

# 图的关联能量的上界

陈毅贞, 徐丽琼

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 图  $G$  的关联能量  $IE(G)$  等于关联矩阵  $I(G)$  的奇异特征值之和. 关联能量与能量关系密切. 本文根据  $n, m$ , 最大度, 最小度以及第一 Zagreb 指标, 给出关联能量新的上界, 即  $IE(G) \leq \sqrt{n[m + ((n+1)/2)]}$  等.

[关键词] 关联能量; 无符号 Laplacian 矩阵; 无符号 Laplacian 谱

[中图分类号] O 157.1

## Upper Bounds for Incidence Energy of Graphs

CHEN Yi-zhen, XU Li-qiong

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** The incidence energy  $IE(G)$  of  $G$  is the sum of the singular values of incidence matrix  $I(G)$ . The incidence energy of graph is closely connected with the energy of graph. In this paper, new upper bounds for incidence energy in terms of  $n, m$ , maximum degree, minimum degree, and the first Zagreb index was given, i. e.,  $IE(G) \leq \sqrt{n[m + ((n+1)/2)]}$  and so on.

**Keywords:** incidence energy; signless Laplacian matrix; signless Laplacian spectra

## 0 引言

本文未定的符号及概念见文献 [1].

设  $G$  是一个具有  $m$  条边的  $n$  阶简单连通无向图, 顶点集  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 边集  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ .  $d_i$  表示图  $G$  中  $v_i$  的度, 且  $\Delta$  和  $\delta$  分别表示图  $G$  的最大顶点度和最小顶点度. 设  $A(G)$  为图  $G$  的邻接矩阵,  $D(G)$  为图  $G$  的度对角矩阵, 即  $D(G) = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ , 称矩阵  $L(G) = D(G) - A(G)$  为图  $G$  的拉普拉斯矩阵,  $Q(G) = D(G) + A(G)$  为图  $G$  的无符号拉普拉斯矩阵.  $n \times m$  阶矩阵  $I(G)$  表示  $G$  的关联矩阵, 若  $v_i$  与  $e_j$  关联, 则矩阵  $I(G)$  的  $(i, j)$  元素为 1, 否则为 0. 由文献 [2] 可知,  $I(G)I(G)' = D(G) + A(G) = Q(G)$ . 第一 Zagreb 指标  $M_1 = M_1(G)$  相当于  $G$  的顶点度的平方和, 即  $M_1 = \sum_{i=1}^n d_i^2$ .

由于  $A(G)$ 、 $L(G)$ 、 $Q(G)$  都为实对称矩阵, 因此其特征值都是实数. 设  $A(G)$  的特征值为  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ , 由于  $L(G)$  和  $Q(G)$  都是半正定的, 所以拉普拉斯特征值和无符号拉普拉斯特征值都

[收稿日期] 2014-11-16

[修回日期] 2014-12-29

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目 (11301217); 福建省自然科学基金资助项目 (2013J01014); 福建省高校新世纪优秀人才支持计划项目 (JA14168)

[作者简介] 陈毅贞 (1991—), 女, 硕士生, 从事组合图论研究. 通信作者: 徐丽琼 (1976—), 女, 副教授, 硕士生导师, 从事组合图论研究, E-mail: xuliqiong@jmu.edu.cn.

是非负的. 设  $L(G)$  的特征值为  $u_1 \geq u_2 \geq \cdots \geq u_n$ ,  $Q(G)$  的特征值为  $q_1 \geq q_2 \geq \cdots \geq q_n$ . 若  $G$  为连通的二部图, 则  $q_i > 0$ , 其中  $i = 1, 2, \cdots, n-1$  且  $q_n = 0$ <sup>[3]</sup>. 若  $G$  为连通非二部图, 则  $q_i > 0$ , 其中  $i = 1, 2, \cdots, n$ , 且有  $\sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n u_i = 2m$ .

图  $G$  的能量  $E(G)$  定义为  $A(G)$  特征值的绝对值之和<sup>[4]</sup>, 即

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|. \quad (1)$$

矩阵  $M$  的奇异特征值等于  $MM'$  的特征值的非负平方根. 图  $G$  的关联能量  $IE(G)$  定义为  $I(G)$  的奇异特征值之和<sup>[5]</sup>, 又  $I(G)I(G)' = D(G) + A(G) = Q(G)$ , 所以,

$$IE(G) = \sum_{i=1}^n \sqrt{q_i}. \quad (2)$$

Jooyandeh 等人在文献 [5] 中提出了图  $G$  关联能量的定义. 关于关联能量的一些基本性质和结论在文献 [6-8] 中给出了详细的总结.

由式 (2) 可以看出, 通过计算图的无符号拉普拉斯特征值, 可立即得到图的关联能量. 然而, 即便是对于特殊的图, 其无符号拉普拉斯特征值也不容易得到. 因此, 对一些图类, 建立上界或下界来估计这个不变量是有意义的. Das 等<sup>[7]336-338</sup> 和 Zhou<sup>[8]125-127</sup> 根据第一 Zagreb 指标分别给出关联能量的上界. Wang 等<sup>[9]</sup> 根据图的最大度  $\Delta$  给出关联能量的上界. 文献 [6-7] 还给出了一些关联能量上界和下界的估计. 本文主要考察图的关联能量的上界, 并根据  $n, m$ , 最大度, 最小度以及第一 Zagreb 指标, 给出关联能量新的上界.

## 1 主要结论

**引理 1**<sup>[10]</sup> 对于具有  $m$  条边,  $n$  个顶点的图  $G$ , 当  $G$  为正则图或  $n=2$  的任意图时, 有  $\sum_{i=1}^k q_i \leq m + \binom{k+1}{2}, k = 1, 2, \cdots, n$ .

**引理 2** (Jensen's inequality) i) 若  $f$  是定义在区间  $I$  上的上凸函数 (下凸函数), 且  $x_i \in I, i = 1, 2, \cdots, n$ , 则  $f((x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n) \geq (\leq) (f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))/n$ . 对于严格的凸函数, 上述不等式等号成立当且仅当  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ .

**定理 1** 设  $G$  为  $m$  条边,  $n$  个顶点的正则图, 则:

$$IE(G) \leq \sqrt{n \left[ m + \binom{n+1}{2} \right]}. \quad (3)$$

**证明** 由引理 1 知,  $\sum_{i=1}^n q_i \leq m + \binom{n+1}{2}$ . 由引理 2 知,  $((\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} + \cdots + \sqrt{q_n})/n) \leq (q_1 + q_2 + \cdots + q_n)/n$ . 由此可得,  $(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2} + \cdots + \sqrt{q_n})/n^2 \leq \sum_{i=1}^n q_i \leq m + \binom{n+1}{2}$ . 从而有  $\sum_{i=1}^n \sqrt{q_i} \leq \sqrt{n \left[ m + \binom{n+1}{2} \right]}$ , 所以  $IE(G) \leq \sqrt{n \left[ m + \binom{n+1}{2} \right]}$ .

下面将根据图的最大度  $\Delta$  和最小度  $\delta$  给出非正则图  $G$  的关联能量的上界.

**引理 3**<sup>[11]</sup> 设  $G$  为具有  $m$  条边,  $n$  个顶点的非正则图, 且其最大度为  $\Delta$ , 最小度为  $\delta$ , 则  $q_1 > 4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)$ .

**定理 2** 设  $G$  为具有  $m$  条边,  $n$  个顶点的非正则图, 且其最大度为  $\Delta$ , 最小度为  $\delta$ , 则

$$IE(G) < \sqrt{4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)} + \sqrt{(n-1)[2m - (4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta))]} \quad (4)$$

**证明** 首先注意到  $\sum_{i=2}^n q_i = 2m - q_1$ , 于是由引理 2 及关联能量的定义可得:

$$IE(G) = \sum_{i=2}^n \sqrt{q_i} = \sqrt{q_1} + \sum_{i=2}^n \sqrt{q_i} \leq \sqrt{q_1} + \sqrt{(n-1)(2m - q_1)}. \quad (5)$$

等式成立当且仅当  $q_2 = q_3 = \cdots = q_n$ .

考虑函数  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{(n-1)(2m-x)}$ , 其中  $x > 0$ , 其导数为:  $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) + (1-n)/(2\sqrt{(n-1)(2m-x)})$ . 可得函数  $f(x)$  的驻点为  $x = 2m/n$ , 当  $x > 2m/n$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  为单调递减函数. 由引理 3 可得  $q_1 > 4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta) > 2m/n$ . 从而由函数  $f(x)$  的单调性和式 (5) 可得,  $IE(G) \leq f(q_1) < f(4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)) = \sqrt{4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)} + \sqrt{(n-1)[2m - (4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta))]}$ . 所以, 式 (4) 成立.

接下来将用第一 Zagreb 指标来表示关联能量的上界.

**引理 4**<sup>[12]</sup> 设  $G$  为没有 1 度顶点的连通图, 其最大度为  $\Delta$ , 则  $q_1 \geq 1 + \Delta + 1/(\Delta - 1)$ , 等号成立当且仅当  $G$  为圈.

**定理 3** 设  $G$  为没有 1 度顶点的连通图, 且其最大度为  $\Delta$ , 则:

$$IE(G) \leq \sqrt{1 + \Delta + 1/(\Delta - 1)} + (n-1)^{3/4} [M_1 + 2m - (1 + \Delta + 1/(\Delta - 1))^2]^{1/4}. \quad (6)$$

等号成立当且仅当  $G \cong C_3$ .

**证明** 由  $Q(G) = D(G) + A(G)$ , 可知  $\sum_{i=1}^n q_i = \text{tr}(Q(G))$ , 从而有  $\sum_{i=1}^n q_i^2 = \text{tr}(Q^2(G))$ . 所以,

$$\sum_{i=1}^n q_i^2 = \sum_{i=1}^n d_i(d_i + 1) = M_1 + 2m. \quad (7)$$

首先考虑  $G$  是非二部图的情况. 由  $G$  是连通图可知  $q_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$ . 由引理 2 以及式 (7)

可得  $(\sum_{i=2}^n \sqrt{q_i}/(n-1))^4 \leq \sum_{i=2}^n q_i^2/(n-1) = (M_1 + 2m - q_1^2)/(n-1)$ , 从而,

$$\sum_{i=2}^n \sqrt{q_i} \leq (n-1)^{3/4} (M_1 + 2m - q_1^2)^{1/4}. \quad (8)$$

等号成立当且仅当  $q_2 = q_3 = \cdots = q_n$ . 所以  $IE(G) = \sqrt{q_1} + \sum_{i=2}^n \sqrt{q_i} \leq \sqrt{q_1} + (n-1)^{3/4} (M_1 + 2m - q_1^2)^{1/4}$ .

考虑  $G$  是二部图的情况. 由  $G$  是连通图, 可知  $q_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n-1$  且  $q_n = 0$ . 由引理 2 以及式 (7) 可得  $(\sum_{i=2}^{n-1} \sqrt{q_i}/(n-2))^4 \leq \sum_{i=2}^{n-1} q_i^2/(n-2) = (M_1 + 2m - q_1^2 - q_n^2)/(n-2)$ . 从而得到与式 (8) 不同的式子,  $\sum_{i=2}^n \sqrt{q_i} \leq (n-2)^{3/4} (M_1 + 2m - q_1^2)^{1/4} < (n-1)^{3/4} (M_1 + 2m - q_1^2)^{1/4}$ . 所以,  $IE(G) =$

$$\sqrt{q_1} + \sum_{i=2}^n \sqrt{q_i} < \sqrt{q_1} + (n-1)^{3/4} (M_1 + 2m - q_1^2)^{1/4}.$$

考虑函数  $f(x) = \sqrt{x} + (n-1)^{3/4} (M_1 + 2m - x^2)^{1/4}$ , 其导数为  $f'(x) = 1/(2\sqrt{x}) - (n-1)^{3/4}/(2(M_1 + 2m - x^2)^{3/4})$ . 可得  $f(x)$  的驻点为  $x = [(M_1 + 2m)/n]^{1/2}$ , 当  $x > [(M_1 + 2m)/n]^{1/2}$  时, 函数  $f(x)$  为单调递减函数.

因为  $n(1 + \Delta)^2 = n\Delta^2 + 2n\Delta + n > M_1 + 2m$ , 所以  $(1 + \Delta)^2 > [(M_1 + 2m)/n]^{1/2}$ , 从而  $(1 + \Delta + 1/(\Delta - 1))^2 > [(M_1 + 2m)/n]^{1/2}$ . 由引理 4 可知,  $q_1 \geq (1 + \Delta + 1/(\Delta - 1))^2 > \sqrt{(M_1 + 2m)/n}$ . 等式成立当且仅当  $G$  是圈. 从而由函数  $f(x)$  的单调性可得,  $f(q_1) \leq f(1 + \Delta + 1/(\Delta - 1)) = \sqrt{1 + \Delta + 1/(\Delta - 1)} + (n-1)^{3/4} [M_1 + 2m - (1 + \Delta + 1/(\Delta - 1))^2]^{1/4}$ .

综上所述,  $IE(G) \leq \sqrt{1 + \Delta + 1/(\Delta - 1)} + (n - 1)^{3/4} [M_1 + 2m - (1 + \Delta + 1/(\Delta - 1))^2]^{1/4}$ .

若式 (6) 中的等号成立, 则  $q_1 = 1 + \Delta + 1/(\Delta - 1)$ ,  $q_2 = q_3 = \cdots = q_n$ . 因此由引理 4 知  $G$  为圈. 已知圈  $C_n$  的无符号拉普拉斯特征值为:  $2 + 2 \cos(2\pi/n)i, i = 0, 1, 2, \cdots, n - 1$ . 由  $G$  为只有两个不同特征值的圈, 知  $G$  为  $n = 3$  的圈, 即  $G \cong C_3$ .

反之, 若  $G \cong C_3$ , 则直接运算可知不等式 (6) 等号成立.

利用定理 3 的证明方法, 可得定理 4.

**定理 4** 设  $G$  为含有  $m$  条边,  $n$  个顶点的非正则图, 其最大度为  $\Delta$ , 最小度为  $\delta$ , 且  $M_1 < 16m^2/n - 2m$ , 则  $IE(G) < \sqrt{4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)} + (n - 1)^{3/4} \sqrt{M_1 + 2m - [4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)]^2}$ .

**证明** 由定理 3 的证明过程知, 当  $x > [(M_1 + 2m)/n]^{1/2}$  时, 函数  $f(x)$  为单调递减函数. 由已知  $M_1 < 16m^2/n - 2m$ , 可得  $4m/n > [(M_1 + 2m)/n]^{1/2}$ , 从而  $4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta) > [(M_1 + 2m)/n]^{1/2}$ . 由引理 3 知,  $q_1 > 4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta) > \sqrt{(M_1 + 2m)/n}$ , 从而可得,  $f(q_1) < f(4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)) = \sqrt{4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)} + (n - 1)^{3/4} \sqrt{M_1 + 2m - [4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)]^2}$ . 所以,  $IE(G) < \sqrt{4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)} + (n - 1)^{3/4} \sqrt{M_1 + 2m - [4m/n + (\Delta - \delta)^2/(2n\Delta)]^2}$ .

### [ 参 考 文 献 ]

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications. Landon and Basingstoke: The Macmillan Press Ltd, 1976: 1-21.
- [2] CVETKOVIĆ D, ROWLINSON P, SIMIĆ S K. Signless Laplacian of finite graphs. Linear Algebra and Its Applications, 2007, 423(1): 155-171. DOI:10.1016/j.laa.2007.01.009.
- [3] MERRIS R. Laplacian matrices of graphs: a survey. Linear Algebra and Its Applications, 1994, 197(198): 143-176.
- [4] GUTMAN I. The energy of a graph. Graz Forschungszentrum Mathematisch-Statistische Sektion Berichte, 1978, 103(100/105): 1-22.
- [5] JOOYANDEH M, KIANI D, MIRZAKHAH M. Incidence energy of a graph. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2009, 62(3): 561-572.
- [6] GUTMAN I, KIANI D, MIRZAKHAH M, et al. On incidence energy of a graph. Linear Algebra and Its Applications, 2009, 431(8): 1223-1233. DOI:10.1016/j.laa.2009.04.019.
- [7] DAS K C, GUTMAN I. On incidence energy of graphs. Linear Algebra and its Applications, 2014, 446(2): 329-344. DOI:10.1016/j.laa.2013.12.026.
- [8] ZHOU B. More upper bounds for the incidence energy. MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry, 2010, 64(1): 123-128.
- [9] WANG W Z, YANG D. Bounds for incidence energy of some graphs. Journal of Applied Mathematics, 2013(2013): 1-7. DOI: 10.1155/2013/757542.
- [10] ASHRAF F, OMIDI G R, TAYFEH - REZAIE B. On the sum of signless Laplacian eigenvalues of a graph. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 438(11): 4539-4546. DOI:10.1016/j.laa.2013.01.023.
- [11] NING W J, LI H, LU M. On the signless Laplacian spectral radius of irregular graphs. Linear Algebra and its Applications, 2013, 438(5): 2280-2288. DOI:10.1016/j.laa.2012.10.024.
- [12] CVETKOVIĆ D, SIMIĆ S K. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432(9): 2257-2272.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)