

[文章编号] 1007-7405(2015)06-0475-06

# 双模压缩真空态光场作用下耦合双原子的 Wigner-Yanase 偏态信息

李 敏

(集美大学诚毅学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究了与双模压缩真空态光场作用过程中耦合双原子的 Wigner-Yanase 偏态信息. 结果表明, 当光场压缩因子较小时, 光场与原子间相互作用和原子间偶极-偶极相互作用共同决定了原子的总 Wigner-Yanase 偏态信息演化的周期; 增强原子间偶极-偶极相互作用, 可以抵抗原子的总 Wigner-Yanase 偏态信息的丢失; 光场压缩因子对原子的总 Wigner-Yanase 偏态信息的丢失起着重要的作用, 当光场压缩因子较大时, 原子的总 Wigner-Yanase 偏态信息会完全丢失.

[关键词] 压缩真空态; Wigner-Yanase 偏态信息; 光场; 耦合; 二能级原子; 偶极-偶极相互作用

[中图分类号] O 431.2

[文献标志码] A

## The Wigner-Yanase Information of Two Coupled Two-level Atoms Interacting with Two-mode Squeezed Vacuum Field

LI Min

(Chengyi College, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** The change of the total Wigner-Yanase skew information of two coupled two-level atoms interacting with two-mode squeezed vacuum state field was investigated. The results showed that when the squeezed factor was smaller, the interaction between atoms and field, the dipole-dipole interaction of two atoms determined evolution period of the total Wigner-Yanase skew information together; enhancing the dipole-dipole interaction of two atoms could resist the loss of the total Wigner-Yanase skew information; the squeezed factor of light field played an important role in the loss of the total Wigner-Yanase skew information, and when the squeezed factor was bigger, the total Wigner-Yanase skew information of atoms would lose completely.

**Key words:** two-mode squeezed vacuum state; Wigner-Yanase skew information; light field; coupled; two-level atom; dipole-dipole interaction

## 0 引言

1932年, Wigner 和 Yanase 从信息理论的观点来研究度量理论时, 首次引入了一个函数, 称为 Wigner-Yanase 偏态信息<sup>[1]</sup>. 从形式上看, Wigner-Yanase 偏态信息类似于量子 Fisher 信息, 自提出以来, 一直是量子信息通信领域十分活跃的研究课题. Wigner-Yanase 偏态信息对于自旋  $1/2$  粒子体

[收稿日期] 2015-04-22

[修回日期] 2015-07-25

[基金项目] 福建省中青年教师教育科研项目(JB14219)

[作者简介] 李敏(1980—), 女, 讲师, 硕士, 从事量子信息方面的研究.

系来说,完全等价于纠缠度,因此可以作为量子纠缠程度的判断依据<sup>[2-4]</sup>.在电磁诱导光透明机理下,可以通过场和原子系综的 Wigner - Yanase 偏态信息来探测场的信息向原子系综的转移过程,这对于量子信息的记忆、存储和传递有着非常重要的意义<sup>[5]</sup>.对于多粒子体系,可通过调整原子的初始状态和增加原子与场相互作用的强度,从而提高原子的 Wigner - Yanase 偏态信息<sup>[4,6-7]</sup>.

由于压缩态光场是一类重要的非经典场,可以用于量子纠缠交换、量子存储、量子密集编码、量子离物传态等量子信息与量子通信方面的实验研究<sup>[8-10]</sup>.而压缩真空态反映了压缩态的本质属性,因此人们对压缩真空态光场有极大兴趣,从理论上深入探讨了压缩真空态光场与原子相互作用系统中光场的量子特性及量子纠缠与退相干<sup>[11-13]</sup>.运用全量子理论和数值分析的方法,本文将讨论双模压缩真空态光场作用下的耦合双原子的总 Wigner - Yanase 偏态信息,并进一步分析其对光场压缩因子、原子间偶极 - 偶极相互作用、原子与场相互作用的依赖关系.

# 1 Wigner - Yanase 偏态信息

这里, Wigner - Yanase 偏态信息简称为偏态信息.如果给定体系的状态为  $\rho$ ,那么对于观测量  $A$ ,可以给出偏态信息的定义为<sup>[1]</sup>:

$$I(\rho, A_k) = -\text{tr}[\rho^{1/2}, A_k]^2/2 = \text{tr}[\rho A_k^2] - \text{tr}[\rho^{1/2} A_k \rho^{1/2} A_k]. \quad (1)$$

从式 (1) 不难看出,偏态信息实际上体现了算符  $A_k$  与量子态之间的不对易程度.对于纯态,体系的状态可用波函数  $\psi$  来描述,与波函数  $\psi$  对应的密度算符有性质  $\rho^n = \rho$ ,那么偏态信息为:  $I(\rho, A_k) = \langle A_k^2 \rangle - \langle A_k \rangle^2 = \Delta A_k^2$ ,即算符  $A_k$  的涨落.

对于由  $N$  个自旋  $1/2$  粒子构成的体系,总自旋为  $S$ ,集体自旋算符  $S_\alpha = \sum_{i=1}^N S_{i\alpha}, \alpha = x, y, z, S_{i\alpha}$  表示第  $i$  个粒子的自旋的  $\alpha$  分量,单粒子算符  $S_{i\alpha}$  和集体算符  $S_\alpha$  满足角动量的对易关系:  $[S_{i\alpha}, S_{i\beta}] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{i\gamma}, [S_\alpha, S_\beta] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma$ ,其中  $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$  为 Levi - Civita 符号.基于偏态信息的定义,也可以引入一个总的偏态信息:

$$I_t = \sum_k \{ \text{tr}[\rho S_k^2] - \text{tr}[\rho^{1/2} S_k \rho^{1/2} S_k] \}, \quad (2)$$

其中  $k$  取  $x, y, z$ . 对于纯态有:  $I_s = \sum_k \Delta S_k^2$ .

# 2 压缩真空态光场与原子相互作用系统

系统由两个与双模压缩态光场相互作用的耦合二能级原子构成,在旋转波近似下,原子 - 光场复合系统的哈密顿量可以表示为<sup>[11]</sup>:

$$H_0 = \omega_0 \sum_{j=1,2} S_z^{(j)} + \omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2, H_I = g \sum_{j=1,2} [a_1^\dagger a_2^\dagger S_-^{(j)} + a_1^- a_2^- S_+^{(j)}] + \Omega [S_+^{(1)} S_-^{(2)} + S_-^{(1)} S_+^{(2)}].$$

其中:  $\omega_0$  为二能级原子的上下能级间的本征跃迁频率;  $\omega_1$  和  $\omega_2$  为双模光场的频率;  $g$  为原子 - 光场耦合常数;  $\Omega$  为原子间偶极 - 偶极相互作用常数;  $a_j^\dagger$  和  $a_j$  ( $j = 1, 2$ ) 分别是双模光场的产生和湮灭算符;  $S_\pm^{(j)}$  和  $S_z^{(j)}$  是二能级原子的自旋算符,且取  $\hbar = 1$ . 为方便起见,这里考虑共振情况,即  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ .

设初始时刻 ( $t = 0$ ),两个原子均处于激发态,而光场处于双模压缩真空态,则原子 - 光场耦合系统初始时刻的态矢可表示为:  $|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^\infty f_n |e, e, n, n\rangle$ ,其中:  $f_n = [-e^{i\xi} \tanh \gamma]^n / \cosh \gamma$ ;  $\gamma$  为表征光场压缩程度的压缩因子;  $\xi$  为压缩方向角<sup>[14]</sup>,为简便起见,这里取  $\xi = 0$ .

那么  $t$  时刻,系统状态可以表示为:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^\infty [a_n(t) |e, e, n, n\rangle + b_n(t) |e, g, n, n\rangle + c_n(t) |g, e, n, n\rangle + d_n(t) |g, g, n, n\rangle]. \quad (3)$$

在相互作用绘景下, 将式 (3) 代入薛定谔方程  $i\partial |\psi(t)\rangle/\partial t = H_I |\psi(t)\rangle$ , 可得系数满足:

$$\begin{cases} i\dot{a}_n(t) = ng[c_{n-1}(t) + d_{n-1}(t)], \\ i\dot{b}_n(t) = (n+1)g[c_{n+1}(t) + d_{n+1}(t)], \\ i\dot{c}_n(t) = g(n+1)a_{n+1}(t) + ngb_{n-1}(t) + \Omega d_n(t), \\ i\dot{d}_n(t) = g(n+1)a_{n+1}(t) + ngb_{n-1}(t) + \Omega c_n(t). \end{cases} \quad (4)$$

解上述方程, 可得系数为:

$$a_n(t) = f_n - (n+1)\beta_{n+1} \{ \exp(-i\Omega t/2) \cdot [\Omega \sin(\alpha_{n+1}t/2) - i\alpha_{n+1} \cos(\alpha_{n+1}t/2)] + i\alpha_{n+1} \} / 2g[(n+1)^2 + (n+2)^2], \quad (5)$$

$$b_n(t) = -n\beta_{n-1} \{ \exp(-i\Omega t/2) \cdot [\Omega \sin(\alpha_{n-1}t/2) - i\alpha_{n-1} \cos(\alpha_{n-1}t/2)] + i\alpha_{n-1} \} / 2g[(n-1)^2 + n^2], \quad (6)$$

$$c_n(t) = d_n(t) = \beta_n \exp(-i\Omega t/2) \cdot \sin(\alpha_{n+1}t/2). \quad (7)$$

其中:

$$\alpha_n = \sqrt{\{\Omega^2 + 8g^2[n^2 + (n+1)^2]\}}, \beta_n = -i2ngf_{n-1}/\alpha_n. \quad (8)$$

将式 (5) — 式 (8) 代入式 (3) 即可得到任意时刻系统的状态.

### 3 双原子的总 Wigner – Yanase 偏态信息

从系统状态函数出发, 由  $\rho_{AF}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$  可得系统的约化密度矩阵, 再通过对光场求迹, 在非耦合表象  $|e\rangle\langle e|$ ,  $|e\rangle\langle g|$ ,  $|g\rangle\langle e|$  和  $|g\rangle\langle g|$  下, 可得到  $t$  时刻耦合双原子体系的约化密度矩阵为:

$$\rho_A(t) = \text{Tr}_F(\rho_{AF}(t)) = \begin{bmatrix} \sum_n a_n(t)a_n^*(t) & \sum_n a_n(t)b_n^*(t) & \sum_n a_n(t)c_n^*(t) & \sum_n a_n(t)d_n^*(t) \\ \sum_n b_n(t)a_n^*(t) & \sum_n b_n(t)b_n^*(t) & \sum_n b_n(t)c_n^*(t) & \sum_n b_n(t)d_n^*(t) \\ \sum_n c_n(t)a_n^*(t) & \sum_n c_n(t)b_n^*(t) & \sum_n c_n(t)c_n^*(t) & \sum_n c_n(t)d_n^*(t) \\ \sum_n d_n(t)a_n^*(t) & \sum_n d_n(t)b_n^*(t) & \sum_n d_n(t)c_n^*(t) & \sum_n d_n(t)d_n^*(t) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中对角元表示耦合双原子体系处于  $|e\rangle\langle e|$ ,  $|e\rangle\langle g|$ ,  $|g\rangle\langle e|$ ,  $|g\rangle\langle g|$  的概率, 作为周期性函数, 它们的振荡周期由原子间偶极 – 偶极相互作用  $\Omega$  和原子与场间的相互作用强度  $g$  共同决定, 对周期的控制, 二者中的强者占主导地位.

考虑到在非耦合表象  $|e\rangle\langle e|$ ,  $|e\rangle\langle g|$ ,  $|g\rangle\langle e|$  和  $|g\rangle\langle g|$  下, 耦合双原子体系的自旋算符为:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} / 2, S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & i & i & 0 \end{pmatrix} / 2, S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / 2. \quad (9)$$

将式 (9) 和式 (10) 代入式 (2), 可求出耦合双原子体系的偏态信息  $I_t$ .

### 4 结果与讨论

假设初始时刻双原子处于激发态, 通过数值计算及分析, 分别考察了原子间偶极 – 偶极相互作用、光场压缩因子和原子与光场相互作用对双原子的总偏态信息的影响.

#### 4.1 原子间偶极 – 偶极相互作用对双原子的偏态信息的影响

图 1 给出了当原子间偶极 – 偶极相互作用强度  $\Omega = 0$ ,  $\Omega = 2$ ,  $\Omega = 10$  时的双原子的总偏态信息  $I_t$  的

演化曲线.

在不考虑原子间偶极-偶极相互作用（即  $\Omega = 0$ ）时，且光场初始压缩因子  $\gamma$  很小的情况下，双原子的总偏态信息将经历从 1 开始逐渐减小到某一数值，后又逐渐恢复，周期性的丢失与恢复，但无法减小到零，表明偏态信息不会完全丢失，如图 1a 中实线所示. 若场是真空辐射场，双原子的总偏态信息的演化如图 1a 中虚线所示，总的偏态信息在 0 到 1 之间周期性变化，发现最小值可以达到零，即偏态信息会完全丢失<sup>[7]</sup>. 比较图 1a 中实线与虚线可知，双模压缩真空中，由于光场压缩因子对场的量子性质有直接的影响，且通过原子与场相互作用，对原子产生了较为明显的影响，使原子偏态信息的丢失得到了延缓.

当原子间的偶极相互作用强度较弱时，如图 1b 所示，原子的总偏态信息出现不规则的周期性振荡；当原子间的偶极相互作用较强时，如图 1c 所示，偏态信息出现规则的周期振荡，演化周期较长，从 1 开始减少，缓慢地恢复到最大值附近，期间多次出现次极大值与次极小值，偏态信息的最小值略有增加. 比较图 1b 和图 1c 可以看出，随着原子间偶极-偶极相互作用强度越大，偏态信息的演化周期越短，对偏态信息的恢复越起积极作用. 因此可通过增加原子间偶极-偶极相互作用来抵抗原子偏态信息的丢失.

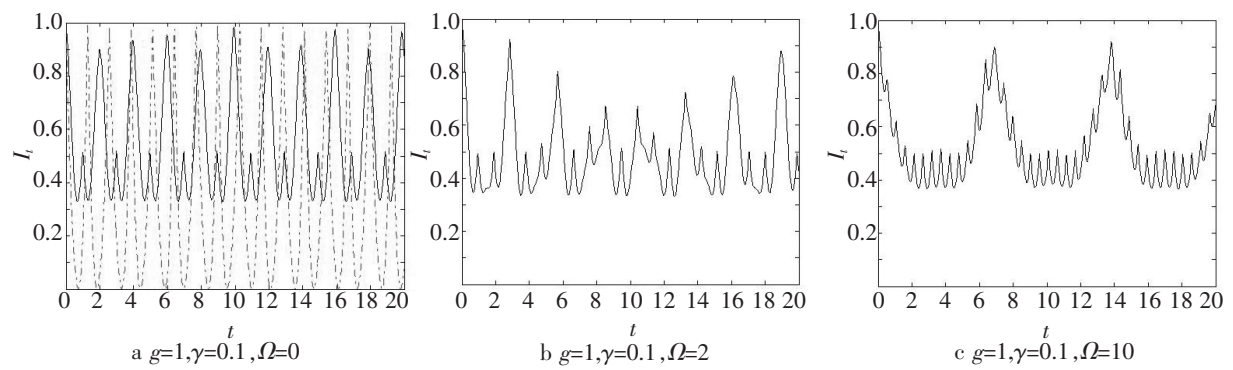


图 1 原子的总偏态信息随原子间偶极-偶极相互作用强度  $\Omega$  的变化

Fig.1 The time evolution of the total Wigner-Yanase skew information for different dipole-dipole interaction  $\Omega$  between atoms

4.2 双模压缩真空态光场的压缩因子对双原子的偏态信息的影响

若不考虑原子间偶极-偶极相互作用，即当  $\Omega = 0$  时，对原子的总偏态信息进行分析，分别给出了当光场压缩因子  $\gamma = 0.1, 0.3, 0.6$  时原子的总偏态信息  $I_t$  的演化曲线，考察了光场压缩因子对双原子的总偏态信息的影响.

在图 2 中，当光场压缩因子  $\gamma$  较小时，原子的总偏态信息出现规则的周期振荡；随着光场压缩因子变大，偏态信息出现了不规则振荡，即该振荡不再具有等振幅和明显的周期性，且压缩因子越大，振荡越不规则，振荡幅度变得越小，振荡变得越平缓，从较长时间范围考察来看，原子总的偏态信息逐渐减少. 这是因为光场压缩因子决定了双模光场的关联程度， $\gamma$  较小时，双模中的每一种模式与原子的作用近似独立，随着  $\gamma$  的增大，双模光场的关联程度得到增强，使得两种模式的光场对原子的作用相互调制时也增强，从而导致了原子状态之间的退相干，且压缩因子越大，退相干现象越明显，量子信息丢失越严重. 当光场压缩因子  $\gamma$  很大时，信息量会完全丢失. 因此，在量子信息存储和传输过程中，光场压缩因子对量子偏态信息丢失的明显的积极作用需要加以重视.

4.3 原子与双模压缩真空态光场的相互作用对双原子的偏态信息的影响

在不考虑原子间偶极-偶极相互作用（即  $\Omega = 0$ ）时，图 3 给出了当双原子与双模压缩真空态光场耦合常数  $g = 0.5, g = 1, g = 1.5$  时，原子的总偏态信息  $I_t$  随时间的演化. 从图 3 可以看出，原子的总偏态信息随时间在 0 和 1 之间出现周期性的振荡，最小值不为 0，即信息量不会完全丢失，如

图 3a 实线所示. 这里, 还画出了极化矢量  $\boldsymbol{p}$  的大小随时间的演化, 偏态信息最大时, 极化矢量为 1, 这表明双原子处于基态或激发态时, 原子的总偏态信息最大. 同时, 从图 3a 虚线可以看到, 极化矢量达到最小值时, 偏态信息并未达到最小值, 这表明由于压缩态光场与原子的相互作用, 当双原子处于最大混合态时, 原子的总偏态信息丢失量并不是最大.

比较图 3a, b, c 可知, 随着双原子与双模压缩态光场相互作用变强, 原子的总偏态信息演化周期变短, 振荡变频繁, 但可以达到的最小值和最大值即幅度未变. 显然, 双模压缩真空态光场中, 原子和光场相互作用对原子总的偏态信息是否丢失不起作用, 但相互作用强度对原子的总偏态信息的演化周期起决定性的作用, 这与真空场的情况相同<sup>[7]</sup>.

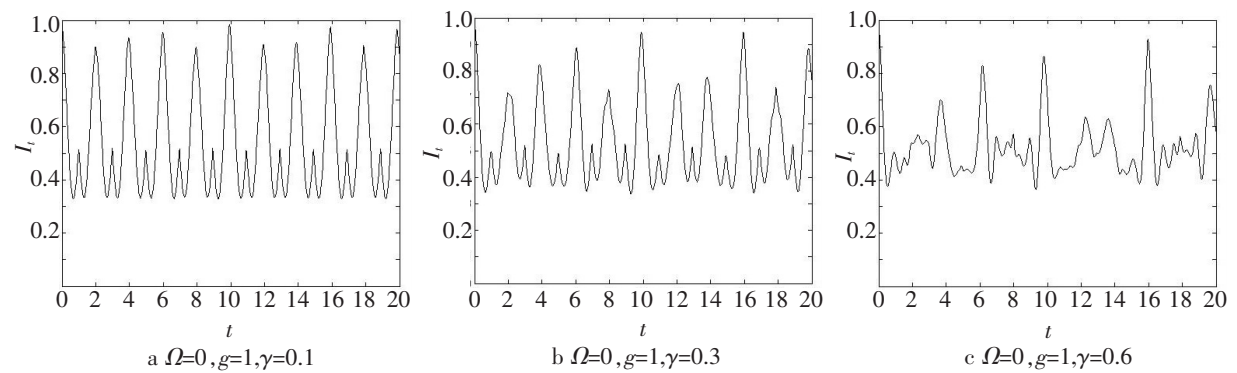


图 2 原子的总偏态信息随压缩因子  $\gamma$  的变化

Fig.2 The time evolution of the total Wigner–Yanase skew information for  $\gamma$  different squeezed factor

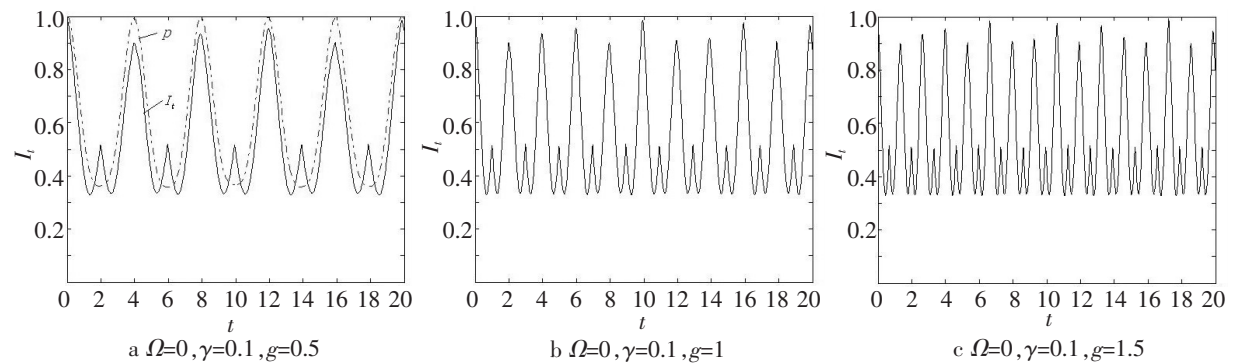


图 3 原子的总偏态信息随原子与光场相互作用的变化

Fig.3 The time evolution of the total Wigner–Yanase skew information for different interaction constant between atom-field

5 结论

利用全量子理论和数值计算方法, 研究了双模压缩真空态光场作用下的双二能级原子的 Wigner – Yanase 偏态信息, 得到了如下结果:

- 1) 双原子的总 Wigner – Yanase 偏态信息演化周期, 由光场与原子间耦合常数  $g$  和原子间偶极 – 偶极相互作用常数  $\Omega$  共同决定, 当光场压缩因子  $\gamma$  较小时, 偏态信息演化周期与其无关.
- 2) 原子间偶极 – 偶极相互作用强度对双原子的总 Wigner – Yanase 偏态信息的恢复起到积极的作用, 因此可以通过增加原子间偶极 – 偶极相互作用来抵抗原子偏态信息的丢失.
- 3) 光场压缩因子对原子的总偏态信息的丢失与恢复有重要的影响, 当光场压缩因子  $\gamma$  较小时, 压缩因子越大, 越加剧信息的丢失; 当光场压缩因子  $\gamma$  较大时, 信息会完全丢失. 因此在实现量子信息传输的过程中, 压缩因子导致的量子信息丢失问题是需要严格考虑的问题.



## [ 参 考 文 献 ]

- [1] WIGNER E P, YANASE M M. Information contents of distributions [J]. Proc Natl Sci USA, 1963, 49(6): 910-918.
- [2] LIU W F, YIN X C, ZHANG L H. Storage of maximal Wigner-Yanase skew information of two-qubit system using nonlinear interactions with decay [J]. Int J Theor Phys, 2011, 50(11): 3375-3384.
- [3] SUN H G, LIU W F, LI C J. Maximal and total skew information for a two-qubit system using nonlinear interaction models [J]. Chin Phys B, 2011, 20(9): 090301.
- [4] SUN H G, ZHANG L H, LIU W F, et al. Maximal and total skew information of three-qubit system obtained using nonlinear intermation models [J]. Chin Phys B, 2012, 21(1): 010301.
- [5] 付静, 刘万芳, 赵玉杰. 电磁诱导光透明过程中的 Wigner-Yanase 偏振信息 [J]. 物理学报, 2013, 62(17): 170302.
- [6] TANG L, CHEN Z. Concurrence and Wigner-Yanase skew information [J]. Chin Phys Lett, 2006, 23(3): 542-544.
- [7] 李敏, 刘万芳. 单模辐射场作用下两二能级原子的 Wigner-Yanase 偏态信息 [J]. 原子与分子物理学报, 2014, 31(6): 945-950.
- [8] 易智, 何广强, 曾贵华. 基于双模压缩态的量子投票协议 [J]. 物理学报, 2009, 58(5): 3166-3172.
- [9] JIANG N Q, ZHENG Y Z. General Einstein-Podolsky-Rosen-Type entanglement of continuous variables for bosons [J]. Phys Rev A, 2006, 74(1): 012306.
- [10] WANG M F, ZHANG Y, JIANG N Q, et al. Efficient two-mode squeezing and quantum-state teleportation of macroscopic atomic ensembles [J]. Physics Rev A, 2009, 79(1): 012327.
- [11] 黄春佳, 周明, 厉江帆. 双模压缩真空场与耦合双原子相互作用系统中光场的量子特性 [J]. 物理学报, 2000, 49(11): 2159-2164.
- [12] 王志成, 方卯发. 双模压缩真空态与原子相互作用中的量子纠缠与退相干 [J]. 物理学报, 2002, 51(9): 1989-1995.
- [13] 李永平, 夏云杰, 贺金玉. 虚光场对双模压缩真空场与原子相互作用系统纠缠特性的影响 [J]. 原子与分子物理学报, 2005, 22(3): 551-555.
- [14] 彭金生, 李高翔. 近代量子光学导论 [M]. 北京: 科学出版社, 1996: 192.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)