

[文章编号] 1007-7405(2015)06-0470-05

$h\mathbb{Z}$ 时标上带有限分布时滞的集群行为的动力学研究

肖 强, 黄振坤

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究了 $h\mathbb{Z}$ 时标上包含有限分布时滞的基于吸引/排斥函数的群聚模型. 基于 Lyapunov 稳定性方法和时标理论, 研究了集群的稳定性, 证明了所有个体在有限时间会聚集到一个有限区域. 最后, 给出了一些模拟结果来验证结果的有效性.

[关键词] 集群; 时滞; 聚集行为; $h\mathbb{Z}$ 时标

[中图分类号] O 193

[文献标志码] A

Cohesive Dynamics of Swarms with Finite-distributed Delays on $h\mathbb{Z}$ Time Scale

XIAO Qiang, HUANG Zhen-kun

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, a swarm model based on attraction/repulsion functions with finite-distributed delays on $h\mathbb{Z}$ time scale was investigated. The stability of the swarm based on Lyapunov stability method and theory of time scales was studied. It was shown that all the members of the swarm will eventually gather into a bounded region in finite time. In the end, simulation results were presented to illustrate the effectiveness of our results.

Key words: swarm; time delays; collective behavior; $h\mathbb{Z}$ time scale

0 引言

近年来, 有益于协作群聚行为和多个体集群行为的研究成为了一个热点^[1-4]. 研究中基本的问题是如何根据个体之间的相互作用来建模和分析集群行为, 很久以来生物学家们致力于理解和建立群聚模型^[5-6]. 普遍的理解是集群行为是基于个体间长距离相互吸引和短距离相互排斥相互作用的结果^[1]. Gazi 等研究了个体一阶连续运动模型^[7], 证明了所有个体在有限时间内会形成一个群聚体, 并给出了群聚体一个显式的界. 他们用的一般方法是将个体看做一个粒子并通过相互作用来研究集群行为^[8]. 然而, 由于个体间的交流存在时间延迟, 使得系统表现出复杂的动力学行为, 如发散性和稳定性等, 因此将分布时滞考虑到模型中是很重要的. 文献 [9] 考虑了基于同步分布控制方法的离散一维和二维群聚结构. 文献 [10] 提出了在合适的环境中带有交流时滞的群聚模型, 并且得到了稳定性结果. 文献 [11] 描述了自治飞行器的编队控制策略.

群体中过去的行为对现在有着很大的影响, 而且这种影响因其复杂性难以刻画, 在一段时间内成为研究中一个难点. 分布时滞能很好地刻画和量化这些时滞本质的影响, 分布时滞不仅影响着群体最

[收稿日期] 2015-01-16

[修回日期] 2015-03-20

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目 (61573005, 11361010); 福建省自然科学基金资助项目 (2012J06001)

[作者简介] 肖强 (1989—), 男, 硕士生, 从事神经网络方面研究. 通信作者: 黄振坤 (1977—), 男, 教授, 硕导, 从事神经网络方向研究, E-mail: hzk974226@jmu.edu.cn.

终群聚半径范围的大小, 而且决定着群聚形成的时间. 本文介绍了时标上时滞群聚模型, 分析了合适条件下集群行为和群聚的动力学性质, 并给出了群聚模型的一些模拟结果.

1 预备知识

本节中, 给出一些关于时标的基本概念和一些引理, 它们均可以在文献 [12] 中找到.

时标 \mathbb{T} 是实数集 \mathbb{R} 的任意一个非空闭子集, 如 $\mathbb{R}, h\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ 等. 前跳算子 $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, 定义为 $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$, 并且当 $\sup \mathbb{T} \in \mathbb{T}$ 时, $\sigma(\sup \mathbb{T}) = \sup \mathbb{T}$. 后跳算子 $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ 定义为 $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$, 并且当 $\inf \mathbb{T} \in \mathbb{T}$ 时, $\rho(\inf \mathbb{T}) = \inf \mathbb{T}$. 集合 \mathbb{T}^k 定义为: 当 $\sup \mathbb{T} < +\infty$ 时, $\mathbb{T}^k := \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}]$, 否则 $\mathbb{T}^k := \mathbb{T}$. 距离函数 $\mu: \mathbb{T} \rightarrow [0, +\infty)$ 定义为 $\mu(t) := \sigma(t) - t$. 当 $\mu(t) > 0$ 时, 称 t 为右扩散点; 当 $\mu(t) = 0$ 时, 称 t 为右稠密点. C_{rd} 表示所有定义在 \mathbb{T} 上的右稠密连续函数. 若函数 $p(t) \in C_{rd}$ 并且满足: 对任意的 $t \in \mathbb{T}^k$, 有 $1 + \mu(t)p(t) > 0$, 则记 $p(t) \in R$. 若函数 $p(t) \in C_{rd}$ 并且满足: 对任意的 $t \in \mathbb{T}^k$, 有 $1 + \mu(t)p(t) > 0$, 则记 $p(t) \in R^+$.

定义 1^[12] 令 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}, t \in \mathbb{T}^k$, 则满足以下条件的 f^Δ , 即对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 t 的邻域 U , 有: $\|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)\| \leq \varepsilon \|\sigma(t) - s\|, \forall s \in U$, 则称它为 f 在 t 处的 Δ -导数. 若 $f^\Delta(t)$ 在所有 $t \in \mathbb{T}^k$ 均存在, 则称 f 是 Δ -可微的.

注 1 由定义 1 可得到: 1) 若 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, 则 $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} [(f(t) - f(s))/(t - s)] = f'(t)$, 即 f^Δ 是普通意义上的导数; 2) 若 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$, 则 $f^\Delta(t) = f(t + 1) - f(t), t \in \mathbb{Z}$.

引理 1^[12] 对任意给定的时标 \mathbb{T} 和函数 $f(t)$, 若 $f \in C_{rd}$ 且 $t \in \mathbb{T}^k$, 则 $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \Delta\tau = \mu(t)f(t)$.

定义 2^[12] 定义 $\xi_h: \mathbb{C}_h \rightarrow \mathbb{Z}_h$ 为 $\begin{cases} \xi_h(z) = \text{Log}(1 + z\hat{h})/\hat{h}, & \hat{h} > 0 \\ \xi_h(z) = z, & \hat{h} = 0 \end{cases}$, 其中: Log 是主对数函数; $\mathbb{C}_h = \{z \in \mathbb{C}: z \neq -1/h\}; \mathbb{Z}_h = \{z \in \mathbb{C}: -\pi/h < \text{Im}(z) < \pi/h\}$, 并且当 $\hat{h} = 0$ 时, $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{C}$.

引理 2^[12] 对任意给定的时标 \mathbb{T} 和函数 $p(t)$, 若 $p(t) \in R$, 那么 $e_p(t, t_0)$ 是以下初值问题的唯一解: $y^\Delta = p(t)y, y(t_0) = 1, t \in \mathbb{T}$, 其中: $e_p(t, t_0) = \exp(\int_{t_0}^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \Delta\tau), t_0, t \in \mathbb{T}$.

引理 3^[12] 对任意给定的时标 \mathbb{T} , 若函数 $y(t), f(t) \in C_{rd}$ 且 $p(t) \in R^+$. 则对于所有的 $t \in \mathbb{T}$, $y^\Delta(t) \leq p(t)y(t) + f(t)$, 蕴含着 $y(t) \leq y(t_0)e_p(t, t_0) + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau) \Delta\tau, t \in \mathbb{T}$.

2 群聚模型

本节中考虑的是 n 维欧式空间中 M 个个体组成的群体, 每个个体抽象成一个点. 个体的运动是由以下在时标上带有有限分布时滞的微分方程控制:

$$x_i^\Delta(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^M g(\int_{t-hq_0}^t [k_{ij}(t-s)(x_i(s) - x_j(s))] \Delta s), i = 1, \dots, M, t \in \mathbb{T}. \tag{1}$$

其中: $x_i \in \mathbb{R}^n$ 代表个体 i 的位置; $g(\cdot)$ 表示个体间相互吸引和排斥的函数, 并假定它具有长距离相互吸引和短距离相互排斥的性质; M 是群体所含个体的数目, 且 $m \geq 3$; $k_{ij}: [0, hq_0] \cap \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 是一个正的有界核函数, 其上界记为 λ , 并且满足 $\int_{t-hq_0}^t k_{ij}(t-s) \Delta s = \kappa$. 如无特别说明, 总取 \mathbb{T} 为 $h\mathbb{Z}, h$ 为一正实数.

由于 $g(\cdot)$ 是个体间最终的吸引和排斥函数^[4], 它可以表述为以下奇函数: $g(y) = -y[g_a(\|y\|) - g_r(\|y\|)], y \in \mathbb{R}^n$, 其中: $g_a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 代表具有长距离相互性质的吸引函数; $g_r: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 代表具有短距离相互排斥性质的排斥函数; $\|y\| = \sqrt{y^T y}$ 为欧式范数.

指定以下具体的吸引-排斥函数^[8]: $g(y) = -\gamma[a - b \exp(-\|y\|^2/c)]$, 其中 a, b 分别为个体间吸引和排斥参数, a, b, c 均为正实数, 并且 $b > a$, 即: $g_a(\|y\|) = a$, $g_r(\|y\|) = b \exp(-\|y\|^2/c)$.

3 主要结论

为研究群体的聚集性质, 定义群体的中心位置为: $\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^M x_i(t)/M$, 因此有: $\bar{x}^\Delta(t) =$

$$\sum_{i=1}^M x_i^\Delta(t)/M = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M g\left(\int_{t-hq_0}^t [k_{ij}(t-s)(x_i(s) - x_j(s))] \Delta s\right)/M. \text{ 为了方便, 做出以下假设.}$$

假设 1 核函数满足: $k_{ij}(t) = k_{ji}(t)$, $\forall t \in [0, hq_0]$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, M$.

$$\text{由假设 1 得到: } \bar{x}^\Delta(t) = \sum_{i=1}^M x_i^\Delta(t)/M = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M g\left(\int_{t-hq_0}^t [k_{ij}(t-s)(x_i(s) - x_j(s))] \Delta s\right)/M = 0.$$

因此, $\bar{x} := \sum_{i=1}^M x_i(0)/M$ 意味着群体的中心是固定的. 然而注意到, 尽管它表明群体的中心是固定的, 但是个体间的相对运动无法体现出来, 当所有个体都朝着远离中心位置的方向运动时, 它的中心位置依然是固定的.

注 2 核函数实际上是一个权重函数, 过去不同的时间与不同的位置对现在时刻有着不同的影响, 核函数量化着这些影响. 许多函数都可以成为核函数, 例如 $k_{12}(t) = e^{-t}$, $k_{23}(t) = 1/t$ 等.

为研究时滞群聚模型的稳定性, 使用了文献 [9] 提供的稳定性概念.

定义 3 群聚模型 (1) 是稳定的, 若存在正常数 α_i, β, γ , 使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i \|x_i(t) - \bar{x}\|^\beta \right) \leq \gamma$,

其中: $x_i(t)$ 是个体 i 在时刻 t 的位置; $\bar{x}(t)$ 是群体中心位置; γ 反映了群体的大小.

假设 2 存在一个正常数 $\xi > 0$, 使得 $\|x_i(t) - x_i(s)\| \leq \xi$, $\forall s \in [t - hq_0, t]$.

假设 2 表明, 为了优化群聚策略, 几乎所有的个体在短时间内都不会远离原位置太远. 因为 $\bar{v}_i = (x_i(t) - x_i(s))/(t - s)$ 是平均速度, 每个个体会采取相对平缓的运动方式来减小其能量损耗^[10].

记群体初始状态满足的条件为 $\|x_i(t) - \bar{x}\| \leq \theta$, $t \in [-hq_0, 0]$, 其中 θ 是一个正常数.

定理 1 在假设 1 和假设 2 下, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_i(t) \rightarrow B_R(\bar{x})$, 群聚模型 (1) 的所有个体将会聚集到一个有限区域内 $B_R(\bar{x}) = \{y(t) : \|y(t) - \bar{x}\| \leq R^2\}$, 其中: $R = (\kappa_2 + \sqrt{\kappa_2^2 + 4\kappa_1\kappa_3})/(2\kappa_1)$, $\kappa_1 = 2a\kappa(M - 2)$, $\kappa_2 = (2ah\lambda\xi q_0 + 2ah\lambda\theta q_0 + 2\varpi + a\xi\kappa)(M - 1)$, $\kappa_3 = (ah\lambda q_0\xi^2 + ah\xi\lambda\theta q_0 + \xi\varpi)(M - 1)$.

证明 令 $e_i(t) = x_i(t) - \bar{x}$, 考虑以下 Lyapunov 函数 $V_i(t) = \|e_i(t)\|^2 = (e_i(t))^T e_i(t)$. 由式 (1) 可得: $V_i^\Delta(t) = (e_i^\sigma(t) + e_i(t))^T e_i^\Delta(t) = (e_i^\sigma(t) + e_i(t))^T x_i^\Delta(t) = [2e_i(t) + (e_i^\sigma(t) - e_i(t))]^T \sum_{j=1, j \neq i}^M g\left(\int_{t-hq_0}^t k_{ij}(t-s)(x_i(s) - x_j(s)) \Delta s\right)$, 其中 $e_i^\sigma(t) = e_i(\sigma(t))$. 根据引理 1, 得到: $\int_{t-hq_0}^t k_{ij}(t-s)[x_i(s) - x_j(s)] \Delta s = \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)[x_i(t-lh) - x_j(t-lh)]h = \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)[e_i(t-lh) - e_j(t-lh)]h = \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)e_i(t-lh) - \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)e_j(t-lh)h = \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)e_i(t)h + \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)[e_i(t-lh) - e_i(t)]h - \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)e_j(t-lh)h$. 记 $y_{ij}(t) = \int_{t-hq_0}^t k_{ij}(t-s)[x_i(s) - x_j(s)] \Delta s$, 由此得到: $V_i^\Delta(t) = [2e_i(t) + (e_i^\sigma(t) - e_i(t))]^T \left\{ -a \sum_{j=1, j \neq i}^M y_{ij} + \sum_{j=1, j \neq i}^M g_r(\|y_{ij}(t)\|) y_{ij}(t) \right\} = -2a(e_i(t))^T \sum_{j=1, j \neq i}^M \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)he_i(t) - 2a(e_i(t))^T \sum_{j=1, j \neq i}^M \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)h[e_i(t-lh) - e_i(t)] + 2a(e_i(t))^T \sum_{j=1, j \neq i}^M \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)he_j(t-lh) + 2(e_i(t))^T$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^M g_r(\|y_{ij}(t)\|)y_{ij}(t) - a(e_i^\sigma(t) - e_i(t))^T \sum_{j=1, j \neq i}^M \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)he_i(t) - a(e_i^\sigma(t) - e_i(t))^T \sum_{j=1, j \neq i}^M$$
$$\sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)h[e_i(t-lh) - e_i(t)] + a(e_i^\sigma(t) - e_i(t))^T \sum_{j=1, j \neq i}^M \sum_{l=1}^{q_0} k_{ij}(lh)he_j(t-lh) + a(e_i^\sigma(t) - e_i(t))^T$$
$$\sum_{j=1, j \neq i}^M g_r(\|y_{ij}(t)\|)y_{ij}(t).$$
 根据假设 2, 得到: $V_i^\Delta(t) \leq -2a(M-1)\kappa\|e_i(t)\|^2 + 2ah\xi\lambda(M-1)q_0\|e_i(t)\| + 2ah(M-1)\lambda\theta q_0\|e_i(t)\| + 2\varpi(M-1)\|e_i(t)\| + a\xi(M-1)\kappa\|e_i(t)\| + ah\xi^2\lambda(M-1)q_0 + ah\xi\lambda\theta q_0(M-1) + \xi\varpi(M-1) = -2a\kappa\|e_i(t)\|^2 - 2a\kappa(M-2)\|e_i(t)\|^2 + (2ah\lambda\xi q_0 + 2ah\lambda\theta q_0 + 2\varpi + a\xi\kappa)(M-1)\|e_i(t)\| + (ah\lambda q_0\xi^2 + ah\xi\lambda\theta q_0 + \xi\varpi)(M-1).$ 令 $\kappa_0 = 2a\kappa$, 有:

$$V_i^\Delta(t) \leq -\kappa_0\|e_i(t)\|^2 + (-\kappa_1\|e_i(t)\|^2 + \kappa_2\|e_i(t)\| + \kappa_3).$$
 (2)

显然存在 $R > 0$, 使得 $V_i^\Delta(t) < -\kappa_0\|e_i(t)\|^2 < 0$, 意味着当 $\|e_i\| > R$ 时, 有 $V_i^\Delta(t) < 0$. 因此, 随着 $\|e_i\|$ 的减小, 个体 i 将会越来越靠近群体中心 (即 \bar{x}).

定理 2 在假设 1、假设 2 和定理 1 下, 对任意 $R^* > 0$, 若 $\kappa_0 < 1$ 且 $h\kappa_0 < 1$, 则所有位于区域 $B_R(\bar{x})$ 以外的个体 i 将会在以下有限时间 T_i 内进入到区域 $B_{R+R^*}(\bar{x})$ 中: $0 < T_i \leq \ln[(R + R^*)^2/V_i(0)]h/\ln(1 - \kappa_0)$.

证明 由式 (2), 有 $V_i^\Delta(t) \leq -\kappa_0\|e_i(t)\|^2 + (-\kappa_1\|e_i(t)\|^2 + \kappa_2\|e_i(t)\| + \kappa_3)$. 因为 $R^* > 0$, 当 $\|e_i(t)\| > R + R^*$ 时, 必有 $V_i^\Delta(t) \leq -\kappa_0\|e_i(t)\|^2 = -\kappa_0 V_i(t)$. 根据引理 3, 有: $V_i(t) \leq e_{-\kappa_0}(t, 0)V_i(0) = (1 - \kappa_0)^{t/h}V_i(0)$; $V_i(t) \leq e_{-\kappa_0}(t, 0)V_i(0) = (1 - \kappa_0)^{t/h}V_i(0)$. 由于 $0 < \kappa_0 < 1$ 且 $V_i(t) \geq (R + R^*)^2$, 有 $t \leq \ln[(R + R^*)^2/V_i(0)]h/\ln(1 - \kappa_0)$. 从而 $B_R(\bar{x})$ 以外的个体将在 T_i 时间内进入 $B_{R+R^*}(\bar{x})$ 中且 $T_i \leq \ln[(R + R^*)^2/V_i(0)]h/\ln(1 - \kappa_0)$. 证毕.

注 3 当 $h=1$ 时, 式 (1) 简化为: $x_i(n+1) = x_i(n) + \sum_{j=1, j \neq i}^M g(\sum_{l=1}^\tau k_{ij}(l)[x_i(t-l) - x_j(t-l)])$, $i = 1, \dots, M, t \in T$, 可以得到类似定理 1 和 2 的结果. 对非时滞离散模型的相关结果, 可参见文献 [13].

4 数值模拟

为了验证以上理论分析, 给出一组参数来进行数值模拟. 考虑以下群聚模型: $x_i^\Delta(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^M \{(-\int_{t-hq_0}^t k_{ij}(t-s)[x_i(s) - x_j(s)]\Delta s\} * \{a - b \exp[\| \int_{t-hq_0}^t k_{ij}(t-s)(x_i(s) - x_j(s))\Delta s \|^2/c]\}$, $i = 1, \dots, M$. 其中 $M = 30, h = 0.5, a = 0.005, b = 1, c = 0.5, q_0 = 2, k_{ij}(t) = \exp(-t), t \in [0, 1]$. 在 R^2 中, 由定理 1 和定理 2 可以估计出半径 $R = 3.2$ 和有限时间 $T = 85.9$. 个体的运动轨迹和状态变量参见图 1 和图 2. 类似地, 可以在 R^3 中考虑具有相同参数设置的群聚模型, 相关的计算机模拟结果见图 3 和图 4.

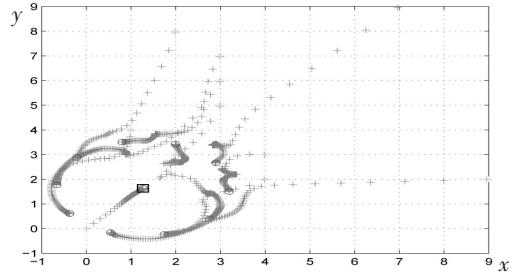


图 1 二维空间中个体的运动轨迹
Fig.1 The swarm member cohesive space in 2-dimensional space

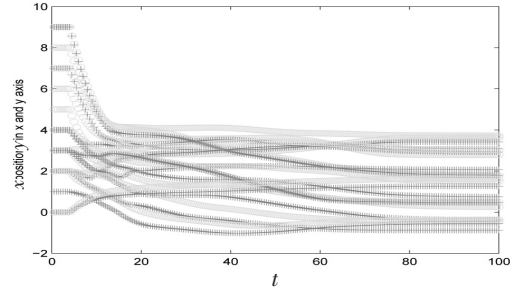


图 2 二维空间中个体的运动位置
Fig.2 The swarm member state in 2-dimensional space

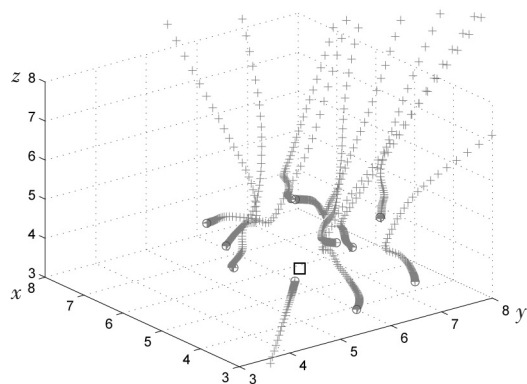


图 3 三维空间中个体的运动轨迹

Fig.3 The swarm member chesive space in 3-dimensional space

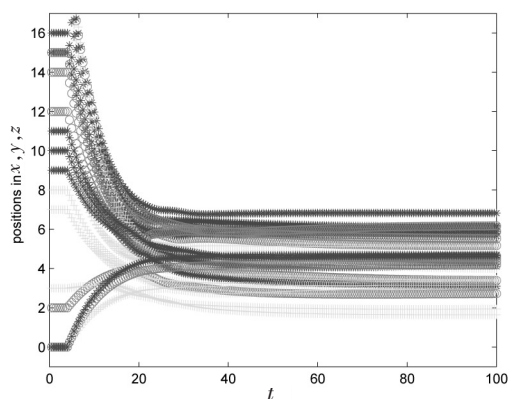


图 4 三维空间中个体的运动位置

Fig.4 The swarm member state in 3-dimensional space

[参 考 文 献]

- [1] GAZI V, PASSINO K M. Stability analysis of swarms [J]. IEEE Trans Automat Contr, 2003, 48(4): 692-697.
- [2] CZIROK A, VICSEK T. Collective behaviors of interacting selfpropelled particles [J]. J Phys A: Math Nuclear General, 2000, 281(1/4): 17-29.
- [3] BARTOSIEWICZ Z, PIOTROWSKA E, WYRWAS M. Stability, stabilization and observers of linear control systems on time scales [C] //2007 4th IEEE Conference on Decision and Control. New orleans; IEEE, 2007: 2803-2808.
- [4] GAZI V, PASSINO K M. A class of attraction/repulsion functions for stable swarm aggregations [J]. IEEE Conference on Decision and Control, 2003, 77(18): 2842-2847.
- [5] GAZI V, PASSINO K M. Stability analysis of swarms in an environment with an attractant/repelellent profiles [J]. Proceddings of the American Control Conference, 2002, 3: 1819-1824.
- [6] GAZI V, PASSINO K M. Stability analysis of social foraging swarms: combined effects of attractant/replellent profiles [C] //IEEE. Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control. Las Vegas; IEEE, 2002: 2848-2853.
- [7] GAZI V, PASSINO K M. Stability of social foraging swarm [J]. IEEE Trans Syst Man Cybernet Part B: Cybernet, 2004, 34(1): 539-557.
- [8] GRUMBAUM D, OKUBO A. Modeling social animal aggregations [J]. Frontiers in Theoretical Biology, 1994, 100: 296-325.
- [9] LIU Q, LIAO X, LIU Y, et al. Dynamics of an inertial two-neuron system with time delay [J]. Nonlinear Dyn, 2009, 58(3): 573-609.
- [10] LIU Q, WANG L, LIAO X. Stability analysis of swarms with interaction time delays [J]. Information Sciences, 2012, 192: 244-254.
- [11] GIULIETTI F, POLLINI L, INNOCENTI M. Autonomous formation flight [J]. IEEE Trans Robot Automat, 2000, 14: 926-939.
- [12] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales; an introduction with applications [M]. Boston: Birkh Wauser, 2001.
- [13] GAZI V, PASSINO K M. Stability of a one-dimensional discrete-time asynchronous swarm [J]. IEEE Trans Syst Man Cybernet Part B: Cybernet, 2005, 35(4): 834-841.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)