[文章编号] 1007 - 7405(2016)01 - 0067 - 06

一类锥优化问题有效集序列的稳定性

李　睿，黄龙光

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 通过引入集列的单位相对紧性和函数的强收敛性，研究赋范线性空间中一类真拟锥凸映射向量优化问题有效集序列的稳定性，并利用集合序列的 Kuratowski - Painlevé 收敛性，给出向量优化问题的有效集、弱有效集及 Henig 有效集序列的收敛性及稳定性条件.

[关键词] 有效集序列；真拟锥凸；单位相对紧性；强收敛性

[中图分类号] O 224

Stability of the Sequence of Efficient Sets for a Kind of Cone Optimization Problem

LI Rui，HUANG Long-guang

(School of Science，Jimei University，Xiamen 361021，China)

Abstract: The stability of the sequence of efficient sets for a kind of proper quasiconvex cone mapping vector optimization problem in the norm linear space was studied by introducing the unit relative compactness of set sequence and the strongly convergence of function. The conditions of the convergence and stability of the sequence of the efficient set，weakly efficient set and Henig efficient set were given in the vector optimization problem by using Kuratowski-Painlevé convergence of the sequence of sets.

Keywords: sequence of efficient sets；proper quasiconvex cone；unit relative compactness；strongly convergence

0　引言

自 20 世纪 90 年代 Tanino[1] 首先研究有限维空间中多目标非线性规划的稳定性与灵敏性以来，经过二十余年的发展，各种优化问题解的稳定性理论得到了深入和广泛的研究[2-4]．Flores - Bάzan 等[5] 建立了由线性拓扑空间中锥诱导的偏序关系上的关于向量优化问题的有效性和弱有效性，它们在向量优化问题解的研究中起着重要作用．由于向量优化问题解的复杂性，人们在有效性和弱有效性的基础上，进一步拓展和弱化对解的要求，使其具有更广泛的应用．因此，各种类型的有效点应运而生．Henig[6] 引入了 Henig 有效点并建立了锥意义下 Henig 有效点的有关性质．尽管有效集的稳定性已有充分的研究，但对向量优化问题解集序列的稳定性的研究至今还不多．本文在赋范线性空间中，引入集列的单位相对紧性和函数的强收敛性，对真拟锥凸映射的向量优化问题的有效点和有效集、弱有效点和弱有效点集及 Henig 有效点和 Henig 有效集序列在 Kuratowski - Painlevé 集收敛[7] 意义下的稳

[收稿日期] 2014 - 11 - 20　　[修回日期] 2015 - 03 - 24
[基金项目] 国家自然科学基金资助项目（11461044）
[作者简介] 李睿（1991—），女，硕士生，从事应用函数分析与最优化理论研究．通信作者：黄龙光（196l—），男，教授，博士，从事应用函数分析与最优化理论研究，E-mail:hlgsj@163.com.

定性进行了研究.

1 预备知识

设 X ,Y 是赋范线性空间, P 是 Y 中的闭凸尖锥且其内部 $\mathrm{int}\,P \neq \emptyset$ ，在 Y 中引入关于锥 P 的半序：$\forall y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \leqslant_P y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in P$, $y_1 <_P y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \mathrm{int}\,P$.

设 $A \subseteq Y$ ，称 $\mathrm{Min}\,A = \{a \in A \mid (A - a) \cap (-P) = \{0\}\}$, $\mathrm{WMin}\,A = \{a \in A \mid (A - a) \cap (-\mathrm{int}\,P) = \emptyset\}$ $\mathrm{HMin}\,A = \{a \in A \mid$ 存在凸锥 P_1 ,$\mathrm{int}\,P_1 \neq \emptyset$,使得 $P \setminus \{0\} \subset \mathrm{int}\,P_1$ 和 $(A - a) \cap (-P_1) = \{0\}\}$ 分别为 A 的有效集、弱有效集和 Henig 真有效集，易知, $\mathrm{HMin}\,A \subset \mathrm{Min}\,A \subset \mathrm{WMin}\,A$.

本文总设 $f:X \to Y$, S 是 X 中的非空子集.

考虑下列约束向量优化问题

$$\min f(x),x \in S. \tag{1}$$

若 $y \in \mathrm{WMin}\,f(S)$ ($y \in \mathrm{Min}\,f(S)$,$y \in \mathrm{HMin}\,f(S)$)，则称 $y \in f(S)$ 是式（1）的弱有效点（有效点, Henig 真有效点）.

若 $f(x) \in \mathrm{WMin}\,f(S)$ ，则称 $x \in S$ 是式（1）的弱有效解. 式（1）的弱有效解集用 $\mathrm{WEff}\,(f,S)$ 表示，即 $\mathrm{WEff}\,(f,S) = \{x \in S \mid (f(S) - f(x)) \cap (-\mathrm{int}\,P) = \emptyset\}$.

用 $\mathrm{Eff}\,(f,S)$ 和 $\mathrm{HEff}\,(f,S)$ 分别表示有效解集和 Henig 真有效解集. 易知 $\mathrm{HEff}\,(f,S) \subset \mathrm{Eff}\,(f,S) \subset \mathrm{WEff}\,(f,S)$. 设 $\{S_n\}$ 是 X 的子集序列. 记: $Li\,S_n = \{y \in X \mid y = \lim_{n\to\infty} y_n, y_n \in S_n$,对于充分大的 $n\}$, $Ls\,S_n = \{y \in X \mid y = \lim_{k\to\infty} y_k, y_k \in S_{n_k}, n_k$ 是增的整数序列$\}$. 显然 $Li\,S_n \subset Ls\,S_n$.

当 $Ls\,S_n = S = Li\,S_n$ 成立时，称 $\{S_n\}$ 是依 Kuratowski – Painlevé 收敛，记为 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$ 或称 $S_n(K - P)$ 收敛于 S .

引理 1[4]519 若 $\{S_n\}$ 是闭凸集序列，且 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$ ，则 S 也是闭凸集.

定义 1 设 $f_n:X \to Y$ ($n = 1,2,3,\cdots$)，若任何收敛于 x 的点列 $\{x_n\}$ 均有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$ ，则称 $\{f_n\}$ 强收敛于 f ，记为 $f_n \to f$.

称 $0^+(S) = \{d \in X \mid a + \lambda d \in S, \forall a \in S, \forall \lambda \geqslant 0\}$ 为 S 的回收锥[4]520. 此外，若 S 是闭凸集，则 $0^+(S) = \{d \in X \mid \exists a \in S, a + \lambda d \in S, \forall \lambda \geqslant 0\}$.

定义 2[8-9] 设 S 是 X 中的非空凸子集，且：ⅰ）对 $\forall x,y \in S$, $\forall \mu \in [0,1]$ ，有 $f(\mu x + (1 - \mu)y) \leqslant_P f(x)$ 或 $f(\mu x + (1 - \mu)y) \leqslant_P f(y)$ ，则称映射 f 在 S 上是真拟锥凸；ⅱ）对 $\forall x,y \in S$, $x \neq y$, $\forall \mu \in (0,1)$ ，有 $f(\mu x + (1 - \mu)y) <_P f(x)$ 或 $f(\mu x + (1 - \mu)y) <_P f(y)$ ，则称映射 f 在 S 上是严格真拟锥凸. 每个严格真拟锥凸映射是真拟锥凸的. 对 $\forall \alpha \in Y$ ，记 $f^\alpha = \{x \in X \mid f(x) \leqslant_P \alpha\}$ ，则 f 在 S 上是真拟锥凸的当且仅当 $S \cap f^\alpha$ 是凸集.

定理 1 若问题（1）的可行集 S 是凸的, f 是严格真拟锥凸的，则 $\mathrm{WMin}\,f(S) = \mathrm{Min}\,f(S)$.

证明 已知 $\mathrm{Min}\,f(S) \subset \mathrm{WMin}\,f(S)$. 对任何 $y \in \mathrm{WMin}\,f(S)$ ，存在 $x \in \mathrm{WEff}(f,S)$ ，使 $y = f(x)$ 和

$$(f(S) - f(x)) \cap (-\mathrm{int}\,P) = \emptyset. \tag{2}$$

现证明 $y \in \mathrm{Min}\,f(S)$. 反证法，若 $y \notin \mathrm{Min}\,f(S)$ ，即 $(f(S) - f(x)) \cap (-P) \neq \{0\}$ ，于是 $\exists a \in S$, $f(a) \neq f(x)$ ，使得 $z = f(a) - f(x) \in -P \setminus \{0\}$. 由于 f 在 S 上是严格真拟锥凸的，对 $\forall \mu \in (0, 1)$ ，有

$$f(\mu a + (1 - \mu)x) <_P f(x), \tag{3}$$

或

$$f(\mu a + (1 - \mu)x) <_P f(a), \tag{4}$$

若对某些 $\mu \in (0,1)$，式（3）成立，则 $f(\mu a + (1-\mu)x) - f(x) \in -\operatorname{int} P$. 因 $a, x \in S$ 且 S 是凸集，故 $\mu a + (1-\mu)x \in S$，此与式（2）相矛盾.

若对某些 $\mu \in (0,1)$，式（4）成立，则 $f(\mu a + (1-\mu)x) - f(x) = f(\mu a + (1-\mu)x) - f(a) + z \in -\operatorname{int} P - (P \setminus \{0\}) = -\operatorname{int} P$，因 $a, x \in S$ 且 S 是凸集，故 $\mu a + (1-\mu)x \in S$，此与式（2）相矛盾.

推论 1　在定理 1 的条件下，有 $\mathrm{WEff}(f,S) = \mathrm{Eff}(f,S)$.

注 1　若 f 在凸集 S 上是连续真拟锥凸的，则 $f(S) + P$ 是凸集.

2　有效集序列的稳定性

本文讨论并建立向量优化问题的各种有效集在 Kuratowski – Painlevé 收敛意义下的收敛性条件，即当可行集序列 $\{S_n\}$ 收敛于可行集 S 且 $\{f_n\}$ 强收敛于 f 时，有 $\mathrm{WMin}\, f_n(S_n)$，$\mathrm{Min}\, f_n(S_n)$ 和 $\mathrm{HMin}\, f_n(S_n)$ 分别收敛于 $\mathrm{WMin}\, f(S)$，$\mathrm{Min}\, f(S)$ 和 $\mathrm{HMin}\, f(S)$.

定义 3　称 X 中的集列 $\{S_n\}$ 是单位相对紧的，若 $\forall x_n \in S_n (x_n \neq 0)$，$\{x_n / \|x_n\|\}$ 有收敛的子列.

例如，R^n 中的任意集列是单位相对紧的. 无限维赋范空间的单位球中的集列并非都是单位相对紧的.

引理 2　设 $\{S_n\}$ 是单位相对紧的，且 $x_n \in S_n (\forall n \in N)$，若 $\{x_n\}$ 是有界的，则 $\{x_n\}$ 有收敛的子列.

证明　若 $\{x_n\}$ 有收敛于 0 的子列，则结论成立. 由于 $\{\|x_n\|\}$ 是有界的，故数值序列 $\{\|x_n\|\}$ 有收敛的子列. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \lambda$. 因 $\{S_n\}$ 是单位相对紧的，故 $\{x_n / \|x_n\|\}$ 有收敛的子列，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n / \|x_n\|) = \bar{x}$，由 $x_n = x_n / \|x_n\| \cdot \|x_n\|$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda \bar{x}$.

类似于文献［4］，由引理 1 可得引理 3 和引理 4.

引理 3　设 $\{S_n\}$ 是 X 上的单位相对紧的闭凸集列且 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$，则：ⅰ）$\mathrm{Min}\, S \subseteq Li\ \mathrm{Min}\, S_n$；ⅱ）$\mathrm{HMin}\, S \subseteq Li\ \mathrm{HMin}\, S_n$.

引理 4　若每个 S_n 是 X 上的单位相对紧的闭凸集，且 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$，则 $Ls\ \mathrm{WMin}\, S_n \subseteq \mathrm{WMin}\, S$.

在集合序列 $\{S_n\}$ 和映射序列 $\{f_n\}$ 都收敛的条件下，则有 $f_n(S_n) + P \xrightarrow{(K-P)} f(S) + P$.

定理 2　设 $\{S_n\}$ 是 $(K-P)$ 收敛于 S 的单位相对紧的闭凸集列，f_n 在 S_n 上是真拟锥凸的（$\forall n \in N$），f 在 S 上是真拟锥凸的且 $f_n \to f$. 若 $\forall \beta \in Y$，$S \cap f^\beta \neq \varnothing$ 有 $0^+(S \cap f^\beta) = \{0\}$，则 $f_n(S_n) + P \xrightarrow{(K-P)} f(S) + P$.

证明　若 $y \in f(S) + P$，则 $\exists x \in S, d \in P$，使得 $y = f(x) + d$. 由于 $S_n \to S$，则存在 $x_n \in S_n$，使得 $x_n \to x$. 当 $f_n \to f$ 时，有 $f_n(x_n) \to f(x) = y - d$，即有 $f_n(x_n) + d \to y$，于是 $y \in Li(f_n(S_n) + P)$. 因此，$f(S) + P \subseteq Li(f_n(S_n) + P)$.

若 $y \in Ls(f_n(S_n) + P)$，则存在 $x_k \in S_{n_k}$，$y_k \in f_{n_k}(S_{n_k}) + P$ 且 $y_k \to y$，有 $y_k \in f_{n_k}(x_k) + P$，从而 $f_{n_k}(x_k) \leqslant_P y_k$. 任取 $e \in \operatorname{int} P$，由于 $y_k \to y$，故对充分大的 k，有 $y_k \leqslant_P y + e$，于是

$$f_{n_k}(x_k) \leqslant_P y + e. \tag{5}$$

对 $v \in S$，令 $\alpha = f(v)$，则 $v \in S \cap f^\alpha \neq \varnothing$. 由条件 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$，则存在 $v_k \in S_{n_k}$ 使 $v_k \to v$.

下证 $\{x_k\}$ 是有界的. 否则，不妨设 $\|x_k\| \to \infty$，因 S_n 是凸集，则对 $\forall \mu \geqslant 0$，当 k 充分大时，有 $z_k = (1 - \mu / \|x_k\|) v_k + \mu x_k / \|x_k\| \in S_{n_k}$，由 $v_k \to v$ 和 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$ 及 $\{S_n\}$ 是单位相对紧知 $\{x_n / \|x_n\|\}$ 有收敛的子列，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n / \|x_n\|) = \bar{\boldsymbol{x}}$. 于是有 $z_k \to v + \mu \bar{\boldsymbol{x}} \in S$，其中 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是 X 的单位向量. 由于 $f_n \to f$，故 $f_{n_k}(z_k) \to f(v + \mu \bar{\boldsymbol{x}})$. 因 f_{n_k} 在 S_{n_k} 上是真拟锥凸的，从而

$$f_{n_k}(z_k) \leqslant_P f_{n_k}(v_k), \tag{6}$$

或

$$f_{n_k}(z_k) \leqslant_P f_{n_k}(x_k). \tag{7}$$

若有无限多个 k 满足式（6），则当 $k \to \infty$ 时有 $f(v+\mu\bar{x}) \leqslant_P f(v)$，于是，$f(v+\mu\bar{x}) \leqslant_P \alpha$，从而对任意 $\mu \geqslant 0$，有 $v+\mu\bar{x} \in S \cap f^{\alpha}$，得出 $0 \neq \bar{x} \in 0^+(S \cap f^{\alpha}) = \{0\}$，产生矛盾.

若有无限多个 k 满足式（7），由式（5）有 $f_{n_k}(z_k) \leqslant_P y + e$，于是 $f(v+\mu\bar{x}) \leqslant_P y+e$，从而对任意 $\mu \geqslant 0$，$v+\mu\bar{x} \in S \cap f^{y+e}$，得出 $0 \neq \bar{x} \in 0^+(S \cap f^{y+e}) = \{0\}$ 的矛盾，故 $\{x_k\}$ 是有界的.

由 $\{x_n/\|x_n\|\}$ 有收敛的子列及 $\{\|x_n\|\}$ 的有界性，存在子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\{\|x_{n_k}\|\}$ 是收敛的，记 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n_k}\| = \lambda$，由 $x_{n_k}/\|x_{n_k}\| \to \bar{x}$，于是 $x_{n_k} \to \lambda\bar{x} \in S$. 由 $f_{n_k}(x_{n_k}) \leqslant_P y_k$，$y_k \to y$ 和 $f_n \to f$，可得 $f(\lambda\bar{x}) \leqslant_P y$，即 $y \in f(S) + P$. 因此，$Ls(f_n(S_n) + P) \subseteq f(S) + P$.

推论 2 在定理 2 的条件下，有 $f_n(S_n) \xrightarrow{(K-P)} f(S)$.

证明 由定理 2 可知，$f(S) \subseteq Li\, f_n(S_n)$. 设 $y \in Ls\, f_n(S_n)$，则存在 $\{y_k\}$，使得 $y_k \in f_{n_k}(S_{n_k})$ 且 $y_k \to y$，于是存在 $x_k \in S_{n_k}$，使

$$y_k = f_{n_k}(x_k). \tag{8}$$

根据定理 2 的证明过程可知，$\{x_k\}$ 是有界的. 由引理 2 知 $\{x_k\}$ 有收敛的子列，不妨设 $\{x_k\}$ 收敛于 x_0，于是 $x_0 \in S$ 且在式（8）中，当 $k \to \infty$ 时，得到 $y = f(x_0) \in f(S)$.

引理 5 在定理 2 的条件下，若 $S_n \cap f_n{}^{\beta} \neq \varnothing$，则 $\forall \beta \in Y$，有 $0^+(S_n \cap f_n{}^{\beta}) = \{0\}$.

证明 反证法，若对某个 $\beta \in Y$，存在 $\{d_n\}$，有 $d_n \in 0^+(S_n \cap f_n{}^{\beta})$，由回收锥的定义可设 $\|d_n\| = 1$，故 $\exists a \in S_n \cap f_n{}^{\beta}$ 使 $a + d_n \in S_n$. 由 $\{a + d_n\}$ 的有界性及引理 2 知 $\{a + d_n\}$ 有收敛的子列，从而 $\{d_n\}$ 有收敛的子列，故 $\exists d \in S$ 使 $d_n \to d$ 且 $\|d\| = 1$. 对 $v \in S$，令 $\alpha = f(v)$，则 $v \in S \cap f^{\alpha} \neq \varnothing$. 由 $(Y, \leqslant_P)$ 是向量格[10]，因此存在 γ，使得 $\beta \leqslant_P \gamma$ 和 $\alpha \leqslant_P \gamma$. 显然，$S \cap f^{\gamma} \neq \varnothing$. 由条件 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$，对 $\forall v \in S \cap f^{\gamma}$，存在 $v_n \in S_n$ 使 $v_n \to v$. 由条件 $f_n \to f$ 有 $f_n(v_n) \to f(v)$，于是对充分大的 n，$\forall e \in \operatorname{int} P$，有 $f_n(v_n) \leqslant_P f(v) + e \leqslant_P \gamma + e$，即 $v_n \in S_n \cap f_n{}^{\gamma+e}$. 由 $d_n \in 0^+(S_n \cap f_n^{\beta}) \subseteq 0^+(S_n \cap f_n^{\gamma+e})$，对任意 $\mu \geqslant 0$，$v_n + \mu d_n \in S_n \cap f_n{}^{\gamma+e}$，$f_n(v_n + \mu d_n) \leqslant_P \gamma + e$. 因 $v_n + \mu d_n \to v + \mu d \in S$ 且 $\|d\| = 1$，从而 $f(v + \mu d) \leqslant_P \gamma + e$. 因此，$v \in S \cap f^{\gamma} \subseteq S \cap f^{\gamma+e}$ 且 $v + \mu d \in S \cap f^{\gamma+e}$，即 $0 \neq d \in 0^+(S \cap f^{\gamma+e})$，与条件矛盾.

定理 3 设 $\{S_n\}$ 是 $(K-P)$ 收敛于 S 的紧的闭凸集列，f_n 在 S_n 上是真拟锥凸的（$\forall n \in N$），f 在 S 上是真拟锥凸的且 $\{f_n\}$ 强收敛于 f，且 $\forall \beta \in Y$，$S \cap f^{\beta} \neq \varnothing$ 有 $0^+(S \cap f^{\beta}) = \{0\}$，则：ⅰ）$\mathrm{Min}\, f(S) \subseteq Li\ \mathrm{Min}\, f_n(S_n)$；ⅱ）$\mathrm{HMin}\, f(S) \subseteq Li\ \mathrm{HMin}\, f_n(S_n)$.

证明 ⅰ）由定理 2 可知，有 $f_n(S_n) + P \xrightarrow{(K-P)} f(S) + P$. 由于 f_n 在 S_n 上是连续真拟锥凸的，据注 1 可知 $f_n(S_n) + P$ 是凸集，由引理 5 可知 $f_n(S_n) + P$ 是闭集，从而有 $f_n(S_n) + P$ 是闭凸集. 因此，由引理 3ⅰ）可知，$\mathrm{Min}\,(f(S) + P) \subseteq Li\ \mathrm{Min}\,(f_n(S_n) + P)$. 又对 Y 中任意集合 A 有 $\mathrm{Min}\,(A + P) = \mathrm{Min}\, A$，即知ⅰ）成立.

ⅱ）证明与引理 3ⅱ）相似.

推论 3 在定理 3 的条件下，且 f 在 S 上是严格真拟锥凸的，则 $\mathrm{WMin}\, f(S) \subseteq Li\ \mathrm{WMin}\, f_n(S_n)$.

证明 由定理 3 可知，$\mathrm{Min}\, f(S) \subseteq Li\ \mathrm{Min}\, f_n(S_n)$. 由定理 1，有 $\mathrm{WMin}\, f(S) \subseteq Li\ \mathrm{Min}\, f_n(S_n)$. 又对任意 A 有 $Li\ \mathrm{Min}\, A \subseteq Li\ \mathrm{WMin}\, A$，知结论成立.

定理 4 在定理 2 的条件下，若每个 S_n 是紧的，且 $\{f_n\}$ 在 S_n 中强收敛于 f，则 $Ls\ \mathrm{WMin}\, f_n(S_n) \subseteq \mathrm{WMin}\, f(S)$.

证明 由推论 2，有 $f_n(S_n) \xrightarrow{(K-P)} f(S)$. 又 S_n 是紧集且 $\{f_n\}$ 强收敛于 f，于是 $f_n(S_n)$ 是紧的.

依引理 4 知定理 4 成立.

推论 4　在定理 4 的条件下，若 f 在 S 上是严格真拟锥凸的，则 $Ls\ \mathrm{Min}\, f_n(S_n) \subseteq \mathrm{Min}\, f(S)$.

证明　据定理 1，有 $Ls\ \mathrm{Min}\, f_n(S_n) \subseteq Ls\ \mathrm{WMin}\, f_n(S_n) \subseteq \mathrm{WMin}\, f(S) = \mathrm{Min}\, f(S)$.

定理 5　在定理 2 的条件下，若 f_n 在 S_n 上是严格真拟锥凸的，则 $Ls\ \mathrm{HMin}\, f_n(S_n) \subseteq \mathrm{HMin}\, f(S)$.

证明　令 $y \in Ls\ \mathrm{HMin}\, f_n(S_n)$，则存在 $\{y_k\}$，使得 $y_k \in \mathrm{HMin}\, f_{n_k}(S_{n_k})$ 且 $y_k \to y$，即 $\exists x_k \in \mathrm{HEff}(f_{n_k}, S_{n_k})$，使得 $y_{n_k} = f_{n_k}(x_{n_k})$，推论 2 的证明过程中已证得存在 $x_0 \in S$ 使 $y = f(x_0)$ 且 $\{x_k\}$ 有收敛于 x_0 的子列.

下证 $y \in \mathrm{HMin}\, f(S)$，即有 $x_0 \in \mathrm{HEff}(f,S)$. 若 $x_0 \notin \mathrm{HEff}(f,S)$. 令 P_1 是任意的尖凸锥，使得 $P \setminus \{0\} \subset \mathrm{int}\, P_1$，则存在 $u \in S$，使得

$$0 \neq f(u) - f(x_0) \in -P_1. \tag{9}$$

因 $u \in S$ 且 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$，则存在 $\{u_k\}$，使得 $u_k \in S_{n_k}$ 且 $u_k \to u$. 令 $s_k = u_k/k + (1-1/k)x_k$. 由 S_{n_k} 是凸集知 $s_k \in S_{n_k}$ 及 $s_k \to x_0 \in S$ $(k \to \infty)$. 由 $x_k \in \mathrm{HEff}(f_{n_k}, S_{n_k})$ 有

$$f_{n_k}(s_k) - f_{n_k}(x_k) \notin -P \setminus \{0\}, \tag{10}$$

由 f_n 在 S_n 上是严格真拟锥凸的知：

$$f_{n_k}(s_k) - f_{n_k}(x_k) \in -\mathrm{int}\, \hat{P}, \tag{11}$$

或

$$f_{n_k}(s_k) - f_{n_k}(u_k) \in -\mathrm{int}\, \hat{P}, \tag{12}$$

由式（10）可知，式（11）是不成立的，故式（12）成立，当 $k \to \infty$ 时有 $f(x_0) - f(u) \in -P \subseteq -P_1$. 从而 $f(u) - f(x_0) \in P_1$，因 P_1 是尖的，故与式（9）矛盾.

定理 6　在定理 2 的条件下，设 $\{f_n\}$ 在 S_n 中强收敛于 f，则：ⅰ）若 f 在 S 上是严格真拟锥凸的，且 $S_n(\forall n \in N)$ 是紧的，有 a) $\mathrm{WMin}\, f_n(S_n) \xrightarrow{(K-P)} \mathrm{WMin}\, f(S)$，b) $\mathrm{Min}\, f_n(S_n) \xrightarrow{(K-P)} \mathrm{Min}\, f(S)$；ⅱ）若每个 f_n 在 S_n 上是严格真拟锥凸的，则 $\mathrm{HMin}\, f_n(S_n) \xrightarrow{(K-P)} \mathrm{HMin}\, f(S)$.

定理 7　在定理 2 的条件下，$\{f_n\}$ 在 S_n 中强收敛于 f，f 是 S 上的严格真拟锥凸及 S_n（$\forall n \in N$）是紧的，则：ⅰ）$\mathrm{WEff}\,(f_n, S_n) \xrightarrow{(K-P)} \mathrm{WEff}\,(f,S)$；ⅱ）$\mathrm{Eff}\,(f_n,S_n) \xrightarrow{(K-P)} \mathrm{Eff}\,(f,S)$.

证明　ⅰ）由 Kuratowski－Painlevé 收敛定义 ⅰ）等价于 $Ls\mathrm{WEff}(f_n,S_n) \subseteq \mathrm{WEff}(f,S) \subseteq Li\mathrm{WEff}(f_n,S_n)$. 对 $x_0 \in \mathrm{WEff}(f,S)$，有 $y = f(x_0) \in \mathrm{WMin}\, f(S)$. 根据定理 6 的 ⅰ）知，存在 $y_n \in \mathrm{WMin}\, f_n(S_n)$ 且 $y_n \to y$. 对 $v \in S$，令 $\alpha = f(v)$，则 $S \cap f^{\alpha} \neq \emptyset$. $\forall e \in \mathrm{int}\, P$ 及 $x_n \in S_n$，$y_n = f_n(x_n)$，n 充分大时 $f_n(x_n) \leqslant_P y + e$. 由条件 $S_n \xrightarrow{(K-P)} S$，则存在 $v_n \in S_n$ 使 $v_n \to v$. 由 $x_n \in f_n^{-1}(y_n)$，则 $x_n \in \mathrm{WEff}(f_n, S_n)$.

下证 $\{x_n\}$ 是有界的. 用反证法，不妨设 $\|x_n\| \to \infty$，则对 $\forall \mu \geqslant 0$ 以及充分大的 n，有 $z_n = (1 - \mu/\|x_n\|)v_n + \mu x_n/\|x_n\| \in S_n$，同定理 2 的证明方法，可证 $\{x_n\}$ 是有界的. 由 $\{S_n\}$ 是单位相对紧的知 $\{x_n/\|x_n\|\}$ 有收敛的子列，从而 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，记 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n_k}\| = \lambda$，$x_{n_k}/\|x_{n_k}\| \to \bar{x}$，于是 $x_{n_k} \to \lambda\bar{x} \in S$. 由 $f_n(x_n) = y_n \to y$ 和 $f_n \to f$，有 $f(\lambda\bar{x}) = y$，令 $\hat{x} = \lambda\bar{x}$，即 $f(\hat{x}) = y$.

下证 $\hat{x} = x_0$. 若 $\hat{x} \neq x_0$. 由 f 在 S 上是严格真拟锥凸的及 $f(x_0) = y = f(\hat{x})$ 知，对 $0 < \mu < 1$，$f(\mu x_0 + (1-\mu)\hat{x}) <_P y$，此与 $y \in \mathrm{WMin}\, f(S)$ 矛盾，故 $\hat{x} = x_0$. 即 $\{x_n\}$ 中的每个收敛的子列均收敛于 x_0，故 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0，从而 $x_0 \in Li\mathrm{WEff}(f_n,S_n)$，由此可得 $\mathrm{WEff}(f,S) \subseteq Li\mathrm{WEff}(f_n,S_n)$.

若 $x_0 \in Ls\mathrm{WEff}(f_n,S_n)$，则存在 $x_k \in \mathrm{WEff}(f_{n_k}, S_{n_k})$ 使 $x_k \to x_0$. 由 $\mathrm{WMin}\, f_n(S_n) \xrightarrow{(K-P)} \mathrm{WMin}\, f(S)$ 知 $f_{n_k}(x_k) \to f(x_0) \in \mathrm{WMin}\, f(S)$. 从而 $x_0 \in \mathrm{WEff}(f,S)$，即有 $LsWEff\,(f_n,S_n) \subseteq \mathrm{WEff}(f,S)$.

ⅱ）同理可证.

类似于上述定理，有下列的关于真有效集的收敛定理 8.

定理 8 在定理 6 的ⅱ）条件下，若 f 在 S 上是严格真拟锥凸的，则 HEff $(f_n, S_n) \xrightarrow{(K-P)}$ HEff (f, S) .

[参考文献]

[1] TANINO T. Stability and sensitivity analysis in multiobjective nonlinear programming. Ann Oper Res, 1990, 27: 97-114. DOI:10.1007/BF02055192.

[2] ATTOUCH H, RIAHI H. Stability results for Ekeland's ε-variational principle and cone extreme solution. Math Methods Oper Res, 1993, 18: 173-201. DOI:10.1287/moor.18.1.173.

[3] LALITHA C S, CHATTERJEE P. Stability for properly quasiconvex vector optimization problem. Optim Theory Appl, 2012, 155: 492-506. DOI:10.1007/S10957-012-0079-5.

[4] LUCCHETTI R E, MIGLIERINA E. Stability for convex vector optimization problems. Optimization, 2004, 53: 517-528. DOI:10.1080/02331930412331327166.

[5] FLORES-BÁZAN F, VERA C. Unifying efficiency and weak efficiency in generalized quasiconvex vector minimization on the real-line. Int J Optim Theory Method Appl, 2009(1): 247-265.

[6] HENIG M I. Proper efficiency with respect to cones. Optim Theory Appl, 1982, 36: 387-407. DOI: 10.1007/BF00934353.

[7] ROCKAFELLAR R T, WETS R J. Variational analysis. Berlin: Springer, 1998. DOI:10.1007/978-3-642-02431-3.

[8] TANAKA T. Generalized quasiconvexities, cone saddle points, and minimal theorem for vector-valued functions. Optim Theory Appl, 1994, 81: 355-377. DOI:10.1007/BF02191669.

[9] KIMURA K, YAO J C. Sensitivity analysis of vector equilibrium problems. Taiwanese J Math, 2008, 12(3): 649-669.

[10] 孙经先. 非线性泛函分析及其应用. 北京: 科学出版社, 2008: 82-83.

（责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤）