［文章编号］1007－7405(2015)04－0305－06

# 一类 Holling－Tanner 生态流行病系统的周期解

钟小容，王凤筵，张树文

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］研究了一类在捕食者种群中带有传染病结构的周期非自治 Holling－Tanner 捕食者－食饵模型，证明了所有正初始值的解保持正值，并利用重合度理论、Mawhin's 的连续性定理，得到了周期非自治系统正周期解存在的充分条件.

［关键词］Holling－Tanner；捕食－食饵模型；周期解；重合度；Mawhin 连续性定理

［中图分类号］O 175.13　　［文献标志码］A

## Periodicity in a Holling-Tanner Eco-epidemiological System

ZHONG Xiao-rong，WANG Feng-yan，ZHANG Shu-wen

（School of Science，Jimei University，Xiamen 361021，China）

**Abstract**：An epidemic model of a Holling-Tanner predator-prey system with epidemic in predator is discussed in this paper. The solution with initial data always remains positive in its region. The sufficient conditions are easily established for the existence of positive periodic solutions，by the methods of coincidence degree and Mawhin's continuation theorem.

**Key words**：Holling-Tanner；predator-prey model；periodic solution；coincidence degree；Mawhin's continuation theorem

## 0　引言

在生态学和生物数学的领域，捕食者和食饵之间的动力学关系一直是主要的研究方向之一[1]. 传统的捕食者－食饵系统模型是 Lotka－Volterra 模型，模型中的食饵直接转化为捕食者. 另一种著名的半比率依赖的捕食－食饵模型由 Leslie 和 Gower 提出，被称为 Holling－Tanner 捕食－食饵模型，这个模型形式如下：

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - bx(t)) - cx(t)y(t), \\ y' = y(t)(d - ey(t)/x(t)). \end{cases} \tag{1}$$

其中：$x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示 $t$ 时刻食饵种群密度和捕食者种群密度；$a$ 表示食饵种群的出生率；$a/b$ 表示食饵种群的密度制约率；$c$ 表示捕食者种群捕食食饵的比率；$d$ 表示捕食者种群的出生率；$x(t)/e$ 表示捕食者捕食的食饵用来作为捕食者的环境容纳量.

在自然界中，种群不是孤立生存的，当传染病在其中一个种群中流行时，是否会影响其他种群的生存呢？在种群系统中对传染病影响的讨论引起了许多学者的关注，有大量的文献研究了疾病在食饵

［收稿日期］2014－05－21　　［修回日期］2014－12－19
［基金项目］国家自然科学基金资助项目（31272653）
［作者简介］钟小容（1991—），女，硕士生，从事生物数学方向研究. 通信作者：王凤筵（1968—），男，副教授，博士，从事生物数学研究，E-mail：wangfy68@163.com.

种群和捕食者种群中传播的捕食－食饵模型．例如，文献［2］研究了在食饵种群中有传染病结构的 Lotka－Volterra 捕食者－食饵模型；文献［3］研究了在捕食者种群中有传染病结构的 Lotka－Volterra 捕食者－食饵模型．众所周知，任何生物或环境参数都会随时间而波动，所以非自治的捕食者－食饵模型也有许多学者研究．文献［2－3］都是在 Lotka－Volterra 捕食者－食饵模型中引进传染病结构，但是，目前还没有发现对半比率依赖型 Holling－Tanner 捕食者－食饵模型在捕食者种群中引进传染病结构的模型的研究．因此本文引进并研究一个周期的在捕食者种群中带有传染病结构的 Holling－Tanner 捕食者－食饵模型：

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(r_1(t) - a_1(t)x(t)) - b_1(t)x(t)S(t), \\ S'(t) = S(t)(r_2(t) - (S(t) + I(t))/(m(t) + x(t))) - \beta(t)S(t)I(t), \\ I'(t) = \beta(t)S(t)I(t) - \alpha(t)I(t). \end{cases} \tag{2}$$

其中：$x(t)$ 表示 $t$ 时刻食饵种群密度；$S(t)$ 表示 $t$ 时刻捕食者种群中的易感者密度；$I(t)$ 表示 $t$ 时刻捕食者种群中的已感者密度；$r_1(t)$，$r_2(t)$，$a_1(t)$，$b_1(t)$，$\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 都是 $\omega$ 周期正函数，$\omega$ 是正常数；$r_1(t)$ 和 $r_1(t)/a_1(t)$ 分别表示为 $t$ 时刻食饵种群的出生率和密度制约率；$r_2(t)$ 表示 $t$ 时刻捕食者种群中易感者的出生率；$m(t)$ 表示 $t$ 时刻 $x(t)=0$ 时捕食者种群中的易感者的环境容纳量．为了计算方便，在文中令 $m(t)=m$ 为正常量，$b_1(t)$ 表示 $t$ 时刻捕食者种群中易感者对食饵种群的捕食率，$\beta(t)$ 表示 $t$ 时刻接触感染率，$\alpha(t)$ 表示 $t$ 时刻捕食者种群中的已感者的死亡率．模型中，假设了染病捕食者没有种群繁殖能力和对食饵的捕食能力，但是也要占有一定的生存资源，这是符合实际的，因为染病的捕食者因病没有能力捕食．本文讨论了系统正周期解的存在性，对于研究传染病的传播有重要的生物学意义．

## 1 正周期解的存在性

为了得到系统（2）的正周期解，先给出一些基本概念和结果．

设 $X$ 和 $Y$ 是赋范向量空间，$L$ 是一个线性映射：$Dom\ L \subset X \to Y$，$N$ 是一个连续映射：$X \to Y$．如果 $\dim Ker\ L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L < +\infty$ 且 $\operatorname{Im} L$ 是 $Y$ 中的紧集，则 $L$ 是指标为 0 的 Fredholm 映射．如果 $L$ 是指标为 0 的 Fredholm 映射，且存在两个连续投影 $P: X \to X$ 和 $Q: Y \to Y$ 满足 $\operatorname{Im} P = Ker\ L, \operatorname{Im} L = Ker\ Q = \operatorname{Im}(I-Q)$，那么，$L|Dom\ L \cap Ker\ P: (I-P)X \to \operatorname{Im} L$ 可逆．定义 $K_P$ 为此逆映射．如果 $\Omega$ 是 $X$ 中的有界子集，那么 $N$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的 $L$ 紧集．如果 $QN(\overline{\Omega})$ 有界，$K_P(I-Q)N: \overline{\Omega} \to X$ 是紧的，那么 $\operatorname{Im} Q$ 和 $Ker\ L$ 同构，则存在同构映射 $J: \operatorname{Im} Q \to Ker\ L$．

为了证明存在性定理，首先会用到 Gaines 和 Mawhin's 连续性定理[4]．

**引理 1** 当 $L$ 是指标为 0 的 Fredholm 映射，$N$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的 $L$ 紧集，则当：1）对 $\forall \lambda \in (0,1)$，算子方程 $Lx = \lambda Nx$ 的解 $x \notin \partial\Omega$；2）对所有的 $x \in \partial\Omega \cap Ker\ L$ 且 $\deg\{JQN, \Omega \cap Ker\ L, 0\} \neq 0$ 时，$QNx \neq 0$．那么在 $Dom\ L \cap \overline{\Omega}$，方程 $Lx = Nx$ 至少有一个解．

**引理 2** $R_+^3 = \{(x,S,I) \mid x > 0, S > 0, I > 0\}$ 是系统（2）的不变集．

**证明** $x(t) = x(0)\exp\{\int_0^t [(r_1(l) - a_1(l)x(l)) - b_1(l)S(l)]\mathrm{d}l\}$，$S(t) = S(0)\exp\{\int_0^t [(r_2(l) - (S(l) + I(l))/(m + x(l))) - \beta(l)I(l)]\mathrm{d}l\}$，$I(t) = I(0)\exp\{\int_0^t [\beta(l)S(l) - \alpha(l)]\mathrm{d}l\}$，对所有 $t \geqslant 0$ 均成立，证毕．

为了方便起见，定义 $\bar{g} = \int_0^\omega |g(t)|\mathrm{d}t/\omega$，其中 $g$ 是连续且以 $\omega$ 为周期的周期函数，$\omega > 0$．

由连续时间的比率依赖捕食－食饵系统[5－8]直接得到定理 1．全局正周期解存在的主要结果将在定理 1 中给出．

**定理 1** 若 $\overline{r_1} > \overline{\alpha b_1}/\bar{\beta}$ 和 $\overline{r_2} > \bar{\alpha}/m\bar{\beta}$，则系统（2）至少存在一个 $\omega$ 周期解.

**证明** 首先作变换，令 $x(t) = \exp[y_1(t)]$，$S(t) = \exp[y_2(t)]$，$I(t) = \exp[y_3(t)]$，那么系统（2）就变为：

$$\begin{cases} dy_1(t)/dt = r_1(t) - a_1(t)\exp[y_1(t)] - b_1(t)\exp[y_2(t)], \\ dy_2(t)/dt = r_2(t) - \{\exp[y_2(t)] + \exp[y_3(t)]\}/\{m + \exp[y_1(t)]\} - \beta(t)\exp[y_3(t)], \\ dy_3(t)/dt = \beta(t)\exp[y_2(t)] - \alpha(t). \end{cases} \tag{3}$$

为了将引理1运用到系统（2）中，定义 $X = Y = \{y(t) = (y_1(t),y_2(t),y_3(t))^{\mathrm{T}} \in C(R,R^3), y(t+\omega) = y(t)\}$ 以及 $\|y\| = \|(y_1(t),y_2(t),y_3(t))^{\mathrm{T}}\| = \max\limits_{t\in[0,\omega]}|y_1(t)| + \max\limits_{t\in[0,\omega]}|y_2(t)| + \max\limits_{t\in[0,\omega]}|y_3(t)|$. 对 $\forall y \in X$(或 $Y$)，$X$ 和 $Y$ 是范数 $\|\cdot\|$ 上的 Banach 空间. 那么 $Ny = \{r_1(t) - a_1(t)\exp[y_1(t)] - b_1(t)\exp[y_2(t)],\ r_2(t) - [\exp[y_2(t)] + \exp[y_3(t)]]/[m + \exp[y_1(t)]] - \beta(t)\exp[y_3(t)],\ \beta(t)\exp[y_2(t)] - \alpha(t)\}^{\mathrm{T}}$，其中 $y \in X$. $Ly = \dot{y} = dy(t)/dt$，$Py = \int_0^{\omega} y(t)dt/\omega$，$y \in X$；$Qz = \int_0^{\omega} z(t)dt/\omega$，$z \in Y$. 则 $Ker\ L = R^2$，$\mathrm{Im}\ L = \{z \in Y: \int_0^{\omega} z(t)dt = 0\}$ 在 $Y$ 中是闭集，$\dim Ker\ L = 2 = \mathrm{codim\ Im}\ L$，$P$ 和 $Q$ 为连续映射，满足 $\mathrm{Im}\ P = Ker\ L, \mathrm{Im}\ L = Ker\ Q = \mathrm{Im}(I - Q)$.

进一步，$L$ 的广义逆 $K_p: \mathrm{Im}\ L \to Ker\ P \cap Dom\ L$ 存在，且为：$K_p(z) = \int_0^t z(s)ds - \int_0^{\omega}\int_0^t z(s)dsdt/\omega$. 那么，

$QNy = \{\int_0^{\omega}\{r_1(l) - a_1(l)\exp[y_1(l)] - b_1(l)\exp[y_2(l)]\}dl/\omega,\ \int_0^{\omega}\{r_2(l) - [\exp[y_2(l)] + \exp[y_3(l)]]/[m + \exp[y_1(l)]] - \beta(l)\exp[y_3(l)]\}dl/\omega, \int_0^{\omega}[\beta(l)\exp[y_2(l)] - \alpha(l)]dl/\omega)^{\mathrm{T}}$,

$K_P(I - Q)Ny = \{\int_0^t[r_1(l) - a_1(l)\exp[y_1(l)] - b_1(l)\exp[y_2(l)]]dl,\ \int_0^t[r_2(l) - [\exp[y_2(l)] + \exp[y_3(l)]]/[m + \exp[y_1(l)]] - \beta(l)\exp[y_3(l)]]dl, \int_0^t[\beta(l)\exp[y_2(l)] - \alpha(l)]dl\}^{\mathrm{T}}/\omega - \{\int_0^{\omega}\int_0^t[r_1(l) - a_1(l)\exp[y_1(l)] - b_1(l)\exp[y_2(l)]]dldt, \int_0^{\omega}\int_0^t[[r_2(l) - \exp[y_2(l)] + \exp[y_3(l)]]/[m + \exp[y_1(l)]] - \beta(l)\exp[y_3(l)]]dldt, \int_0^{\omega}\int_0^t[\beta(l)\exp[y_2(l)] - \alpha(l)]dldt\}^{\mathrm{T}}/\omega - \{(t/\omega - 1/2)\int_0^{\omega}[r_1(l) - a_1(l)\exp[y_1(l)] - b_1(l)\exp[y_2(l)]]dl,\ (t/\omega - 1/2)\int_0^{\omega}[r_2(l) - [\exp[y_2(l)] + \exp[y_3(l)]]/[m + \exp[y_1(l)]] - \beta(l)\exp[y_3(l)]]dl, (t/\omega - 1/2)\int_0^{\omega}[\beta(l)\exp[y_2(l)] - \alpha(l)]dl\}^{\mathrm{T}}$.

显然，$QN$ 和 $K_P(I - Q)N$ 是连续的. 不难证明 $K_P(I - Q)N(\bar{\Omega})$ 对于任意有界开集 $\Omega \subset X$ 是紧集，所以 $QN(\bar{\Omega})$ 是有界的，因此，$N$ 是 $L$ 紧.

为应用连续性定理，需在 $X$ 中找到至少两个恰当的开子集，考虑算子方程：$Ly = \lambda Ny$，$\lambda \in (0, 1)$，得到，

$$\begin{cases} dy_1(t)/dt = \lambda\{r_1(t) - a_1(t)\exp\{y_1(t)\} - b_1(t)\exp\{y_2(t)\}\}, \\ dy_2(t)/dt = \lambda\{r_2(t) - [\exp[y_2(t)] + \exp[y_3(t)]]/[m + \exp[y_1(t)]] - \beta(t)\exp[y_3(t)]\}, \\ dy_3(t)/dt = \lambda\{\beta(t)\exp[y_2(t)] - \alpha(t)\}. \end{cases} \tag{4}$$

假设系统（4）的任意解 $y = \{(y_1(t),y_2(t),y_3(t))^{\mathrm{T}}\} \in X$，对系统（4）左右两边从0到 $\omega$ 积分，得到，$\int_0^{\omega}\{r_1(t) - a_1(t)\exp[y_1(t)] - b_1(t)\exp[y_2(t)]\}dt = 0$，$\int_0^{\omega}\{r_2(t) - [\exp[y_2(t)] +$

$\exp[y_3(t)]]/[m+\exp[y_1(t)]]-\beta(t)\exp[y_3(t)]\}\mathrm{d}t=0$, $\int_0^\omega\{\beta(t)\exp[y_2(t)]-\alpha(t)\}\mathrm{d}t=0$, 即

$$\bar{r}_1\omega=\int_0^\omega\{a_1(t)\exp[y_1(t)]+b_1(t)\exp[y_2(t)]\}\mathrm{d}t,\tag{5}$$

$$\bar{r}_2\omega=\int_0^\omega\{[\exp[y_2(t)]+\exp[y_3(t)]]/[m+\exp[y_1(t)]]+\beta(t)\exp[y_3(t)]\}\mathrm{d}t,\tag{6}$$

$$\bar{\alpha}\omega=\int_0^\omega\{\beta(t)\exp[y_2(t)]\}\mathrm{d}t.\tag{7}$$

由式 (5)—式 (7) 知,

$$\int_0^\omega|\dot{y}_1(t)|\mathrm{d}t=\lambda\int_0^\omega|r_1(t)-a_1(t)\exp[y_1(t)]-b_1(t)\exp[y_2(t)]|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega|r_1(t)|\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^\omega a_1(t)\exp[y_1(t)]\mathrm{d}t+\int_0^\omega b_1(t)\exp[y_2(t)]\mathrm{d}t\leqslant(\overline{R_1}+\overline{r_1})\omega,\tag{8}$$

$$\int_0^\omega|\dot{y}_2(t)|\mathrm{d}t=\lambda\int_0^\omega|r_2(t)-[\exp[y_2(t)]+\exp[y_3(t)]]/[m+\exp[y_1(t)]]-\beta(t)\exp[y_3(t)]|\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\int_0^\omega|r_2(t)|\mathrm{d}t+\int_0^\omega[\exp[y_2(t)]+\exp[y_3(t)]]/[m+\exp[y_1(t)]]\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^\omega\beta(t)\exp[y_3(t)]\mathrm{d}t\leqslant(\overline{R_2}+\overline{r_2})\omega,\tag{9}$$

$$\int_0^\omega|\dot{y}_3(t)|\mathrm{d}t=\lambda\int_0^\omega|\beta(t)\exp[y_2(t)]-\alpha(t)|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^\omega|\alpha(t)|\mathrm{d}t+$$
$$\int_0^\omega\beta(t)\exp[y_2(t)]\mathrm{d}t\leqslant(\overline{R_3}+\bar{\alpha})\omega.\tag{10}$$

其中 $\overline{R_1}=\int_0^\omega|r_1(t)|\mathrm{d}t/\omega$, $\overline{R_2}=\int_0^\omega|r_2(t)|\mathrm{d}t/\omega$, $\overline{R_3}=\int_0^\omega|\alpha(t)|\mathrm{d}t/\omega$.

由于 $y=\{y(t)\}\in X$, 则存在 $\xi_i,\eta_i\in[0,\omega]$, 使得

$$y_i(\xi_i)=\min_{t\in[0,\omega]}\{y_i(t)\},y_i(\eta_i)=\max_{t\in[0,\omega]}\{y_i(t)\},i=1,2,3.\tag{11}$$

由式 (5) 和式 (11) 知, $\overline{r_1}\omega\geqslant\int_0^\omega a_1(t)\exp[y_1(t)]\mathrm{d}t\geqslant\exp[y_1(\xi_1)]\int_0^\omega a_1(t)\mathrm{d}t=\exp[y_1(\xi_1)]\overline{a_1}\omega$, 所以得到, $y_1(\xi_1)\leqslant\ln\{\overline{r_1}/\overline{a_1}\}$, 因此

$$y_1(t)\leqslant y_1(\xi_1)+\int_0^\omega|\dot{y}_1(t)|\mathrm{d}t\leqslant\ln\{\overline{r_1}/\overline{a_1}\}+(\overline{R_1}+\overline{r_1})\omega.\tag{12}$$

另一方面, 由式 (5) 和式 (11) 又知, $\bar{r}_1\omega\leqslant\int_0^\omega\{a_1(t)\exp[y_1(\eta_1)]+b_1(t)\exp[y_2(t)]\}\mathrm{d}t\leqslant\exp[y_1(\eta_1)]\overline{a_1}\omega+\overline{b_1\alpha}\omega/\bar{\beta}$. 所以得到, $y_1(\eta_1)\geqslant\ln[\overline{r_1}-\overline{b_1\alpha}/\bar{\beta}]-\ln\overline{a_1}$, 因此,

$$y_1(t)\geqslant y_1(\eta_1)-\int_0^\omega|\dot{y}_1(t)|\mathrm{d}t\geqslant\ln\{\overline{r_1}-\overline{b_1\alpha}/\bar{\beta}\}-\ln\overline{a_1}-(\overline{R_1}+\overline{r_1})\omega.\tag{13}$$

由式 (12) 和式 (13) 得到,

$$\max_{t\in[0,\omega]}|y_1(t)|\leqslant\max\{|\ln\{\overline{r_1}/\overline{a_1}\}+(\overline{R_1}+\overline{r_1})\omega|,|\ln\{\overline{r_1}-\overline{b_1\alpha}/\bar{\beta}\}-\ln\overline{a_1}-(\overline{R_1}+\overline{r_1})\omega|\}:=B_1.\tag{14}$$

同样, 由式 (5) 和式 (11) 知, $\bar{r}_1\omega\geqslant\int_0^\omega b_1(t)\exp[y_2(t)]\mathrm{d}t\geqslant\exp[y_2(\xi_2)]\int_0^\omega b_1(t)\mathrm{d}t=\exp[y_2(\xi_2)]\overline{b_1}\omega$, 所以得到, $y_2(\xi_2)\leqslant\ln\{\overline{r_1}/\overline{b_1}\}$, 因此,

$$y_2(t)\leqslant y_2(\xi_2)+\int_0^\omega|\dot{y}_2(t)|\mathrm{d}t\leqslant\ln\{\overline{r_1}/\overline{b_1}\}+(\overline{R_2}+\overline{r_2})\omega.\tag{15}$$

又由式 (7) 和式 (11) 知, $\bar{\alpha}\omega\leqslant\int_0^\omega\{\beta(t)\exp[y_2(\eta_2)]\}\mathrm{d}t\leqslant\exp[y_2(\eta_2)]\int_0^\omega\beta(t)\mathrm{d}t=$

$\exp[y_2(\eta_2)]\bar{\beta}\omega$，那么 $y_2(\eta_2) \geqslant \ln\{\bar{\alpha}/\bar{\beta}\}$，因此，

$$y_2(t) \geqslant y_2(\eta_2) - \int_0^\omega |\dot{y}_2(t)|\mathrm{d}t \geqslant \ln\{\bar{\alpha}/\bar{\beta}\} - (\overline{R_2} + \overline{r_2})\omega. \tag{16}$$

那么由式（15）和式（16）得到，

$$\max_{t\in[0,\omega]} |y_2(t)| \leqslant \max[\,|\ln\{\overline{r_1}/\overline{b_1}\}| + (\overline{R_2} + \overline{r_2})\omega\,|, |\ln\{\bar{\alpha}/\bar{\beta}\} - (\overline{R_2} + \overline{r_2})\omega|\,] := B_2. \tag{17}$$

又由式（6）和式（11）知，$\overline{r_2}\omega \geqslant \int_0^\omega \beta(t)\exp[y_3(t)]\mathrm{d}t \geqslant \exp[y_3(\xi_3)]\int_0^\omega \beta(t)\mathrm{d}t = \exp[y_3(\xi_3)]\bar{\beta}\omega$.

所以得到，$y_3(\xi_3) \leqslant \ln\{\overline{r_2}/\bar{\beta}\}$，因此，

$$y_3(t) \leqslant y_3(\xi_3) + \int_0^\omega |\dot{y}_3(t)|\mathrm{d}t \leqslant \ln\{\overline{r_2}/\bar{\beta}\} + (\overline{R_3} + \bar{\alpha})\omega. \tag{18}$$

此外，由式（6）和式（11）知，$\overline{r_2}\omega \leqslant \int_0^\omega \{[\exp[y_2(t)] + \exp[y_3(\eta_3)]]/m + \beta(t)\exp[y_3(\eta_3)]\}\mathrm{d}t \leqslant (\bar{\beta}\omega + \omega/m)\exp[y_3(\eta_3)] + \bar{\alpha}\omega/\bar{\beta}m$. 那么 $y_3(\eta_3) \geqslant \ln\{\overline{r_2} - \bar{\alpha}/\bar{\beta}m\} - \ln\{\bar{\beta} + 1/m\}$，因此，

$$y_3(t) \geqslant y_3(\eta_3) - \int_0^\omega |\dot{y}_3(t)|\mathrm{d}t \geqslant \ln\{\overline{r_2} - \bar{\alpha}/\bar{\beta}m\} - \ln\{\bar{\beta} + 1/m\} - (\overline{R_3} + \bar{\alpha})\omega := B_3. \tag{19}$$

那么由式（18）和式（19）得到，

$$\max_{t\in[0,\omega]} |y_3(t)| \leqslant \max\{\,|\ln\{\overline{r_2}/\bar{\beta}\} + (\overline{R_3} + \bar{\alpha})\omega|, |B_3|\} := B_4. \tag{20}$$

显然，$B_1$，$B_2$ 和 $B_4$ 与 $\lambda$ 无关. 在定理1的假设条件下，很容易得到系统（2）的代数方程

$$\overline{r_1} - \overline{a_1}v_1 - \overline{b_1}v_2 = 0, \overline{r_2} - (v_2 + v_3)/(m + v_1) - \bar{\beta}v_3 = 0, \bar{\beta}v_2 - \bar{\alpha} = 0 \tag{21}$$

有唯一解 $(v_1^*, v_2^*, v_3^*)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{int}\, R_+^3$，$v_i^* > 0$. 令 $B = \max\{B_1, B_2, B_4\} + B_0$，取充分大的 $B_0$，使得 $\|(\ln\{v_1^*\}, \ln\{v_2^*\}, \ln\{v_3^*\})^{\mathrm{T}}\| = |\ln\{v_1^*\}| + |\ln\{v_2^*\}| + |\ln\{v_3^*\}| < B_0$，定义，$\Omega = \{y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))^{\mathrm{T}} \in X : \|y\| < B\}$.

显然 $\Omega$ 是 $X$ 中的有界开集，且满足引理1的条件1）. 当 $y \in \partial\Omega \cap Ker\ L$，向量 $\boldsymbol{y} = \{(y_1, y_2, y_3)^{\mathrm{T}}\}$ 满足 $\|y\| = B$ 时，那么，$QNy = \begin{pmatrix} \overline{r_1} - \overline{a_1}\exp[y_1] - \overline{b_1}\exp[y_2] \\ \overline{r_2} - [\exp[y_2] + \exp[y_3]]/[m + \exp[y_1]] - \bar{\beta}\exp[y_3] \\ \bar{\beta}\exp[y_2] - \bar{\alpha} \end{pmatrix} \neq 0$. 通过进一步计算得到，$\deg\{JQN, \Omega \cap Ker\ L, 0\} =$

$$\mathrm{sgn}\det\begin{pmatrix} -\overline{a_1}\exp[y_1] & -\overline{b_1}\exp[y_2] & 0 \\ \{\exp[y_1 + y_2] + \exp[y_1 + y_3]\}/\{m + \exp[y_1]\}^2 & -\exp[y_2]/\{m + \exp[y_1]\} & -\exp[y_3]/\{m + \exp[y_1]\} - \bar{\beta}\exp[y_3] \\ 0 & \bar{\beta}\exp\{y_2\} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{sgn}\{-\overline{a_1\beta}\exp[y_1 + y_2 + y_3](\bar{\beta}\exp[y_1] + m\bar{\beta} + 1)/[m + \exp[y_1]]\} \neq 0.$$

至此，证明了 $\Omega$ 满足引理1连续性定理中的所有条件. 当 $Ly = Ny$ 时，在 $Dom\ L \cap \bar{\Omega}$ 中，系统（2）至少存在一个 $\omega$ 周期解为：$y^* = \{y^*(t)\} = \{(y_1{}^*(t), y_2{}^*(t), y_3{}^*(t))^{\mathrm{T}}\}$，证毕.

## 2 例子

在本节中，将给出一个具体的捕食者种群中带有传染病结构的 Holling – Tanner 捕食 – 食饵模型，说明在定理1的条件成立时，模型至少存在一个 $\omega$ 正周期解. 模型如下：

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)((2+0.2\sin t) - (5+0.1\sin t)x(t)) - ((1+0.15\cos t)/4)x(t)S(t), \\ S'(t) = S(t)((2+0.15\cos t) - [S(t)+I(t)]/[4+x(t)]) - (1+0.1\cos t)S(t)I(t), \\ I'(t) = (1+0.1\cos t)S(t)I(t) - (3+0.1\sin t)I(t). \end{cases} \tag{22}$$

其中：$r_1(t) = 2+0.2\sin t$；$a_1(t) = 5+0.1\sin t$；$b_1(t) = (1+0.15\cos t)/4$；$r_2(t) = 2+0.15\cos t$；$m=4$；$\beta(t) = 1+0.1\cos t$；$\alpha(t) = 3+0.1\sin t$ 和 $\omega = 2\pi$． 由于 $\overline{r_1} = 2$，$\bar{\alpha} = 3$，$\bar{\beta} = 1$，$\overline{b_1} = 1/4$，$\overline{r_2} = 2$，$m = 4$，所以 $2 = \overline{r_1} > \overline{\alpha b_1}/\bar{\beta} = (3\times1/4)/1 = 3/4$，$2 = \overline{r_2} > \bar{\alpha}/(m\bar{\beta}) = 3/(4\times1) = 0.75$，系统（22）满足定理 1 的两个条件. 系统（22）对应的自治方程组系统（21）为：$2-5v_1-v_2/4=0$，$2-(v_2+v_3)/(4+v_1)-v_3=0$，$v_2-3=0$，与之相对应地有唯一的正解 $(1/4,3,22/21)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{int}\, R_+^3$，注意到系统（22）的系数中的周期小扰动幅度相对较小（最大幅度为 0.2），因此，在该自治系统的平衡态附近 $(1/4,3,22/21)^{\mathrm{T}}$ 至少存在一个 $2\pi$ 正周期解.

## 3 结论

在本文中，研究了一类在捕食者种群中带有传染病结构的周期非自治 Holling - Tanner 捕食 - 食饵模型. 由定理 1 的条件：$\overline{r_1} > \overline{\alpha b_1}/\bar{\beta}$ 和 $\overline{r_2} > \bar{\alpha}/m\bar{\beta}$，可以知道，当食饵种群的出生率大于捕食者种群中易感者对食饵种群的捕食率，并且，捕食者种群中易感者的出生率大于捕食者种群中易感者的环境容纳率时，系统至少存在一个 $\omega$ 周期解. 为此，本文通过具体的例子说明了模型满足定理 1 的这两个条件，所以系统至少存在一个 $\omega$ 正周期解. 对传染病系统而言，系统存在正周期解将意味着传染病会在整个种群中周期传播.

## [参考文献]


[1] BERRYMAN A A. The origins and evolution of predator-prey theory [J]. Ecology, 1992, 73: 1530-1535.

[2] XIAO Y N, CHEN L S. Modeling and analysis of a predator-prey model with disease in the prey [J]. Mathematical Biosciences, 2001, 171: 59-82.

[3] BOB W K, GEORGE A K, VAN VOORN , et al. Stabilization and complex dynamics in a predator-prey model with predator suffering from an infectious disease [J]. Ecological Complexity, 2011, 8: 113-122.

[4] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[5] AGARWAL R P. Difference equations and inequalities: theory, methods and applications, monographs and textbooks in pure [M]. New York: Appli Math, 2000: 228.

[6] GOH B S. Management and analysis of biological populations [M]. Netherlands: Elsevier Scientific, 1980.

[7] MURRY J D. Mathematical biology [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[8] WIENER J. Differential equations with piecewise constant delays, trends in theory and practice of nonlinear differential equations [M]. New York: Dekker, 1984: 90.


（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）