第 20 卷　第 4 期
2015 年 7 月

集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University (Natural Science)

Vol. 20　No. 4
Jul. 2015

[文章编号] 1007 - 7405(2015)04 - 0297 - 08

具有毒素脉冲输入和干扰的非自治随机模型

王玲玉，张树文

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 建立了一个具有毒素脉冲输入和干扰的非自治随机模型. 通过构造比较系统，利用微分方程的比较定理等方法，证明了系统的均值有界性和全局吸引性，确定了系统非平均持续生存和平均持续生存的充分条件，进而研究了系统的一些动力学行为.

[关键词] 脉冲效应；随机干扰；单种群模型；平均持续生存

[中图分类号] O 175.13　　[文献标志码] A

A Research of Nonautonomous Stochastic Population Model with Pulse Input of Environment Toxin and Random Perturbation

WANG Ling-yu, ZHANG Shu-wen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: A nonautonomous stochastic population model with pulse input of environment toxin and random perturbation was proposed. By constructing comparison systems and utilizing comparison theorem of differential equation, the boundedness of expectation and global attractivity of the system were proved. The sufficient condition of non-persistence in the mean and persistence in the mean were established. Furthermore, some dynamic behaviors of the system were investigated.

Key words: impulsive effect; random perturbation; single population model; persistence in the mean

0　引言

由工业污染物和人类活动引起的环境污染是社会生态学的一个重要研究课题. 在种群的生长发育过程中，种群个体数量的增长除受到种群密度制约外，还会受到环境污染的严重影响，环境中各种有毒物质的存在对无保护种群的生存有极大威胁. 所以污染环境下种群的持续生存问题，成为生物数学研究的一个热点问题，也得到了很多研究成果[1-4]. 同时，生物种群的生活环境受到人类活动与环境突然变化的影响，所以，研究脉冲效应[5-6]与随机扰动[7-9]同时作用的种群动力系统成为现代生物数学的又一个重要课题. 文献［10］研究了下列具有脉冲输入毒素的单种群随机干扰模型：

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\mathrm{d}x(t) = x(t)(r - r_1c(t) - ax(t))\mathrm{d}t + \alpha x(t)\mathrm{d}B_t, \\ &\mathrm{d}c(t) = (-hc(t) + br_1c(t)x(t))\mathrm{d}t, \end{aligned}\right\} t \neq n\omega, \\ \left.\begin{aligned} &\Delta x(t) = 0, \\ &\Delta c(t) = P, \end{aligned}\right\} t = n\omega. \end{cases} \tag{1}$$

[收稿日期] 2014 - 06 - 13　　[修回日期] 2015 - 01 - 12
[基金项目] 国家自然科学基金资助项目（31272653，11201216）
[作者简介] 王玲玉（1989—），女，硕士生，从事生物数学方向研究. 通信作者：张树文（1963—），男，教授，硕导，从事生物数学方向研究，E-mail:anzsw_123@163.com.

模型（1）是在种群出生率、密度制约及与毒素相互作用等各个条件保持不变，即各参数为常值的假设下建立的. 而由于种群和毒素所处的环境是随着时间的变化而变化的，因此考虑各参数为函数的非自治系统是必要的，而环境突然变化引起的毒素输入时刻不一定是时间等距的. 所以在系统（1）的基础上建立下面具有脉冲效应的非自治的随机单种群模型：

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\mathrm{d}x(t) = x(t)(r(t) - k(t)c(t) - a(t)x(t))\mathrm{d}t + \alpha(t)x(t)\mathrm{d}B_t, \\ &\mathrm{d}c(t) = (-h(t)c(t) + b(t)k(t)c(t)x(t))\mathrm{d}t, \end{aligned}\right\} t \neq \tau_k, \\ \left.\begin{aligned} &\Delta x(t) = 0, \\ &\Delta c(t) = P, \end{aligned}\right\} t = \tau_k. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $x(t)$ 为 t 时刻种群的密度；$c(t)$ 为 t 时刻种群个体体内毒素密度. 对模型（2）作如下假设：

（H_1）$r(t), a(t), k(t), h(t), b(t), \alpha(t), t \in [0, +\infty)$ 为以 ω 为周期的连续非负函数，其中 $0 < b(t) < 1$；

（H_2）$0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k < \cdots$ 为脉冲时刻,且存在常数 q 使得 $\tau_{\kappa+q} = \tau_k + \omega, \Delta x(t) = x(n\omega^+) - x(n\omega), \Delta c(t) = c(n\omega^+) - c(n\omega)$；

（H_3）B_t 是完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \{\mathscr{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ 上 1 维标准 Brown 运动，$\alpha^2(t)$ 为白噪声强度.

1 基本定义与引理

引理 1[2] **（随机微分方程比较定理）** 设 $x_i(t)(i = 1,2)$ 分别是随机微分方程 $\mathrm{d}x_i(t) = f_i(x_i(t), t)\mathrm{d}t + g(x_i(t), t)\mathrm{d}B_t$ 的解，其中 $f_i(x_i, t) \in C([0, +\infty) \times \mathbf{R}), g(x_i, t) \in C([0, +\infty) \times \mathbf{R}), i = 1, 2$. 若满足：1）存在定义在 $[0, +\infty)$ 上满足 $\rho(0) = 0$ 及 $\int_{0^+}^{+\infty} \rho(s)\mathrm{d}s = \infty$ 的函数 $\rho(s)$，使得 $|g(x,t) - g(y,t)| \leqslant \rho(|x - y|), x, y \in \mathbf{R}, t \geqslant 0$；2）$f_1(x,t) \leqslant f_2(x,t), x \in \mathbf{R}, t \geqslant 0$；3）$x_1(0) \leqslant x_2(0)$，则有 $x_1(t) \leqslant x_2(t)$, *a. s.* $, t \geqslant 0$.

定义 1[11] 设 $x(t)$ 是系统（2）的任意解，则：1）若 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ *a. s.*，则称种群 $x(t)$ 为灭绝；2）若 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s = 0$，则称种群 $x(t)$ 为非平均持续生存的；3）若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s > 0$，则称种群 $x(t)$ 为平均持续生存的.

定义 2[12] 设 $X^*(t) = (x^*(t), c^*(t))$ 是系统（2）满足初始条件 $x^*(0) > 0, c^*(0) > 0$ 的解，对系统（2）满足初始条件 $x(0) > 0, c(0) > 0$ 的任意解 $X_*(t) = (x(t), c(t))$，如果 $\lim\limits_{t\to+\infty} |x^*(t) - x(t)| = 0, \lim\limits_{t\to+\infty} |c^*(t) - c(t)| = 0$，则称解 $X^*(t) = (x^*(t), c^*(t))$ 是全局吸引的.

为了研究系统（2），令 $x(t) = 0$，考虑以下系统：

$$\begin{cases} \mathrm{d}c(t) = -h(t)c(t)\mathrm{d}t, t \neq \tau_k, \\ \Delta c(t) = P, t = \tau_k. \end{cases} \tag{3}$$

解决上述系统（3），得到：$c(t) = c(0^+)\exp\{-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\} + P\sum\limits_{i=1}^{k-1}\exp\{-\int_{\tau_i}^t h(s)\mathrm{d}s\}, t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$, $k \leqslant q$，其中，$c(0^+) = P\{1 + \sum\limits_{i=1}^{q-1}\exp[-\int_{\tau_i}^{\omega} h(s)\mathrm{d}s]\}/\{1 - \exp[-\int_0^{\omega} h(s)\mathrm{d}s]\}$. 所以，系统（3）有唯一周期解：$c_*(t) = c(n\omega^+)\exp\{-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\} + P\sum\limits_{i=1}^{k-1}\exp\{-\int_{\tau_i}^t h(s)\mathrm{d}s\}, t \in (n\omega + \tau_{k-1}, n\omega + \tau_k]$, $k \leqslant q$, 其中 $c(n\omega^+) = c(0^+)$.

引理 2[5] 对于系统（3）的正周期解 $c_*(t)$，系统（3）的任意一个以 $c_0 > 0$ 为初值的解 $c(t)$，有 $\lim\limits_{t\to+\infty} c(t) = c_*(t)$.

显然系统（2）存在常边界周期解 $(0, c_*(t))$.

下面，考虑下列非自治随机 Logistic 模型

$$\mathrm{d}N(t) = N(t)[(a(t) - b(t)N(t))\mathrm{d}t + \alpha(t)\mathrm{d}B_t], t \geqslant 0, \tag{4}$$

其中：$a(t), b(t), \alpha(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是连续 ω - 周期函数，且 $a(t) > 0, b(t) > 0$.

引理 3[7]　系统（4）存在以 $N(0) = N_0 > 0$ 为初始值的唯一全局连续正解，

$$N(t) = \exp\{\int_0^t [a(s) - 0.5\alpha^2(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}B_s\} /$$

$$\{1/N_0 + \int_0^t b(s)\exp\{\int_0^s [a(\tau) - 0.5\alpha^2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^s \alpha(\tau)\mathrm{d}B\tau\}\mathrm{d}s\}. \tag{5}$$

证明　作函数 $V_1(t) = 1/N(t)$ [13]，利用 Itô 公式，有：$\mathrm{d}V_1(t) = \mathrm{d}(1/N(t)) = -\mathrm{d}x/N^2(t) + (\mathrm{d}N(t))^2/N^3(t) = -(1/N(t))[(a(t) - b(t)N(t))\mathrm{d}t + \alpha(t)\mathrm{d}B_t] + \alpha^2(t)/N(t)\mathrm{d}t = V_1(t)[\alpha^2(t) - a(t)]\mathrm{d}t + b(t)\mathrm{d}t - \alpha(t)V_1(t)\mathrm{d}B_t$. 上式所对应的齐次方程为 $\mathrm{d}V_2(t) = V_2(t)[\alpha^2(t) - a(t)]\mathrm{d}t - \alpha(t)V_2(t)\mathrm{d}Bt$. 作函数 $V_3(t) = \ln V_2(t)$，再次对上式利用 Itô 公式，有：$\mathrm{d}V_3(t) = \mathrm{d}\ln V_2(t) = (1/V_2)\mathrm{d}V_2(t) - (0.5/V_2^2(t))(\mathrm{d}V_2(t))^2 = [0.5\alpha^2(t) - a(t)]\mathrm{d}t - \alpha(t)\mathrm{d}B_t$. 对上式两边从 0 到 t 取积分，得：$\ln V_2(t) - \ln V_2(0) = \int_0^t [0.5\alpha^2(s) - a(s)]\mathrm{d}s - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s$. 因此，$V_2(t) = V_2(t)\exp\{\int_0^t [0.5\alpha^2(s) - a(s)]\mathrm{d}s - \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s\}$. 利用常数变易法，得：$V_1(t) = \{1/N_0 + \int_0^t b(s)\exp\{\int_0^t [a(\tau) - 0.5\alpha^2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^s \alpha(\tau)\mathrm{d}B_\tau\}\mathrm{d}s\}/\exp\{\int_0^t [a(s) - 0.5\alpha^2(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s\}$. 因此，$N(t) = 1/V_1(t) = \exp\{\int_0^t [a(s) - 0.5\alpha^2(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s\}/\{1/N_0 + \int_0^t b(s)\exp\{\int_0^s [a(\tau) - 0.5\alpha^2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^s \alpha(\tau)\mathrm{d}B_\tau\}\mathrm{d}s\}$.

引理 4[14]　$N(t)$ 是系统（4）的解，$\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\ln N(t) \leqslant N^*$，$N^*$ 为常数，且 $N^* < 0$，则 $\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0$ *a. s.*

2　主要结论

设 $f(x)$ 是定义在 $\boldsymbol{R}_+$ 上的函数，令 $\hat{f} = \sup_{t\in R^+} f(t)$，$\check{f} = \inf_{t\in R^+} f(t)$，定义

$$\delta^* = \hat{r} - 0.5\check{\alpha}^2 - \omega^{-1}\check{k}\int_0^w c^*(s)\mathrm{d}s. \tag{6}$$

定理 1　设 $(x(t), c(t))$ 是系统（2）以 $x(0^+), c(0^+)$ 为初始值的解，则存在着一个整数 M，有 $Ex(t) \leqslant M, Ec(t) \leqslant M$，即系统（2）的解是均值有界的.

证明　作函数 $V(t) = x(t) + c(t)/b(t)$，令 $V^*(t) = x(t) + c(t)/\check{b}$，则有 $V(t) \leqslant V^*(t)$，利用 Itô 公式，对 $V^*(t)$ 沿着系统（2）的解求随机微分，当 $t \neq \tau_k$ 时，

$$\mathrm{d}V^*(t) = (x(t)r(t) - a(t)x^2(t) - \check{b}^{-1}h(t)c(t))\mathrm{d}t + \alpha(t)x(t)\mathrm{d}B_t, \tag{7}$$

当 $t = \tau_k$ 时，

$$V^*(t^+) = V^*(t) + \check{b}^{-1}P. \tag{8}$$

对 $t \in (n\omega + \tau_k, n\omega + \tau_{k+1}]$，将式（7）$n\omega + \tau_k$ 到 t 积分，得：$V^*(t) = V^*((n\omega + \tau_k)^+) + \int_{n\omega+\tau_k}^t (r(s)x(s) - a(s)x^2(s) - \check{b}^{-1}h(s)c(s))\mathrm{d}s + \int_{n\omega+\tau_k}^t \alpha(s)x(s)\mathrm{d}B_s$，对上式两端取均值有：$EV^*(t) = EV^*((n\omega + \tau_k)^+) + \int_{n\omega+\tau_k}^t E(r(s)x(s) - a(s)x^2(s) - \check{b}^{-1}h(s)c(s))\mathrm{d}s$，从而可得：$\mathrm{d}EV^*(t)/\mathrm{d}t = E(r(t)x(t) - a(t)x^2(t) - \check{b}^{-1}h(t)c(t)) \leqslant \hat{r}E(x(t)) - \check{a}(Ex(t))^2 - \check{h}\check{b}^{-1}Ec(t) \leqslant -\check{h}EV^*(t) + (\hat{r} + \check{h})Ex(t) - \check{a}(Ex(t))^2$. 由于 $(\hat{r} + \check{h})Ex(t) - \check{a}(Ex(t))^2$ 得最大值为 $(\hat{r} + \check{h})^2/4\check{a}$，所以，

$$dEV^*(t)/dt \leqslant (\hat{r}+\check{h})^2/4\check{a} - \check{h}EV^*(t). \tag{9}$$

另外，由式（8）可知：

$$EV^*(t^+) = EV^*(t) + \check{b}^{-1}P. \tag{10}$$

结合式（9）、式（10），构造下述脉冲微分方程

$$\begin{cases} dQ(t) = [(\hat{r}+\check{h})^2/4\check{a} - \check{h}Q(t)]dt, & t \neq \tau_k, \\ Q(t^+) = Q(t) + \check{b}^{-1}P, & t = \tau_k. \end{cases} \tag{11}$$

令 $A = (\hat{r}+\check{h})^2/(4\check{a})$，则当 $t \neq \tau_k$ 时，有 $dQ(t) = [A - \check{h}Q(t)]dt$. 将上式从 τ_k 到 $t, t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ 积分，得：

$$Q(t) = Q(\tau_k^+)\exp\{-\check{h}(t-\tau_k)\} + \check{h}^{-1}A\{1-\exp\{-\check{h}(t-\tau_k)\}\}, \tag{12}$$

所以，

$$Q(\tau_1) = Q(0^+)\exp\{-\check{h}\tau_1\} + \check{h}^{-1}A\{1-\exp\{-\check{h}\tau_1\}\},$$

$$Q(\tau_1^+) = Q(0^+)\exp\{-\check{h}\tau_1\} + \check{h}^{-1}A\{1-\exp\{-\check{h}\tau_1\}\} + \check{b}^{-1}P. \tag{13}$$

同理，

$$Q(\tau_2) = Q(\tau_1^+)\exp\{-\check{h}(\tau_2-\tau_1)\} + \check{h}^{-1}A(1-\exp\{-\check{h}(\tau_2-\tau_1)\}\},$$

$$Q(\tau_2^+) = Q(\tau_1^+)\exp\{-\check{h}(\tau_2-\tau_1)\} + \check{h}^{-1}A\{1-\exp\{-\check{h}(\tau_2-\tau_1)\}\} + \check{b}^{-1}P, \tag{14}$$

将式（13）代入式（14）得：$Q(\tau_2^+) = Q(0^+)\exp\{-\check{h}\tau_2\} + \{\check{h}^{-1}A(1-\exp\{-\check{h}\tau_1\}) + \check{b}^{-1}P\}\exp\{-\check{h}(\tau_2-\tau_1)\} + \check{h}^{-1}A\{1-\exp\{-\check{h}(\tau_2-\tau_1)\}\} + \check{b}^{-1}P$. 记：$B_i = \check{h}^{-1}A\{1-\exp\{-\check{h}(\tau_{i+1}-\tau_i)\}\}$，$C_k = \sum_{i=0}^{k-1}(B_i + \check{b}^{-1}P)\exp\{-\check{h}(\tau_k - \tau_{i+1})\}$. 利用归纳法得：$Q(\tau_k^+) = Q(0^+)\exp\{-\check{h}\tau_k\} + \sum_{i=0}^{k-1}(B_i + \check{b}^{-1}P)\exp\{-\check{h}(\tau_k-\tau_{i+1})\} = Q(0^+)\exp\{-\check{h}\tau_k\} + C_k$. 所以，$Q(0^+) = Q(\omega^+) = Q(\tau_q^+) = Q(0^+)\exp\{-\check{h}\omega\} + C_q$. 因此，$Q(0^+)\exp\{-\check{h}\omega\} + C_q = Q(0^+)$，即

$$Q(0^+) = C_q/(1-\exp\{-\check{h}\omega\}). \tag{15}$$

所以，当 $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ 时，$Q(t) = Q(\tau_k^+)\exp\{-\check{h}(t-\tau_k)\} + \check{h}^{-1}A\{1-\exp[-\check{h}(t-\tau_k)]\} = \{Q(0^+)\exp\{-\check{h}\tau_k\} + C_k\}\exp\{-\check{h}(t-\tau_k)\} + \check{h}^{-1}A\{1-\exp\{-\check{h}(t-\tau_k)\}\}$. 记 $D = Q(0^+)\exp\{-\check{h}\tau_k\} + C_k$，则当 $t \in (n\omega+\tau_k, n\omega+\tau_{k+1}]$ 时，有

$$Q(t) = \check{h}^{-1}A + (D - \check{h}^{-1}A)\exp\{-\check{h}(t-n\omega-\tau_k)\}. \tag{16}$$

由脉冲微分方程的比较定理得，$\lim\limits_{t\to+\infty} EV^*(t) \leqslant \lim\limits_{t\to+\infty} Q(t) \leqslant \max\{D, \check{h}^{-1}A + (D-\check{h}^{-1}A)\exp\{-\check{h}(\tau_{k+1}-\tau_k)\}\}$，又由 $V(t) \leqslant V^*(t)$，所以 $\lim\limits_{t\to+\infty} EV(t) \leqslant \max\{D, \check{h}^{-1}A + (D-\check{h}^{-1}A)\exp\{-\check{h}(\tau_{k+1}-\tau_k)\}\}$.

定理 2 如果系统（2）满足：$\delta^* = \hat{r} - \check{\alpha}^2/2 - \omega^{-1}\check{k}\int_0^\omega c^*(s)ds < 0$，则系统（2）的解 $(0, c_*(t))$ 以概率 1 全局吸引.

证明 由系统（2）知，

$$\begin{cases} dc(t) \geqslant -h(t)c(t)dt, & t \neq \tau_k, \\ \Delta c(t) = P, & t = \tau_k. \end{cases} \tag{17}$$

构造比较系统

$$\begin{cases} du(t) = -h(t)u(t)dt, & t \neq \tau_k, \\ \Delta u(t) = P, & t = \tau_k. \end{cases} \tag{18}$$

由系统（3）的说明可得，系统（18）的解 $u^*(t) = c_*(t)$，根据脉冲微分方程的比较定理，对任意小的 $\varepsilon_1 > 0, \exists T > 0$，当 $t > T$ 时，有 $c(t) > u^*(t) - \varepsilon_1$，使得：

$$dx(t) < x(t)(r(t) - k(t)(u^*(t) - \varepsilon_1) - a(t)x(t))dt + \alpha(t)x(t)dB_t, t \geqslant T. \tag{19}$$

构造比较系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}v(t) = v(t)(r(t) - k(t)(u^*(t) - \varepsilon_1) - a(t)v(t))\mathrm{d}t + \alpha(t)v(t)\mathrm{d}B_t, t \geq T, \\ v(0) = x_0 > 0. \end{cases} \tag{20}$$

利用 Itô 公式沿着系统（20）的解求随机微分，可得：$\mathrm{d}\ln v(t) = \mathrm{d}v(t)/v(t) - (\mathrm{d}v(t))^2/2v^2(t) = [r(t) - a(t)v(t) - k(t)(u^*(t) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}t + \alpha(t)\mathrm{d}B_t - 0.5\alpha^2(t)\mathrm{d}t = [r(t) - 0.5\alpha^2(t) - k(t)(u^*(t) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}t - a(t)v(t)\mathrm{d}t + \alpha(t)\mathrm{d}B_t$. 对上式两边从 0 到 t 取积分：

$$\ln v(t) - \ln v(0) = \int_0^t [r(s) - \alpha^2(s)/2 - k(s)(u^*(s) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}s - \int_0^t a(s)v(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s, \tag{21}$$

$t^{-1}\ln v(t) = t^{-1}\ln v(0) + t^{-1}\int_0^t [r(s) - 0.5\alpha^2(s) - k(s)(u^*(s) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}s - t^{-1}\int_0^t a(s)v(s)\mathrm{d}s + t^{-1}\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s \leq t^{-1}\ln v(0) + t^{-1}\int_0^t [\hat{r} - 0.5\check{\alpha}^2 - \check{k}(u^*(s) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}s - t^{-1}\check{a}\int_0^t v(s)\mathrm{d}s + t^{-1}\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s = t^{-1}\ln v(0) + \hat{r} - 0.5\check{\alpha}^2 - t^{-1}\check{k}\int_0^t [(u^*(s) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}s - t^{-1}\check{a}\int_0^t v(s)\mathrm{d}s + t^{-1}\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s$. 因为 $u^*(t)$ 以 ω 为周期，$t \in (n\omega, (n+1)\omega]$，所以，

$$\int_0^{n\omega} (u^*(t) - \varepsilon_1)\mathrm{d}t / [(n+1)\omega] \leq t^{-1}\int_0^t (u^*(s) - \varepsilon_1)\mathrm{d}s \leq \int_0^{(n+1)\omega} (u^*(t) - \varepsilon_1)\mathrm{d}t/(n\omega), \tag{22}$$

当 $t \to +\infty$ 时，有：$\int_0^{n\omega} (u^*(t) - \varepsilon_1)\mathrm{d}t / [(n+1)\omega] \to \int_0^{\omega} (u^*(t) - \varepsilon_1)\mathrm{d}t / \omega$；$\int_0^{(n+1)\omega} (u^*(t) - \varepsilon_1)\mathrm{d}t/(n\omega) \to \int_0^{\omega} (u^*(t) - \varepsilon_1)\mathrm{d}t/\omega$，所以当 $t \to +\infty$ 时，有：

$$\hat{r} - 0.5\check{\alpha}^2 - t^{-1}\check{k}\int_0^t [(u^*(s) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}s \to \delta^* < 0, \tag{23}$$

记 $M(t) = \int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s$，$M(t)$ 是一个局部鞅，$\langle M(t), M(t)\rangle = \int_0^t \alpha^2(s)\mathrm{d}s \leq \alpha^2 t$. 利用局部鞅的强大数定律知

$$\lim_{t \to +\infty} M(t)/t = 0. \tag{24}$$

由于

$$t^{-1}\ln v(t) \leq t^{-1}\ln v(0) + \hat{r} - 0.5\check{\alpha}^2 - t^{-1}\check{k}\int_0^t [(u^*(s) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}s - t^{-1}\check{a}\int_0^t v(s)\mathrm{d}s + t^{-1}\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s, \tag{25}$$

所以有：$t^{-1}\ln v(t) \leq \ln v(0)/t + \hat{r} - 0.5\check{\alpha}^2 - t^{-1}\check{k}\int_0^t [(u^*(s) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}s + t^{-1}\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s$，$\limsup_{t \to +\infty} t^{-1}\ln v(t) \leq \limsup_{t \to +\infty}\{t^{-1}\ln v(0) + \hat{r} - 0.5\check{\alpha}^2 - t^{-1}\check{k}\int_0^t [(u^*(s) - \varepsilon_1)]\mathrm{d}s + t^{-1}\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}B_s\} = \delta^*$. 由引理 4 知，因为 $\delta^* < 0$，所以 $\lim_{t \to +\infty} v(t) = 0$. 由引理 1 得 $0 < x(t) < v(t)$，$t \geq T$，所以 $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$，$a.s.$

对任意小的 $\varepsilon_2 > 0$，存在正常数 $T_1 > T$，有 $x(t) < \varepsilon_2$ $a.s.$ 构造比较系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}w(t) = (-h(t)w(t) + b(t)\varepsilon_2 k(t)w(t))\mathrm{d}t, & t \neq \tau_k, \\ \Delta w(t) = P, & t = \tau_k. \end{cases} \tag{26}$$

上述系统（26）的周期解为：$w^*(t) = w(n\omega^+)\exp\{\int_0^t (-h(s) + \varepsilon_2 b(s)k(s))\mathrm{d}s\} + P\sum_{i=1}^{k}\exp\{\int_{\tau_i}^t (-h(s) + \varepsilon_2 b(s)k(s))\mathrm{d}s\}$，$t \in (n\omega + \tau_{k-1}, n\omega + \tau_k]$，$k \leq q$. 其中 $w(n\omega^+) = w(0^+) = P\{(1 + \sum_{i=1}^{q-1}\exp\{\int_{\tau_i}^{\omega}(-h(s) + \varepsilon_2 b(s)k(s))\mathrm{d}s\}\}/\{1 - \exp\{\int_0^{\omega}(-h(s) + \varepsilon_2 b(s)k(s))\mathrm{d}s\}\}$.

由比较定理可知 $u^*(t) \leq c(t) \leq w^*(t)$. 所以当 $\varepsilon_2 \to 0$ 时，有 $\lim_{t \to +\infty} c(t) = u^*(t)$，$a.s.$

定理 3 系统（2）的解满足 $\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \delta^*/\check{\alpha}$. a. s. 特别地，当 $\delta^*=0$ 时，种群 $x(t)$ 为非平均持续生存的，即 $\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s = 0$, a. s.

证明 由定理 1 的证明过程知，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个常数 $T_2, T_2 > T_1$，使得 $t\geqslant T_2$ 时，有 $\ln v(0)/t \leqslant \varepsilon/3, \hat{r}-0.5\check{\alpha}^2 - t^{-1}\check{k}\int_0^t[(u^*(s)-\varepsilon_1)]\,\mathrm{d}s \leqslant \delta^*+\varepsilon/3, M(t)/t\leqslant\varepsilon/3$，把这些不等式代入：

$$t^{-1}\ln v(t) \leqslant t^{-1}\ln v(0) + \hat{r} - 0.5\check{\alpha}^2 - t^{-1}\check{k}\int_0^t[(u^*(s)-\varepsilon_1)]\,\mathrm{d}s - t^{-1}\check{a}\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s + t^{-1}\int_0^t \alpha(s)\,\mathrm{d}B_s, \tag{27}$$

得到

$$\ln v(t) \leqslant \lambda t - \check{a}\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s, t\geqslant T_2, \tag{28}$$

其中 $\lambda=\delta^*+\varepsilon$. 当 $t\geqslant T_2$ 时，

$$x(t)\leqslant v(t), \ln v(t) \leqslant \lambda t - \check{a}\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s, \tag{29}$$

所以，

$$\ln x(t) \leqslant \lambda t - \check{a}\int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \lambda t - \check{a}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s. \tag{30}$$

令 $h(t)=\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s$，有：$\exp(\check{a}h(t))\mathrm{d}h/\mathrm{d}t \leqslant \exp(\lambda t), t\geqslant T_2$. 对此不等式两边从 T_2 到 t 取积分，得：$\check{a}^{-1}[\exp(\check{a}h(t)) - \exp(\check{a}h(T_2))] \leqslant \lambda^{-1}(\exp(\lambda t)-\exp(\lambda T_2))$，整理上述不等式，得 $\exp(\check{a}h(t)) \leqslant \exp(\check{a}h(T_2)) + \check{a}\lambda^{-1}\exp(\lambda t) - \check{a}\lambda^{-1}\exp(\lambda T_2)$，不等式两边取对数，得 $h(t)\leqslant \check{a}^{-1}\ln(\exp(\check{a}h(T_2)) + \check{a}\lambda^{-1}\exp(\lambda t) - \check{a}\lambda^{-1}\exp(\lambda T_2))$. 所以，$\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \check{a}^{-1}\limsup_{t\to+\infty}[t^{-1}\ln(\exp(\check{a}h(T_2)) + \check{a}\lambda^{-1}\exp(\lambda t) - \check{a}\lambda^{-1}\exp(\lambda T_2))]$，利用 L'Hôpital 法则得：$\limsup_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \lambda/\check{a}$，由 ε 的任意性可得定理结论.

由系统（2）知：$\mathrm{d}x(t) \leqslant x(t)(r(t)-a(t)x(t))\mathrm{d}t + \alpha(t)x(t)\mathrm{d}B_t$，构造比较系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}y(t) = y(t)(r(t)-a(t)y(t))\mathrm{d}t + \alpha(t)y(t)\mathrm{d}B_t, \\ y(0) = x_0, \end{cases} \tag{31}$$

根据引理 3 可知

$$y^*(t) = \exp\{\int_0^t[r(s)-0.5\alpha^2(s)]\mathrm{d}s + \int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}B_s\}/\{1/x_0 + \int_0^t a(s)\exp\{\int_0^s[r(\tau)-0.5\alpha^2(\tau)]\mathrm{d}\tau + \int_0^s\alpha(\tau)\mathrm{d}B_\tau\}\mathrm{d}s\}, \tag{32}$$

由随机微分方程比较定理知 $x(t)\leqslant y^*(t)$，再由系统（2）得：$\mathrm{d}c(t) \leqslant (-h(t)+b(t)k(t)y^*(t))c(t)\mathrm{d}t$，构造比较系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}z(t) = (-h(t)+b(t)k(t)y^*(t))z(t)\mathrm{d}t, & t\neq\tau_k, \\ \Delta z(t) = P, & t=\tau_k. \end{cases} \tag{33}$$

解系统（33），得：$z^*(t) = z(n\omega^+)\exp\{\int_0^t(-h(s)+b(s)k(s)y^*(s))\mathrm{d}s\} + P\sum_{i=1}^{k}\exp\{\int_0^t(-h(s)+b(s)k(s)y^*(s))\mathrm{d}s\}, t\in(n\omega+\tau_{k-1}, n\omega+\tau_k], k\leqslant q$. 其中 $Z(n\omega^+)=z(0^+)=P\{1+\sum_{i=1}^{q-1}\exp\{\int_{\tau_i}^{\omega}(-h(s)+b(s)k(s)y^*(s))\mathrm{d}s\}\}/\{1-\exp\{\int_0^{\omega}(-h(s)+b(s)k(s)y^*(s))\mathrm{d}s\}\}$. 令 $\delta_* = \check{r}-\alpha^2/2-\hat{k}/\omega\cdot$

$\int_0^\omega z^*(s)\mathrm{d}s$，有定理 4.

定理 4　系统（2）的解满足 $\liminf\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \geqslant \delta_*/\hat{a}, a.s.$ 特别地，当 $\delta_*>0$ 时，种群 $x(t)$ 为平均持续生存的，即 $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t x(s)\mathrm{d}s > 0\ a.s.$

证明　由脉冲微分方程比较定理知 $c(t) \leqslant z^*(t)$，再由系统（2）知 $\mathrm{d}x(t) \geqslant x(t)(r(t)-k(t)z^*(t)-a(t)x(t))\mathrm{d}t+\alpha(t)x(t)\mathrm{d}B_t$，构造比较系统：

$$\begin{cases}\mathrm{d}\varphi(t) = \varphi(t)(r(t)-k(t)z^*(t)-a(t)\varphi(t))\mathrm{d}t+\alpha(t)\varphi(t)\mathrm{d}B_t, t\neq\tau_k,\\ \varphi(0)=x_0,\end{cases}\tag{34}$$

由定理 1 的证明过程得：

$$t^{-1}\ln\varphi(t) = t^{-1}\ln\varphi(0)+t^{-1}\int_0^t[r(s)-0.5\alpha^2(s)-k(s)z^*(s)]\mathrm{d}s-t^{-1}\int_0^t a(s)\varphi(s)\mathrm{d}s+$$

$$t^{-1}\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}B_s \geqslant t^{-1}\ln\varphi(0)+\check{r}-0.5\hat{\alpha}^2-t^{-1}\hat{k}\int_0^t z^*(s)\mathrm{d}s-t^{-1}\hat{a}\int_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s+t^{-1}\int_0^t\alpha(s)\mathrm{d}B_s.\tag{35}$$

同样有：$\check{r}-0.5\hat{\alpha}^2-t^{-1}\hat{k}\int_0^t z^*(s)\mathrm{d}s\to\delta_*$，对任意给定的 $\varepsilon_3>0$，存在一个常数 $T_3>0$，使得 $t\geqslant T_3$ 时，有：$\ln\varphi(0)/t\geqslant-\varepsilon_3/3, \check{r}-0.5\hat{\alpha}^2-t^{-1}\hat{k}\int_0^t z^*(s)\mathrm{d}s\geqslant\delta_*-\varepsilon_3/3, M(t)/t\geqslant-\varepsilon_3/3$，把这些不等式代入上式得：$\ln\varphi(t)\geqslant\beta t-\hat{a}\int_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s$. 其中 $\beta=\delta_*-\varepsilon_3$.

令 $g(t)=\int_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s$，有：$\exp(\hat{a}g(t))\mathrm{d}g/\mathrm{d}t\geqslant\exp(\beta t), t\geqslant T_3$. 对此不等式由 T_3 到 t 取积分，得 $\hat{a}^{-1}[\exp(\hat{a}g(t))-\exp(\hat{a}g(T_3))]\geqslant\beta^{-1}(\exp(\beta t)-\exp(\beta T_3))$，整理上述不等式得：$\exp(\hat{a}g(t))\geqslant\exp(\hat{a}g(T_3))+\hat{a}\beta^{-1}\exp(\beta t)-\hat{a}\beta^{-1}\exp(\beta T_3)$，不等式两边取对数，得：$g(t)\geqslant\hat{a}^{-1}\ln(\exp(\hat{a}g(T_3))+\hat{a}\beta^{-1}\exp(\beta t)-\hat{a}\beta^{-1}\exp(\beta T_3))$，所以，$\liminf\limits_{t\to+\infty} t^{-1}\int_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s \geqslant \hat{a}^{-1}\liminf\limits_{t\to+\infty}[t^{-1}\ln(\exp(\hat{a}g(T_3))+\hat{a}\beta^{-1}\exp(\beta t)-\hat{a}\beta^{-1}\exp(\beta T_3))]$. 由 L'Hôpital 法则及 ε_3 的任意性得：$\liminf\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)\geqslant\hat{a}^{-1}\delta_*, a.s.$ 根据随机微分方程比较定理知 $x(t)\geqslant\varphi(t)$. 所以，$\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)\geqslant\hat{a}^{-1}\delta_*, a.s.$

3　数值模拟

令周期 $\omega=2$，周期数 $T=3$，脉冲值 $P=3$，每个周期内脉冲个数 $q=4$，脉冲点 $\tau_0=0$，$\tau_1=0.05$，$\tau_2=0.3402$，$\tau_3=0.7650$，$\tau_4=0.9201$. 参数 $h(t)=\sin(\pi t)+1$，$r(t)=0.01\cos(\pi t)+0.01$，$k(t)=\sin(\pi t)+\cos(\pi t)+2$，$a(t)=\sin(\pi t)-\cos(\pi t)+2$，$\alpha(t)=\sin(\pi t)+2\cos\pi t)+6$，$b(t)=\sin(\pi t)+2$. 初值分别为 $c^*(0)=0.18$，$c_1(0)=3.8$，$c_2(0)=0.14$，$x_1(0)=x_2(0)=1$，现给出分别以 $c_1(0)=3.8$，$x_1(0)=1$ 和 $c_2(0)=0.14$，$x_2(0)=1$ 为初值的解 $(x_1(t),c_1(t))$，$(x_2(t),c_2(t))$ 全局吸引到 $(0,c^*(t))$ 的图像，分别参见图 1 和图 2.

4　结论

本文通过研究具有多脉冲输入毒素的非自治随机干扰系统，获得了系统平均持续生存、非平均持续生存与弱平均持续生存的充分条件，讨论了解的均值有界性与全局吸引性，并给出了全局吸引性的数值模拟和图像.

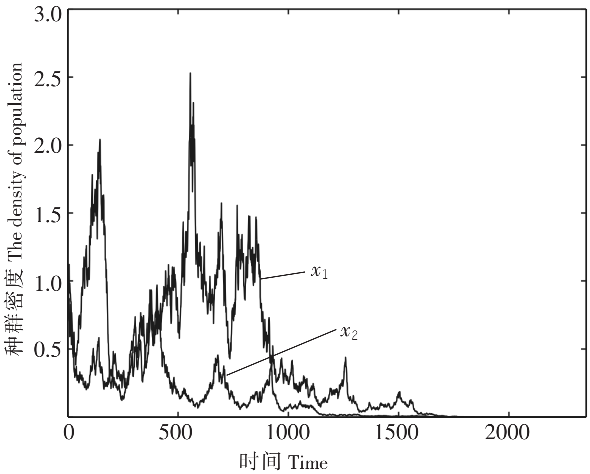

图 1　种群的变化趋势

Fig.1　The change of population

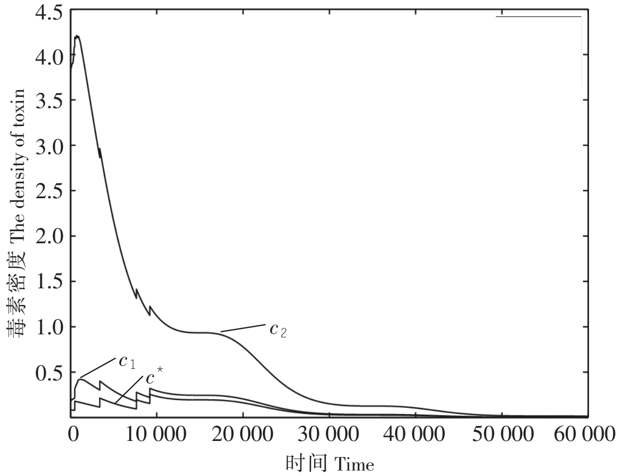

图 2　毒素的变化趋势

Fig.2　The change of toxin

［参考文献］

［1］JIAO J，LONG W，CHEN S．A single stage-structured population model with mature individual in a polluted environment and pulse input of environment toxin［J］．Nonlinear Analysis：Real World Application，2009，10(5)：3073-3081.

［2］ZHAO Z，CHEN S，SONG Y．Extinction and permanence of chemostat model with pulsed input in a polluted environment［J］．Communication in Nonlibear Science and Numerical Simulation，2009，14(4)：1737-1745.

［3］MAHBUBAM R，SUN L，TENG D．Study of chemostat model with impulsive input and nutrient recycling in a polluted environment［J］．Commun Nonlinear Sci Numer Simulate，2011，16(6)：2563-2574.

［4］LING B，ZHANG Q，GAO H．The dynamic of pest control pollution model with age structure and time delay［J］．Applied Mathematics and Computation，2010，216(10)：2814-2823.

［5］LIU B，TENG D，LI Y．Qualitative analysis of a stochastic ratio-dependent predator-prey system［J］．Journal of Computational and Applied Mathematics，2011，235(5)：1326-1341.

［6］NIE L，TENG Z，HU L．Existence and stability of periodic solution of a predator-prey model state dependent impulsive affects［J］．Comput Appl Math，2009，224(2)：544-555.

［7］JIANG Q，SHI Z，LI Y．Global stability and stochastic permanence of nonautonomous logistic equation with random perturbation［J］．J Math Anal Appl，2008，340(1)：588-597.

［8］CHEN J，JIANG Q，LI Y．Qualitative analysis of a stochastic ratio-dependent predator-prey system［J］．Journal of Computational and Applied Mathematics，2011，235(5)：1326-1341.

［9］KLEBANER F．Introduction to stochastic calculus with application［M］．London：Imperial College Press，1998.

［10］张树文，蔡明夷．具脉冲输入毒素的单种群随机干扰模型［J］．应用数学学报，2014，37(5)：797-804.

［11］LIU M，WANG K．Persistence and extinction in stochastic non-autonomous logistic systems［J］．J Math Anal Appl，2011，375(2)：443-457.

［12］ZHU Y，WANG K．Existence and global attractivity of positive periodic solutions for a predator-prey model with modified Leslie-Gower Holling-type II schemes［J］．J Math Anal Appl，2011，384(2)：400-408.

［13］LIU M，WANG K．On a stochastic logistic equation with impulsive perturbations［J］．Computers and Mathematics with Applications，2012，63(5)：871-886.

［14］LIU M，WANG K．On a stochastic logitic equation with impulsive perturbations［J］．Computers and Mathematics with Applications，2012，63(5)：971-886.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）