第 20 卷　第 5 期
2015 年 9 月

集美大学学报（自然科学版）
Journal of Jimei University(Natural Science)

Vol. 20　No. 5
Sep.　2015

［文章编号］1007 - 7405(2015)05 - 0382 - 05

线性自治滞后型微分方程与常微分方程解的等价性

辛云冰

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］ 考虑齐次线性自治滞后型泛函微分方程（RFDE）的解何时等价于某一齐线性常微分方程组解的问题，利用高等代数中一些基本理论和知识，得到了等价性成立的充要条件，并用例子加以说明方法的正确性.

［关键词］ 滞后型；等价；微分方程；线性自治

［中图分类号］ O 175. 14　　　　**［文献标志码］** A

Linear Equivalence Self-control Retarded Functional Differential Equations and Solutions to Ordinary Differential Equations

XIN Yun-bing

（School of Science，Jimei University，Xiamen 361021，China）

Abstract：In this paper，linear equivalence of homogeneous linear self-control retarded functional differential equations（RFDE）and a particular homogeneous linear ordinary differential equation were discussed. By using some basic theoretical knowledge of advanced algebra，the necessary and sufficient conditions for the equivalence were gotten. An illustrative example was given to verify the correctness of our results.

Key words：retarded；equivalent；differential equations；linear equivalence self-control

0　引言

许多实际问题比如经济问题、生物种群的繁衍问题等都与滞后型微分方程有关，它们的模型常常与滞后型有关. 因此，对于滞后型微分方程的求解问题也是许多研究者需要考虑的，很多文献都用各种方法考虑微分方程解的稳定性问题[1-3]，很多滞后型泛函微分方程问题都要考虑如何求出它们的解，也有许多文献都在考虑求解的方法[3-6]，有的文献考虑非线性泛函微分方程的求解问题，也有利用拟线性的方法去求解[7-8]. 可以看出，滞后型泛函微分方程的解比较难以求出. 本文利用一些高等代数方法，给出了线性自治滞后型泛函微分方程组与常微分方程解的等价性的充要条件，并用例子说明给出定理的实用性.

1　主要结果

考虑齐次线性自制滞后型泛函微分方程（RFDE）

［收稿日期］2014 - 09 - 20　　　　［修回日期］2015 - 01 - 09
［基金项目］国家自然科学基金资助项目（10771001）；福建省自然科学基金资助项目（A0440005）
［作者简介］辛云冰（1960—），男，副教授，从事泛函微分方程稳定性、非线性控制理论的研究.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = l(x_t) \tag{1}$$

之解何时等价于某一齐线性常微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

之解的问题，得到了等价性成立的充要条件. 这里等价性意味着：当 t 大于等于某 t' 时，方程组（1）之解都是常微分方程（2）之解，而反过来，方程组（2）之解也都是方程组（1）之解. 这里 $x \in \mathbf{R}^n$，而 $x_t = x(t+\theta)$，$t \geqslant 0$，$\theta \in [-r,0]$.

引理 1　若存在某 $\bar{t}$，使得方程组（1）之象集 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 是有限维的，其维数为 m，则其中任意 m 个线性无关的向量 $\boldsymbol{x}_{\bar{t}}(\varphi_1),\cdots,\boldsymbol{x}_{\bar{t}}(\varphi_m)$ 构成的一组解：$(\boldsymbol{x}(\varphi_1)(t),\cdots,\boldsymbol{x}(\varphi_m)(t))$. 当 $t \geqslant \bar{t}-r$ 时满足如下常系数齐线性矩阵方程 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}$ 及初始条件 $\boldsymbol{\Phi}(\bar{t}-r) = (x(\varphi_1)(\bar{t}-r),\cdots,x(\varphi_m)(\bar{t}-r))$，这里 $\boldsymbol{B}$ 为 $m\times m$ 常数阵.

证明　因为 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 是 m 维线性空间，所以，$\forall\, m$ 个线性无关的向量 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_m$ 构成它的一组基，即 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C} = L(\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_m)$，因为 $s \geqslant 0$ 时 $\boldsymbol{T}(\bar{t}+s)C = \boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{T}(s)C \subset \boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$，所以有

$$(\boldsymbol{T}(\bar{t}+s)\varphi_1,\cdots\boldsymbol{T}(\bar{t}+s)\varphi_m) = (\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_1,\cdots\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_m)\boldsymbol{F}(s), \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{F}(t)$ 为 $m\times m$ 函数阵. 记 $(\boldsymbol{T}(s)\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(s)\varphi_m) = \boldsymbol{T}(s)(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)$，有 $(\boldsymbol{T}(t+\bar{t}+h)\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(t+\bar{t}+h)\varphi_m) = \boldsymbol{T}(t)(\boldsymbol{T}(\bar{t}+h)\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(\bar{t}+h)\varphi_m) = \boldsymbol{T}(t)((\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_m)\boldsymbol{F}(h)) = (\boldsymbol{T}(t+\bar{t})\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(t+\bar{t})\varphi_m)\boldsymbol{F}(h)$.

注意，不能由式（3）直接得到 $(\boldsymbol{T}(t+\bar{t}+h)\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(t+\bar{t}+h)\varphi_m) = (\boldsymbol{T}(t+\bar{t})\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(t+\bar{t})\varphi_m)\boldsymbol{F}(h)$，因为 $F(s)$ 仅仅是在基 $T(\bar{t})\varphi_1,\cdots T(\bar{t})\varphi_m$ 下的线性表示系数阵. 因此有：$[[\boldsymbol{T}(t+\bar{t}+h)\varphi_1-\boldsymbol{T}(t+\bar{t})\varphi_1]/h,\cdots,[\boldsymbol{T}(t+\bar{t}+h)\varphi_m-\boldsymbol{T}(t+\bar{t})\varphi_m]/h] = (\boldsymbol{T}(t+\bar{t})\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(t+\bar{t})\varphi_m)(\boldsymbol{F}(h)-\boldsymbol{F}(0))/h$. 由上式，利用解的连续可微性，推得对每一固定 $\theta \in [-r,0]$ 成立 $(\dot{x}(\varphi_1)(t+\bar{t}+\theta),\cdots,\dot{x}(\varphi_m)(t+\bar{t}+\theta)) = (x(\varphi_1)(t+\bar{t}+\theta),\cdots,x(\varphi_m)(t+\bar{t}+\theta)\dot{\boldsymbol{F}}(0^+)$. 这是因为上式左端极限存在推得右端极限 $\dot{\boldsymbol{F}}(0^+)$ 也存在. 在上式中取 $\theta=-r$，并记 $\dot{\boldsymbol{F}}(0^+) = \boldsymbol{B}$，得到 $(\dot{x}(\varphi_1)(t),\cdots,\dot{x}(\varphi_m)(t)) = (x(\varphi_1)(t),\cdots,x(\varphi_m)(t))\boldsymbol{B}$，$t \geqslant \bar{t}-r$. 如果存在 t_1 使 $(x(\varphi_1)(t),\cdots,x(\varphi_m)(t_1))$ 的广义逆矩阵存在，则可以得出 $\boldsymbol{B} = (x(\varphi_1)(t_1),\cdots,x(\varphi_m)(t_1))^{-1}(\dot{x}(\varphi_1)(t_1),\cdots,\dot{x}(\varphi_m)(t_1))$.

设 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_1,\cdots,\boldsymbol{T}(\bar{t})\varphi_m$ 是 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 中另一组线性无关的基向量，则由基的等价性知存在可逆阵 $\boldsymbol{G}$ 使 $(x_{\bar{t}}(\varphi_1),\cdots,x_{\bar{t}}(\varphi_m)) = (x_{\bar{t}}(\varphi_1),\cdots x_{\bar{t}}(\varphi_m))\boldsymbol{G}$. 于是，$(\dot{x}(\varphi_1)(t),\cdots,\dot{x}(\varphi_m)(t)) = (\dot{x}(\varphi_1)(t),\cdots,\dot{x}(\varphi_m)(t))\boldsymbol{G} = (x(\varphi_1)(t),\cdots,x(\varphi_m)(t))\boldsymbol{B}\boldsymbol{G} = (x(\varphi_1)(t),\cdots,x(\varphi_m)(t))\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}$. 可见，由 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 中不同的基组得到的方程系数阵是相似的.

定理 1　对于 n 阶方程组（1），若其解是非点态退化的，且存在使 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 是 n 维的，则方程组（1）的任一解 $x(\varphi)(t)$ 当 $t \geqslant \bar{t}-r$ 时满足常系数齐线性常微分方程组（2）.

证明　设 $x_{\bar{t}}(\varphi_1),\cdots,x_{\bar{t}}(\varphi_m)$ 是 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 的一组基，现证明 $t \geqslant \bar{t}-r$ 时，$|x(\varphi_1)(t)\cdots x(\varphi_n)(t)| \neq 0$. 若不然，$\exists\, t_2$ 使其等于零，则注意到它是方程 $\dot{y}(t) = \boldsymbol{B}^{\tau}y(t)$ 的某组解 $y_1(t),\cdots,y_n(t)$ 的 Wronsky 行列式的转置，所以 $|y_1(t_2)\cdots y_n(t_2)| = |x(\varphi_1)(t_2)\cdots x(\varphi_n)(t_2)|^{\tau} = 0$. 由常微分方程的理论知，存在非零 n 维列向量 $\boldsymbol{q}$，使 $(y_1(t),\cdots,y_n(t))\boldsymbol{q} \equiv 0$，$t \geqslant \bar{t}-r$. 于是 $\boldsymbol{q}^{\tau}(x(\varphi_1)(t),\cdots,x(\varphi_m)(t)) = [(y_1(t),\cdots,y_n(t))\boldsymbol{q}]^{\tau} \equiv 0$. 对方程组（1）之任一解 $x(\varphi)(t)$，因 $x_{\bar{t}}(\varphi) \in \boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$，所以 $\exists\, k_1,\cdots,k_n \in \mathbf{R}$，使

$$x_{\bar{t}}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_{\bar{t}}(\varphi_i). \tag{4}$$

于是 $x(\varphi)(t) = (x(\varphi_1)(t),\cdots,x(\varphi_m)(t))\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$，易见有 $\boldsymbol{q}^{\tau}x(\varphi)(t) \equiv 0$，$t \geqslant \bar{t}-r$，这说明方程组

（1）之解是点态退化的，与假设矛盾，所以 $|\boldsymbol{\Phi}(t)| = |x(\varphi_1)(t)\cdots x(\varphi_m)(t)| \neq 0$，$t \geqslant \bar{t} - r$.

由引理 1，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 满足 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}$，现在证明 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) =$ 常数阵. 首先注意到 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = \boldsymbol{\Phi}^{*}(t)/|\boldsymbol{\Phi}(t)| = (\boldsymbol{\Phi}_{ji}^{*}(t))/|\boldsymbol{\Phi}(t)|$，这里 $\boldsymbol{\Phi}^{*}(t)$ 是 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 伴随矩阵，由 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 连续可微性推得了 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$ 的连续可微性，于是

$$\mathrm{d}[\dot{\boldsymbol{\Phi}}\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)]/\mathrm{d}t = \ddot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) + \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathrm{d}[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)]/\mathrm{d}t, \tag{5}$$

因 $\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = I$，两端求导得：$\boldsymbol{\Phi}(t)\mathrm{d}[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)]/\mathrm{d}t = -\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$. 将此式代入式（4），有：$\mathrm{d}[\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)]/\mathrm{d}t = \ddot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) + \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)\mathrm{d}[\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)]/\mathrm{d}t = \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)B\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) - \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)B\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) - \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)\boldsymbol{\Phi}(t)B\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) = 0$. 可见 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t) =$ 常数阵，记为 $\boldsymbol{A}$，则有 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)$.

现在证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是由方程组（1）唯一确定的，并不随 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 中基的选取而改变. 事实上，设 $x_{\bar{t}}(\varphi_1),\cdots x_{\bar{t}}(\varphi_n)$ 是 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 中的另一组基，则存在可逆阵 $\boldsymbol{G}$ 使得 $(x_{\bar{t}}(\varphi_1),\cdots,x_{\bar{t}}(\varphi_n)) = (x_{\bar{t}}(\varphi_1),\cdots x_{\bar{t}}(\varphi_n))\boldsymbol{G}$. 记 $\Psi(t) = (x(\varphi_1)(t)\cdots x(\varphi_n)(t))$，则有 $\Psi(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)G$. 于是，$\dot{\Psi}(t) = \dot{\boldsymbol{\Phi}}(t)\boldsymbol{G} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)G = \boldsymbol{A}\Psi(t)$，即 $\boldsymbol{A}$ 是唯一的.

对方程组（1）的任一解 $x(\varphi)(t)$，易知 $\exists k_1,\cdots,k_n$，使 $x(\varphi)(t) = (x(\varphi_1)(t)\cdots x(\varphi_n)(t))\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$，于是 $t \geqslant \bar{t} - r$ 时，$\dot{x}(\varphi)(t) = (\dot{x}(\varphi_1)(t)\cdots\dot{x}(\varphi_n)(t))\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}(x(\varphi_1)(t)\cdots x(\varphi_n)(t))\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}x(\varphi)(t)$. 定理得证.

由定理 1 可以得到推论 1.

推论 1 在定理 1 的条件下，方程组（1）之解与方程组（2）之解等价.

证明 由于 $x(\varphi_1)(t),\cdots,x(\varphi_n)(t)$ 为方程组（2）之基本解组，由常微分方程的理论知方程组（2）之任一解可表示为 $x(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i x(\varphi_i)(t)$，$t \geqslant \bar{t} - r$，可知其为方程组（1）之解.

要指出，定理 1 的条件事实上是保证方程组（1）之解与某一常系数齐线性常微分方程组之解等价的充要条件，即有定理 2.

定理 2 n 阶方程组（1）与某一常系数齐线性常微分方程组等价的充要条件是：其解空间是非点态退化的，且 $\exists\, \bar{t}$ 使 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 是 n 维的.

证明 充分性可由推论 1 得到.

必要性，因方程组（1）与形如（2）的常微分方程组之解等价，而方程组（2）之解空间为 n 维的，所以当 t 大于等于 某 $\bar{t} - r$ 时方程组（1）之解空间也为 n 维的，所以，$\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 是 n 维的. 又因存在方程组（2）的基解组使其 Wronsky 行列式不为零，于是方程组（1）之解是非点态退化的.

由定理 2 可以得到推论 2.

推论 2 若 $\exists\, \bar{t}$ 使方程组（1）的解集 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 是有限维的，则方程组（1）之解具有表达式 $x(\varphi)(t) = \boldsymbol{D}e^{B(t-\bar{t}+r)}\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}$，$t \geqslant \bar{t} - r$，这里 $\boldsymbol{D}$ 为 $n \times m$ 阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $m \times m$ 阵.

证明 设 $x_{\bar{t}}(\varphi_1),\cdots x_{\bar{t}}(\varphi_m)$ 为 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 的一组基，现记 $\boldsymbol{\Phi}(t) = (x(\varphi_1)(t)\cdots x(\varphi_m)(t))$. 由引理 1，

$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 满足方程 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}$．由此推得 $\overline{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(\bar{t}-r)e^{\boldsymbol{B}(t-\bar{t}+r)}$，而方程组（1）之任一解具有表示式 $x(\varphi)(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{bmatrix}, t \geqslant \bar{t}-r$．于是只需记 $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\Phi}(\bar{t}-r)$ 便得推论 2.

推论 3　若存在 $\bar{t}$ 使方程组（1）之解集 $\boldsymbol{T}(\bar{t})\boldsymbol{C}$ 是 n 维的，且其解是非点态退化的，则其任一解具有表达式 $x(\boldsymbol{\Phi})(t) = e^{At}\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, t \geqslant \bar{t}-r$.

证明　由定理 1 可得.

2　例子

例 1　考虑文献［1］中的例子

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-1) \\ x_3(t-1) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

容易算得：$\boldsymbol{T}(3)\boldsymbol{C} = \{(\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2,\boldsymbol{\varphi}_3):\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\boldsymbol{t}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{t}^2/2;\boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\boldsymbol{t};\boldsymbol{\varphi}_3(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{c};\boldsymbol{t} \in [2,3],\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为常数$\}$．在 $\boldsymbol{T}(3)\boldsymbol{C}$ 中取出一组基：$\boldsymbol{\psi}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi}_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\psi}_3(t) = \begin{bmatrix} t^2/2-t \\ t \\ 1 \end{bmatrix}, t \in [2,3]$，记 $\boldsymbol{\Phi}(t) = (\boldsymbol{\psi}_1(t),\boldsymbol{\psi}_2(t),\boldsymbol{\psi}_3(t)),(t \in [2,3])$，由引理 1，$t \geqslant 2$ 应满足 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}$，由此得到，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}(2)\dot{\boldsymbol{\Phi}}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．再由 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{B}$ 及初始条件 $\boldsymbol{\Phi}(2)$ 可解得：$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2-t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, t \geqslant 2$．因 $|\boldsymbol{\Phi}(2)| \neq 0$，知方程组（6）是非点态退化的，由定理 2 知方程组（1）之解等价与某常微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 之解．由 $\dot{\boldsymbol{\Phi}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(t)$ 算得：$\boldsymbol{A} = \dot{\boldsymbol{\Phi}}(2)\boldsymbol{\Phi}^{-1}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．由此容易算出常微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 解的一般表达式为：$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} a+(b-c)t+ct^2/2 \\ b+ct \\ 1 \end{bmatrix}$．由定理 2 可知，上式即为方程组（6）在 $t \geqslant 2$ 时解的一般表达式.

例 2　考虑方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}_0 x(t) + \int_{-r}^{0}[\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}(\theta)]x(t+\theta), \tag{7}$$

这里，$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} 5/2 & 4 & 3/2 \\ -3/4 & -1 & -3/4 \\ 9/2 & 10 & 5/2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_{(\theta)} = \begin{bmatrix} -(\cos 2\theta+\sin\theta)/2 & -(\cos 2\theta+\cos\theta+\sin\theta) & -\cos\theta/2 \\ (\cos 2\theta+\sin\theta)/4 & (\cos 2\theta+\cos\theta+\sin\theta)/2 & \cos\theta/4 \\ (\sin\theta-\cos 2\theta)/2 & \sin\theta-\cos 2\theta-\cos\theta & -\cos\theta/2 \end{bmatrix}$.

令 $y=\boldsymbol{F}x,\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&2&0\end{bmatrix}$，把方程组（7）化为

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{A}_1y(t)+\int_{-r}^{0}[\mathrm{d}\boldsymbol{\eta}_1(\theta)]y(t+\theta),\tag{8}$$

这里，$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}2&2&5\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{\eta}_1(\theta)=\begin{bmatrix}0&-\cos\theta&-\cos 2\theta\\0&0&\sin\theta\\0&0&0\end{bmatrix}$.

通过计算可知，方程组（8）之解集 $\boldsymbol{T}(3)\boldsymbol{C}$ 是 3 维空间，且是非点态退化的，由推论 1 即知（8）之解等价于常微分方程组 $\dot{\boldsymbol{y}}(t)=\boldsymbol{A}y(t)$ 的解，于是，方程组（7）之解等价于常微分方程组 $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{AF}x(t)$ 的解.

[参考文献]

[1] 王柔怀，伍卓群. 常微分方程讲义［M］. 北京：人民教育出版社，1979.

[2] JACK HSLE. Theory of functional differerntial equations［M］. New York：Springer Verlag，1997.

[3] 李宝麟，卢金芳，王佳，等. 滞后型泛函微分方程的 Φ－有界变差解［J］. 西北师范大学学报：自然科学版，2013，49(3)：11-15.

[4] 张力群，董秀娟. 一类滞后型泛函微分方程的稳定性［J］. 安庆师范学院学报：自然科学版，2006，12(1)：33-36.

[5] FEDERSON W，SCHWABAK S. Stability for retarded functional differential equation［J］. Ukreinian Mathematical Journal，2008，60(1)：121-140.

[6] 陈改平，鲍俊艳. 具有滞后与超前的泛函微分方程的拟线性方法［J］. 河北大学学报：自然科学版，2011，31(2)：130-134.

[7] WANG P G，TIAN S H，WU Y B. Monotone iterative method for firstorder functional difference equations with nonlinear boundary value condition［J］. Applied Mathematics and Computation，2008，203(1)：266-272.

[8] 胡作生，傅希林. 滞后型泛函微分方程解的次一致渐近稳定性［J］. 山东师范大学学报：自然科学版，1994，9(1)：14-19.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）