1 Fichera-Oleinik 理论

考虑形如

$$L(u) = a^{rs}(x)u_{x_rx_s} + b^r(x)u_{x_r} + c(x)u = f(x) \tag{5}$$

的二阶方程，若对于任意的实向量 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_m)$ 和任意点 $x \in \Omega$，具有条件 $a^{rs}\boldsymbol{\xi}_r\xi_s \geqslant 0$，就称为 Ω 上的具有非负特征形式的二阶方程. 显然，有非负特征形式的二阶方程包含椭圆方程和抛物方程，一阶方程（$a^{rs}\boldsymbol{\xi}_r\xi_s \equiv 0$ 的情况），超抛物方程，Brown 运动方程，在上半平面的 Tricomi 方程等等.

在区域 Ω 内考虑方程（5）的第一边值问题. 文献［16］首先提出它的一般形式，后来，Oleinik[17] 进行了深入研究. 假设在 $\overline{\Omega} = \Omega \cup \sum$ 内所有的点 x 和所有的 $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^m$ 满足条件，Ω 适当光滑，$a^{rs} \in C^2(\Omega)$，$b^r \in C^1(\Omega)$，$c \in C^0(\Omega)$．用 $\sum^0$ 表示 $\sum$ 上 $a^{rs}n_rn_s \equiv 0$ 的点集. 在 $\sum^0$ 上考虑函数 $b(x) \equiv (b^r - a^{rs}_{x_s})n_r$，称它为 Fichera 函数. 用 $\sum_1$ 表示 $\sum^0$ 上 $b > 0$ 的点集，$\sum_2$ 表示 $\sum^0$ 上 $b < 0$ 的点集，而 $\sum_0$ 表示 $\sum^0$ 上 $b = 0$ 的点集. 集合 $\sum \setminus \sum^0$ 记为 $\sum_3$.

方程的第一边值问题如下，在 $\overline{\Omega} = \Omega \cup \sum$ 中求函数 u，使得

$$L(u) = f(x), \text{在 } \Omega \text{ 内}, \tag{6}$$

$$u = g, \text{在} \sum\nolimits_2 \cup \sum\nolimits_3 \text{上}, \tag{7}$$

其中，f 是 Ω 内的给定函数，而 g 是 $\sum_2 \cup \sum_3$ 上的给定函数. 显然，如果是椭圆型，那么式（6）、（7）就是 Dirichlet 问题. 对于柱形区域内的抛物型问题，则组成混合问题，也称为抛物型方程的第一边值问题. 称该结论为 Fichera-Oleinik 理论.

考虑下面方程：

$$\partial u/\partial t = \Delta A(u) + \sum_{i=1}^{n} \partial b^i(u)/\partial x_i, (x,t) \in Q_T = \mathbf{R}^n \times (0,T), \tag{8}$$

如果是弱退化的情形，即集合 $\{(x,t) \in Q_T: a(u(x,t)) = 0\}$ 无内点的情况，其中 $A'(u) = a(u)$. 此时, $A^{-1}(u)$ 存在，令 $v = A^{-1}(u)$ ，则有

$$\Delta v - \partial A^{-1}(v)/\partial t + \mathrm{div}[b^i(A^{-1}(v))] = 0, \tag{9}$$

那么，根据前面所述的 Fichera-Oleinik 理论，$\sum_2 \cup \sum_3 = \partial\Omega$ ，于是式（6）、(7）得到的是一般的 Dirichlet 边界条件. 但在强退化的情形，即集合 $\{(x,t) \in Q_T: a(u(x,t)) = 0\}$ 有内点的情况, $A^{-1}(u)$ 一般不存在，那么就不能将式（8）转化为式（9）的形式. 此时，改写方程（8）为

$$a'(u) \ |\nabla u|^2 + a(u)\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b^{i'}(u)\partial u/\partial x_i - \partial u/\partial t = 0, (x,t) \in Q_T = \mathbf{R}^n \times (0,T), \tag{10}$$

如果考虑的是齐次边界条件,设 $a(0) = 0$,将它与式(5)比较,考虑其初边值问题,由式(7)知道初值条件 $u(x,0) = u_0(x)$ 是必须给的. 但在侧边界,需要给齐次边界条件的部分是

$$\sum_p = \{x \in \partial\Omega: (b^{i'}(0) + a'(0)\partial u/\partial x_i|_{x\in\partial\Omega} - a'(0)\partial u/\partial x_i|_{x\in\partial\Omega})n_i < 0\} \tag{11}$$

$$= \{x \in \partial\Omega: b^{i'}(0)n_i < 0\}. \tag{12}$$

如果是古典解，式（11）是有意义的. 但是，强退化方程一般只有弱解，$\partial u/\partial x_i|_{\partial\Omega}$ 通常是不能定义的，故式（11）的意义就有问题. 但是式（12）的意义是明确的，即使 $a'(s)$ 不存在，只要 $b^{i'}(s)$ 存在即可. 所以需要给的边界条件就是 $u(x,t) = 0, (x,t) \in \sum_p \times (0,T)$.

本文考虑下面的渗流方程 $u_t = \mathrm{div}(\rho^\alpha \nabla u^m) = \alpha\rho^{\alpha-1} m u^{m-1} \nabla\rho \cdot \nabla u + m\rho^\alpha u^{m-2} \ |\nabla u|^2 + m u^{m-1}\rho^\alpha \Delta u$.

与通常的多孔介质方程相比较，只要 $\alpha > 1$, 则 $\rho^\alpha|_{\partial\Omega} = 0$ ，所以，该方程除了在内部可能退化之外，还在边界上退化，故是一双重退化方程. 并且有 $b^i(0) = [\alpha\rho^{\alpha-1} m u^{m-1}\rho_{x_i} + (m-1)\rho^\alpha u^{m-2} u_{x_i}]|_{u=0} = 0$, $a^{ij}_{x_j}(0) = N(m u^{m-1}\rho^\alpha)|_{x_i} = Nm[(m-1)u^{m-2}\rho^\alpha + \alpha u^{m-1}\rho^{\alpha-1}\rho_{x_i}]|_{x_i} = 0$. 同样地，只要 $\alpha > 1$，即有 $\rho^\alpha|_{\partial\Omega} = 0$ ，比较式（8），知道此时无需给任何边界条件. 比如 $m > 1$, 那么 $\alpha \geqslant m$ 时就无需给边界条件. 在本文中，假设 $\alpha \geqslant 2$ 是出于证明技术上的要求，最好的结论应该是在条件 $\alpha > 1$ 得到的，这有待于后续更深入的研究.

2　定理 1 证明

第一步：首先假设 u_0 非负, C_0^∞ 光滑且在 Ω 上具有紧支集，其中 $M = \sup_{x\in\Omega} u_0$.

构造初值逼近列 u_{0n} ：令 $u_{0n} = u_0 + 1/n$ ，对任意 $T > 0$ ，求问题

$$\begin{cases} u_{nt} = \mathrm{div}((\rho + 1/n)^\alpha \nabla u_n^m), & (x,t) \in Q_T, \\ u_n(x,t) = 1/n, & (x,t) \in S_T, \\ u_n(x,0) = u_{0n}(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{13}$$

的解. 先考虑

$$\begin{cases} u_{nt} = \mathrm{div}(a_n(u) \nabla u), & (x,t) \in Q_T, \\ u_n(x,t) = 1/n & (x,t) \in S_T, \\ u_n(x,0) = u_{0n}(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{14}$$

其中 $a_n(u)$ 是一个正的光滑函数，且满足 $a_n(u) \geqslant c > 0$ (c 是正常数)，且 $u \in [1/n, M + 1/n]$ 时，$a_n(u) = m(\rho + 1/n)^\alpha u^m$ ，于是方程非退化，由标准拟线性抛物方程理论[18]，可知存在唯一解 $u_n \in C^{2,1}(\overline{Q_T})$ ，由最大值原理[19], $1/n \leqslant u_n(x,t) \leqslant M + 1/n (x,t) \in Q_T$. 再由内正则性定理[20-23], $u_n \in C^\infty(Q_T)$. 对所有 n 应用比较定理得: $u_{n+1}(x,t) \leqslant u_n(x,t)$. 令 $u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$ ，则对所有 $1 \leqslant$

$p < \infty$, $u_n \xrightarrow{L^p} u$.

为证 u 是式（1）的弱解，还需要做一些估计. 将方程乘上 $\varphi = u_n^m - (1/n)^m$ 并在 Q_T 上积分，分部积分得 $\int_{Q_T} u_{nt}(u_n^m - (1/n)^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u_n(u_n^m - (1/n)^m)\big|_{t=0}^{t=T}\mathrm{d}x - \int \partial/\partial t(u_n^m - (1/n)^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega u_n(x, T)(u_n^m(x,T) - (1/n)^m)\mathrm{d}x - \int_\Omega u_{0n}(x)(u_{0n}^m(x) - (1/n)^m)\mathrm{d}x - \int_{Q_T} m u_n^m u_{nt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \overset{u_{nt}\text{代入}}{=} \int_{Q_T} \operatorname{div}[(\rho + 1/n)^\alpha \nabla u_n^m](u_n^m - 1/n^m)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. 整理得：

$$(m+1)\int_{Q_T}(\rho + 1/n)^\alpha\ |\nabla u_n^m|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_\Omega (u_{0n}(x) - 1/n^m)u_{0n}(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega (u_n^m(x,T) - 1/n^m)\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega (u_0^m(x) + 1/n)^{m+1}\mathrm{d}x + 1/n(M + 1/n)\int_\Omega \mathrm{d}x. \tag{15}$$

这里的 T 是任意的,式(15)表明 $(\rho + 1/n)^{\alpha/2}|\nabla u_n^m|$ 在 $L^2(Q_T)$ 上关于 n 一致有界. 因此存在收敛子列 $(\rho + 1/n)^{\alpha/2}\nabla u_n^m$ 于 $L^2(Q_T)$ 弱收敛于 φ ,下面需要证 $\varphi = \rho^{\alpha/2}\nabla u^m$.

对 $\forall \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$,记 $\rho_n \triangleq \rho + 1/n$, $\int_{Q_T}\rho_n^{\alpha/2}\nabla u_n^m \cdot \psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{Q_T}\nabla(\rho_n^{\alpha/2}u_n^m)\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \alpha/2\int_{Q_T}\rho_n^{\alpha/2-1}\nabla\rho\cdot u_n^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_{Q_T}\rho_n^{\alpha/2}u_n^m\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \alpha/2\int_{Q_T}\rho_n^{\alpha/2-1}\nabla\rho\cdot u_n^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. 对两边 $n\to\infty$ 取极限得左边 $= \lim\limits_{n\to\infty}\int_{Q_T}\rho_n^{\alpha/2}\nabla u_n^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{Q_T}\lim\limits_{n\to\infty}(\rho_n^{\alpha/2}\nabla u_n^m)\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{Q_T}\varphi\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$

由于 $|\rho_n^{\alpha/2-1}\nabla\rho\cdot u_n^m| \leqslant C|\nabla\rho|\cdot|u_n^m| \leqslant C(M+1/n) \leqslant C$,由控制收敛定理,利用 $\alpha \geqslant 2$, $\alpha/2 - 1 \geqslant 0$,知 $\int_{Q_T}\rho_n^{\alpha/2-1}\nabla\rho\cdot u_n^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t \to \int_{Q_T}\rho^{\alpha/2-1}\nabla\rho\cdot u^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{Q_T}\nabla\rho^{\alpha/2}\cdot u^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. 因此, 右边 $= \lim\limits_{n\to\infty}(\int_{Q_T}\nabla(\rho_n^{\alpha/2}u_n^m)\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \alpha/2\int_{Q_T}\rho_n^{\alpha/2-1}\nabla\rho\cdot u_n^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t) = -\int_{Q_T}\rho^{\alpha/2}u^m\cdot\nabla\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \alpha/2\int_{Q_T}\rho^{\alpha/2-1}\nabla\rho\cdot u^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{Q_T}\rho^{\alpha/2}\nabla u^m\cdot\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$. 由极限的唯一性, $\varphi = \rho^{\alpha/2}\nabla u^m$. 同时在式(15)中,对 $n\to\infty$ 取极限,有下面的能量估计:$(m+1)\int_{Q_T}\rho^\alpha\ |\nabla u^m|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_\Omega u^{m+1}(x,T)\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega u_0^{m+1}(x)\mathrm{d}x$. 而 $u_m \in C(\overline{Q_T})$,在 S_T 上 $u_m(x,t) = 1/n$,故有一致收敛的极限 $\lim\limits_{(x,t)\to S_T}u(x,t) = 0$,所以 $u^m(\cdot,t) \in H_0^1(\Omega)$,几乎处处于 $(0,T)$.

最后,由 u_n 是经典解,满足以 u_{0n} 代替 u_0 时的弱解定义,令 $n\to\infty$,得到关于 u 的弱解定义式,因此 u 是在定义 1 意义下的一个弱解.

如果有两个初始数据 $u_0, \tilde{u}_0$ 且 $u_0 < \tilde{u}_0$,则上述方法可以得到近似序列 $u_{0n} \leqslant \tilde{u}_{0n}$,由极大值原理与比较定理知,对每个 $n > 1$ 都可以得到 $u_n \leqslant \tilde{u}_n$,因此极限函数 $u \leqslant \tilde{u}$.

第二步:假设 u_0 有界且边界 $\partial\Omega$ 上为零，将 u_0 光滑化，再应用前面的方法得到近似解 $u_n \in C^\infty(Q_T) \cap C^{2,1}(Q_T \cup S_T)$，相同的方法可得解 u，但此时在 $t = 0$ 时不一定连续（除非初值连续）.

第三步：假设 $u_0 \in L^{m+1}(\Omega)$，$\rho^{\alpha/2}\nabla u_0^m \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$，考虑单调增加的切割函数 ζ_k，它在 $\partial\Omega$ 上为 0，考虑初始函数的近似列：$u_{0k}(x) = \min(u_0(x)\zeta_k(x), k)$. 由第二步，用初值 $u_{0k}(x)$ 求解问题得到唯一弱解，由比较定理得：$u_{k+1} \geqslant u_k$，另一方面，由估计式知，u_k 在 $L^\infty((0,T);L^{m+1}(\Omega))$ 上一致有界. 同样地，$\rho_k^{\alpha/2}|\nabla u_k^m|$ 在 $L^2(\Omega)$ 上也一致有界. 因此 u_k 的收敛极限函数 $u \in L^\infty((0,T);L^{m+1}(\Omega))$，并且 $\rho_k^{\alpha/2}|\nabla u_k^m|$ 在 $L^2(\Omega)$ 中收敛于 $\rho^{\alpha/2}|\nabla u^m|$，估计式关于 u 成立. 由此得定理 1.

一般地，式（1）—（2）问题解的存在性仍然是一个公开问题. 至于唯一性的研究一般要建立在存在性的基础之上. 显然，本文仅是在定义 2 的框架下讨论了解的存在性，定义 2 本质上是粘性解，考虑粘性解的唯一性也是一个可以研究的问题.

[参 考 文 献]

[1] WU Z, ZHAO J, YUN J, et al. Nonlinear diffusion equations [M]. New York: World Scientific Publishing, 2001.

[2] GMIRA A. On quasilinear parabolic equations involving measure date [J]. Asymptotic Analysis North-Holland, 1990, 3: 43-56.

[3] 杨金顺，赵俊宁. 含吸附项发展的 P－LAPLACE 方程的注记 [J]. 吉林大学学报：自然科学版，1995, 40(2): 35-38.

[4] ZHAO J. Source-type solutions of quasilinear degenerate parabolic equation with absorption [J]. Chin Ann of Math, 1994, 11: 89-104.

[5] 赵俊宁，袁洪君. 一类双重退化抛物方程的 Cauchy 问题 [J]. 数学年刊 A 辑：中文版，1995, 16(2): 181-196.

[6] DIBENEDETTO E, FRIEDMAN A. Hölder estimates for nonlinear degenerate parabolic systems [J]. J Reine Angew Math, 1985, 357: 1-22.

[7] ZHAO J. Existence and nonexistence of solution for $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,t,u,\nabla u)$ [J]. J Math Anal Appl, 1993, 172: 130-146.

[8] LI Y, XIE C. Blow-up for p-Laplace parabolic equations [J]. Electron J Differential Equations, 2003(20): 1-12.

[9] ZHAO J. The Cauchy problem for $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ when $2N/(N+1)$ [J]. Nonlinear Anal T M A, 1995, 24: 615-630.

[10] DIBENEDETTO E, HERRERO M A. On Cauchy problem and initial traces for a degenerate parabolic equations [J]. Trans Amer Soc, 1989, 314: 187-224.

[11] BENILAN P H, CRANDALL M G, PIERRE M. Solutions of the porous medium equation in $\mathbf{R}^N$ under optimal conditions on initial values [J]. Indiana Univ Math J, 1984, 33: 51-71.

[12] ZHAO J, XU Z. Cauchy problem and initial traces for a doubly degenerate parabolic equation [J]. Sci in China, Ser A, 1996, 39: 673-684.

[13] FAN H. Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure [J]. Acta Math Sinica, English Ser, 2004, 20: 663-682.

[14] YIN J, WANG C. Properties of the boundary flux of a singular diffusion process [J]. Chin Ann Math, 2004, 25B(2): 175-182.

[15] WANG J, CHONG S, GAO W. Existence of local solutions to a class of doubly degenerate parabolic equations [J]. Northeast Math J, 2007, 23: 157-166.

[16] FICHERA G. Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche delsecondo ordine [J]. Atti Accad Naz Lincei Mem CI Sci Fis Mat Nat Sez, 1956, 1(8): 1-30.

[17] OLEINIK O A, RADKEVIC E V. Second order differential equations with nonnegative characteristic form [M]. New York: Plenum Press, 1973.

[18] LADYSHENSKAYA O A, SOLOUNIKO V A, URALTSEVA N N. Linear and quasilinear equations of parabolic type [M]. Providence R I: Am Math Soc, 1968.

[19] FRIEDMAN A. Partial differential equations of parabolic type [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc, 1964.

[20] ARONSON D G. Regularity properties of flows through porous media [J]. SIMJ Appl Math, 1969, 17: 461-467.

[21] ARONSON D G, BENILAN P H. Régularité des solutions de l' équation des milieux poreux dans Rn [J]. C R Acad Sci Paris Sér A, 1979, 288: 103-105.

[22] ARONSON D G. Regularity properties of flows through porous media: a counterexample [J]. SIMJ Appl Math, 1970, 19: 299-307.

[23] ARONSON D G. Regularity properties of flows through porous media: the interface [J]. Arch Rational Mech Anal, 1970, 37: 1-10.

(责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤)