第 20 卷 第 5 期
2015 年 9 月

集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University (Natural Science)

Vol. 20 No. 5
Sep. 2015

[文章编号] 1007 - 7405(2015)05 - 0387 - 05

拓展映射法求非线性偏微分方程的新解

何红生

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 构建了一种拓展的映射法（F 展开法）求解某些非线性偏微分方程（PDEs）的精确解. 研究表明，该拓展的映射法不仅能够求得方程的 Jacobi 椭圆函数的整数幂指数形式解，而且能够求得非线性方程的分数幂指数形式 $(1+\delta f^2(\xi))^{1/2}$ 的 Jacobi 椭圆函数解.

[关键词] 拓展的 F 展开法；Jacobi 椭圆函数；耦合 Klein - Gordon - Schrödinger 方程

[中图分类号] O 411.1　　[文献标志码] A

New Solutions for Nonlinear Partial Differential Equations Using the Extended Mapping Method

HE Hong-sheng

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: The extended F-expansion (or mapping) method is presented to construct exact solutions to some nonlinear partial differential equations (PDEs). It was shown that not only integer exponential Jacobi elliptic function solutions, but also fractional exponential combined Jacobi elliptic function of the form $(1+\delta f^2(\xi))^{1/2}$ solutions were obtained.

Key words: extended F-expansion method; Jacobi elliptic functions; coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations

0 引言

非线性方程是解释大多数非线性物理现象的重要方法，所以，求解非线性物理方程的精确解是很有意义的研究课题. 在过去的几十年里，研究者们发展了大量有效的方法来求解非线性方程的精确解，比如：反散射法[1]、Backlund 变换[2]、Darboux 变换[3]、截断 Painleve 展开法[4]、Hirota 双线性法[5]、正弦 - 余弦法[6]、双曲正切函数法[7]、齐次平衡法[8-9]，等等. 众所周知，椭圆函数（如 Jacobi 椭圆函数和 Weierstrass 椭圆函数等）与非线性偏微分方程有着密切的关系[10-12]. 而且，研究[13-15]表明，很多非线性方程有椭圆函数解. 近年来逐渐发展起来的映射展开法[16-17]可以求得 Jacobi 椭圆函数解，并且在极限情况下可分别求得方程的孤立波和三角函数周期解. 本文将构建一种拓展的映射展开法，并用于求解耦合的 Klein - Gordon - Schrödinger（K - G - S）方程.

[收稿日期] 2014 - 09 - 12　　[修回日期] 2014 - 10 - 28
[基金项目] 福建省自然科学基金资助项目（2007J0202）；集美大学科研启动基金项目（C60705）
[作者简介] 何红生（1977—），男，讲师，博士，主要从事理论物理及数理方程的研究.

1 拓展的映射展开法

考虑一非线性偏微分方程形式如下：

$$F(u,u_x,u_y,u_z,u_t,u_{xx},u_{yy},u_{zz},u_{xz},u_{xz},u_{yz},\cdots)=0. \tag{1}$$

首先假定方程以下形式的行波解：

$$u(x,y,z,t)=u(\xi),\xi=\alpha x+\varepsilon y+\kappa z+\lambda t, \tag{2}$$

则方程（1）变为非线性常微分方程：

$$\tilde{F}(u,u_\xi,u_{\xi\xi},u_{\xi\xi\xi},\cdots)=0. \tag{3}$$

假设方程（3）有以下形式的解：

$$u(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{n}f^{i-1}(\xi)(a_if(\xi)+b_i(1+\delta f^2(\xi)^{1/2}), \tag{4}$$

其中：a_0，a_i，b_i，$\delta(\delta\neq 0)$ 为待定的系数；n 为由方程的最高阶线性导数项和最高阶非线性项决定的齐次平衡数；$f(\xi)$ 满足以下形式的 Jacobi 椭圆方程：

$$f'^2(\xi)=bf^4(\xi)/2+af^2(\xi)+r, \tag{5}$$

其中：a，b，r 是参数，并且不同的系数组合，$f(\xi)$ 对应着不同的 Jacobi 椭圆函数.

考虑方程（5），把式（4）代入到方程（3），则方程（3）的左边转化为有关 $f(\xi)$ 的多项式. 并且令多项式的系数为零，这样得到有关 a_0，a_i，b_i，α，ε，κ，λ 和 δ 的方程组. 求解这方程组确定系数，并且选择不同的参数 (a,b,r)，将得到方程（1）的不同形式的椭圆函数解，其中包括 Jacobi 椭圆函数的整数幂指数形式解和 Jacobi 椭圆函数的分数幂指数形式解. 此外，考虑椭圆函数的模数 $m\to 1$ 或者 $m\to 0$ 时，椭圆函数分别退化成双曲函数和三角函数，这样就可以同时得到有关方程的孤立波解和三角函数周期解.

2 拓展的映射法的应用

耦合的 Klein－Gordon－Schrödinger 如下：

$$i\partial\Psi/\partial t+\nabla^2\Psi+\rho\Psi\Phi=0, \tag{6}$$

$$\partial^2\Phi/\partial^2 t-\nabla^2\Phi+\mu^2\Phi-\rho\,|\Psi|^2=0. \tag{7}$$

该方程组描述保守的标量核子与中性标量介子内相互作用的系统. 其中：Ψ 表示核子复标量场；Φ 表示介质标量场；实系数 μ 和 ρ 分别描述介子的质量和耦合常数，拉普拉斯算符表示为 $\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$.

为了简便起见，只求方程（6）、（7）的行波解，作如下变换：

$$\Psi=U(\xi)e^{i\eta},\Phi=V(\xi), \tag{8}$$

其中：$\xi=x+cy+dz+et$；$\eta=px+qy+Rz+st$. 这样方程（6）、（7）变为如下的常微分方程：

$$\begin{cases}\beta U''(\xi)-\gamma U(\xi)+\rho U(\xi)V(\xi)=0,\\(e^2-\beta)V''(\xi)+\mu^2V(\xi)-\rho U^2(\xi)=0,\\e+2(p+qc+dR)=0,\end{cases} \tag{9}$$

其中：$\beta=1+c^2+d^2$；$\gamma=s+p^2+q^2+R^2$；s 为待定的常数.

根据拓展的映射法，作如下假设：

$$U(\xi)=a_0+\sum_{i=1}^{n}f^{i-1}(\xi)(a_{2i-1}f(\xi)+a_{2i}(1+\delta f^2(\xi))^{1/2}), \tag{10}$$

$$V(\xi)=b_0+\sum_{i=1}^{I}f^{i-1}(\xi)(b_{2i-1}f(\xi)+b_{2i}(1+\delta f^2(\xi))^{1/2}), \tag{11}$$

n 和 I 分别由最高阶导数项 $U''(\xi)$ 和 $V''(\xi)$ 与非线性项 $U(\xi)V(\xi)$ 和 $U^2(\xi)$ 平衡确定. 容易确定可得 $n=I=2$，因此方程（9）的形式解表示为：

$$U(\xi)=a_0+a_1f(\xi)+a_2(1+\delta f^2(\xi))^{1/2}+a_3f^2(\xi)+a_4f(\xi)(1+\delta f^2(\xi))^{1/2},\tag{12}$$

$$V(\xi)=b_0+b_1f(\xi)+b_2(1+\delta f^2(\xi))^{1/2}+b_3f^2(\xi)+b_4f(\xi)(1+\delta f^2(\xi))^{1/2},\tag{13}$$

其中：$f(\xi)$ 满足方程（5）；$a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,b_0,b_1,b_2,b_3,b_4$ 和 δ 为待定系数.

把式（12）、（13）代入方程（9），并且运用方程（5）简化有关 $f(\xi)$ 的方程组. 最后，令所得的方程组内 $f^i(\xi)(1+\delta f^2(\xi)^{j/2}$（$i=0,1,2,\cdots,j=0,1$）的系数为零，可以得到有关待定系数 $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,b_0,b_1,b_2,b_3,b_4,\beta,\gamma$ 和 δ 的代数项方程组，即：

$$\begin{cases}2(a_2(-\gamma+r\beta\delta+\rho b_0)+\rho a_0b_2)=0,\\ 2\delta^2(a_4(3b\beta+\rho b_3)+\rho a_3b_4)=0,\\ 2(2r\beta a_3+a_0(-\gamma+\rho b_0)+\rho a_2b_2)=0,\\ \qquad\vdots\end{cases}\tag{14}$$

得到上式方程组的一些解如下：

第一组：$a_4=0,a_3=\pm3\sqrt{b^2\beta(\beta-e^2)}/\rho,a_2=0,a_1=0,a_0=\mp b\beta(4a(e^2-\beta)+\mu^2)/2\rho\sqrt{b^2\beta(\beta-e^2)},b_4=0,b_3=-3b\beta/\rho,b_2=0,b_1=0,b_0=\beta(4a(e^2-\beta)+\mu^20/(2\rho(\beta-e^2)),\gamma=\mu^2\beta/(\beta-e^2)$，其中：$a,b,r$ 为任意常数；β，e 满足以下关系：

$$\begin{cases}e+2(p+qc+dR)=0,\\ -8(2a^2-3br)(e^2-\beta)^2+\mu^4=0,\end{cases}\tag{15}$$

这里，p,q,c,d 和 R 为任意常数. 这个结论与文献［17］相同.

第二组：$a_4=\pm3\sqrt{b^2\beta(\beta-e^2)}/(2\rho\sqrt{\delta}),a_3=\pm3\sqrt{b^2\beta(\beta-e^2)}/(2\rho),a_2=0,a_1=0,a_0=\mp b\beta((a+3r\delta)(e^2-\beta)+\mu^2)/(2\rho\sqrt{b^2\beta(\beta-e^2)}),b_4=3b\beta/2\rho\sqrt{\delta},b_3=-3b\beta/\rho,b_2=0,b_1=0,b_0=\beta(\beta-e^2)(3b-8a\delta)+2\beta\delta\mu^2/(4\delta\rho(\beta-e^2)),\gamma=\mu^2\beta/(\beta-e^2)$，其中，$a,b,r$ 为任意常数，β，e，δ 满足以下关系：

$$e+2(p+qc+dR)=0,\tag{16}$$

$$b+2\delta(r\delta-a)=0,\tag{17}$$

$$(e^2-\beta)^2(33b^2-96ab\delta+64a^2\delta^2)-4\delta^2\mu^4=0,\tag{18}$$

这里，p,q,c,d 和 R 为任意常数.

第三组：$a_4=\pm3\sqrt{b^2\beta(\beta-e^2)}/(2\rho\sqrt{\delta}),a_3=\pm3\sqrt{b^2\beta(\beta-e^2)}/(2\rho),a_2=0,a_1=0,a_0=\mp b\beta((a+3r\delta)(e^2-\beta)+\mu^2)/(2\rho\sqrt{b^2\beta(\beta-e^2)}),b_4=-3b\beta/(2\rho\sqrt{\delta}),b_3=-3b\beta/\rho,b_2=0,b_1=0,b_0=(\beta(\beta-e^2)(3b-8a\delta)+2\beta\delta\mu^2/(4\delta\rho(\beta-e^2)),\gamma=\mu^2\beta/(\beta-e^2)$，其中 a,b,r 为任意常数，而 β，e，δ 满足关系式（16）—式（18）.

为了简便起见，只讨论第二组情况. 选择参数组合：$a=2m^2-1$，$b=-2m^2$，$r=1-m^2$，那么 $f(\xi)=cn(\xi)$. 根据关系式（17），可得 $\delta=-1$ 或者 $\delta=m^2/(1-m^2)$. 同时，考虑关系式 $\gamma=s+p^2+q^2+R^2$，并运用关系式（16）和式（18），最终可得方程（6）的一些精确解：当 $\delta=-1$ 时，可得：$\Psi_1(x,y,z,t)=(\pm\beta((5m^2-4)(\beta-e^2)-\mu^2)/(2\rho\sqrt{\beta(\beta-e^2)})\mp3m^2\sqrt{\beta(\beta-e^2)}\,\mathrm{cn}^2(x+cy+dz+et)/\rho\mp i3m^2\sqrt{\beta(\beta-e^2)}\,\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\,\mathrm{sn}(x+cy+dz+et))e^{i(px+qy+Rz+(\beta\mu^2/\beta-e^2-p^2-q^2-R^2)t)}/\rho,\Phi_1(x,y,z,t)=(5m^2-4)\beta(\beta-e^2)-\beta\mu^2/(2\rho(e^2-\beta)+3\beta m^2\,\mathrm{cn}^2(x+cy+dz+et)/\rho+i3m^2\beta\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\,\mathrm{sn}(x+cy+dz+et)/\rho$，其中用到 $\mathrm{sn}^2(\xi)+\mathrm{cn}^2(\xi)=1$，有 $\beta=1+c^2+d^2$，$e=-2(p+qc+dR)$，c,d,p,q 和 R 为任意常数，m 是模数，并且满足关系：

$$(16-16m^2+m^4)(e^2-\beta)^2-\mu^4=0.\tag{19}$$

当 $\delta=m^2/(1-m^2)$ 时，可得：$\Psi_2(x,y,z,t)=(\pm\beta((5m^2-1)(\beta-e^2)-\mu^2)/(2\rho\sqrt{\beta(\beta-e^2)})\mp$

$3m^2\sqrt{\beta(\beta-e^2)}\,\mathrm{cn}^2(x+cy+dz+et)/\rho \mp i3m\sqrt{\beta(\beta-e^2)}\,\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))e^{i(px+qy+Rz+(\beta\mu^2/\beta-e^2-p^2-q^2-R^2)t)}/\rho$，$\Phi_2(x,y,z,t)=-(5m^2-1)\beta(e^2-\beta)+\beta\mu^2/(2\rho(e^2-\beta)+3\beta m^2\mathrm{cn}^2(x+cy+dz+et)/\rho-3m\beta\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\mathrm{dn}(x+cy+dz+et)/\rho$，其中用到关系式 $m^2cn^2(\xi)+(1-m^2)=\mathrm{dn}^2(\xi)$，有 $\beta=1+c^2+d^2$，$e=-2(p+qc+dR)$，c,d,p,q 和 R 为任意常数，m 为模数，并且满足以下关系：

$$(1+14m^2+m^4)(e^2-\beta)^2-\mu^4=0. \tag{20}$$

当选择参数组 $a=m^2+1/2$，$b=-1/2$，$r=-(1-m^2)^2/4$ 时，则有 $f(\xi)=m\mathrm{cn}(\xi)\pm\mathrm{dn}(\xi)$，从关系式（17），可得 $\delta=-1/(1-m)^2$ 或者 $\delta=-1/(1+m)^2$．同时考虑 $\gamma=s+p^2+q^2+R^2$，运用关系式（16）和（18），可得方程（6）的一些精确解：当 $\delta=-1/(1-m)^2$ 时，可得：$\Psi_3(x,y,z,t)=(\pm(5+m(6+5m))\beta(\beta-e^2)-4\beta\mu^2)/(8\rho\sqrt{\beta(\beta-e^2)})\mp3\sqrt{\beta(\beta-e^2)}(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)/(4\rho)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))^2\mp i3(1-m)\sqrt{\beta(\beta-e^2)}m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))[1-1/(1-m)^2(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))^2]^{1/2}e^{i(px+qy+Rz+(\beta\mu^2/\beta-e^2)-p^2-q^2-R^2)t)}/(4\rho)$，$\Phi_3(x,y,z,t)=(5+m(6+5m))\beta(\beta-e^2)-4\beta\mu^2/(8\rho(e^2-\beta))+3\beta(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))^2/4\rho+i3\beta(1-m)(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))/(4\rho)[1-1/(1-m)^2m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))^2]^{1/2}/(4\rho)$，其中 $\beta=1+c^2+d^2$，$e=-2(p+qc+dR)$，c,d,p,q 和 R 为任意常数，m 为模数，并且满足关系：

$$(1+m(60+m(134+m(60+m))))(e^2-\beta)^2-16\mu^4=0. \tag{21}$$

当 $\delta=-1/(1+m)^2$ 时，可得：$\Psi_4(x,y,z,t)=(\pm(5+m(-6+5m))\beta(\beta-e^2)-4\beta\mu^2)/(8\rho\sqrt{\beta(\beta-e^2)})\mp3\sqrt{\beta(\beta-e^2)}(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)/(4\rho)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))^2\mp i3(1+m)\sqrt{\beta(\beta-e^2)}(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))[1-1/(1+m)^2(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et)^2)^{1/2}]e^{i(px+qy+Rz+(\beta\mu^2/\beta-e^2-p^2-q^2-R^2)t)}/(4\rho)$，$\Phi_4(x,y,z,t)=(5+m(-6+5m))\beta(\beta-e^2)-4\beta\mu^2/(8\rho(e^2-\beta)+3\beta m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))^2/(4\rho)+i3\beta(1+m)(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et))(1-1/(1+m)^2(m\mathrm{cn}(x+cy+dz+et)\pm\mathrm{dn}(x+cy+dz+et)^2)^{1/2}/(4\rho)$. 其中 $\beta=1+c^2+d^2$，$e=-2(p+qc+dR)$，c,d,p,q 和 R 为任意常数，m 为模数，并且满足以下关系：

$$(1+m(-60+m(134+m(-60+m))))(e^2-\beta)^2-16\mu^4=0. \tag{22}$$

以上所得结果表明，当选择方程（5）不同的参数组 (a,b,r) 时，就可以得到非线性方程（1）不同类型的 Jacobi 椭圆函数解，其中包括整数幂指数形式的 Jacobi 椭圆函数解和这种分数幂指数 $(1+\delta f^2(\xi))^{1/2}$ 形式的 Jacobi 椭圆函数解. 此外，当模数 $m\to1$ 和 $m\to0$ 时，Jacobi 椭圆函数分别退化为双曲函数和三角函数，这样相应地分别得到非线性方程的孤立波解和三角函数周期解.

3 结论

本文主要构建了拓展的映射展开法，并用于求解耦合 K－G－S 方程. 研究结果表明，运用该方法不仅可以得到整数的幂指数形式的 Jacobi 椭圆函数解，同时还可以得到形如 $(1+\delta f^2(\xi))^{1/2}$ 的分数幂指数形式的 Jacobi 椭圆函数解.

［参考文献］

［1］GARDNER C S，GREENE J M，KRUSKAl M D，et al. Method for solving the Korteweg-de Vries equation［J］. Phys Rev Lett，1967，19：1095-1097.

［2］WAHLQUIST H D，ESTABROOK F B. Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg-de Vries equation［J］. Phys Rev lett，1973，31：1386-1390.

[3] MATVEEV V A, SALLE M A. Darboux transformations and solitons [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991.
[4] CONTE R, MUSETTE M. Variable separation and derivative dependent functional separable solutions to generalized KdV equations [J]. J Phys Math, 1990, 23: 3923.
[5] HIROTA R, SATSUMA J. Soliton solutions of a coupled Korteweg-de Vries equation [J]. Phys Lett A, 1981, 85: 407-408.
[6] FAN E G, Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations [J]. Phys Lett A, 2000, 277: 212-218.
[7] WANG M L. Solitary wave solutions for variant Boussinesg equations [J]. Phys Lett A, 1995, 199: 169-172.
[8] YANG L, LIU J B, YANG K Q. Exact solutions of nonlinear PDE, nonlinear transformations and reduction of nonlinear PDE to a quadrature [J]. Phys Lett A, 2001, 278: 267-270.
[9] WANG M L, LI X Z. Simplified homogeneous balance method and its applications to the Whitham-Broer-Kaupmodel equations [J]. Journal of Applied Mathematics and Physics, 2014(2): 823-827.
[10] BOWMAN F. Introduction to elliptic functions with applications [M]. London: London University, 1959.
[11] PATRICK D V. Elliptic function and elliptic curves [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
[12] CHAMDRASEKHARAN K. Elliptic functions [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
[13] PORUBOV A V, VELARDE M G. Amplification of nonlinear strain waves in solids [J]. J Math Phys, 1999, 40: 884.
[14] LIUSK FUZT LIUSD. The periodic solutions for adass of coupled nonlinear klein-Gordon eqations [J]. Phys Lett A, 2004, 323: 415-420.
[15] ZHOU Y B, WANG M L, WANG Y M. Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients [J]. Phys Lett A, 2003, 308: 31-36.
[16] LIU J B, YANG L, YANG K Q. New Jacobi elliptic function expansion and exact solutions of nonlinear PDE [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2004, 22: 111-121.
[17] YOMBA EMMANUEL. Exact soliton solutions to a new coupled integrable short light-pulse system [J]. Chaos Solitons & Fractals, 2004, 21: 209-229.

(责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤)