[文章编号] 1007－7405(2016)02－0153－03

关于对称稳定过程逗留测度的一个注记

郑水草

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 修正文献［1］中的一个基础性结果的证明，从而使得该文将稳定从属过程推广到对称稳定过程的重分形结构结果得以成立。同时，讨论并给出了关于逗留测度的下局部维数的重分形问题结果。

[关键词] 对称稳定过程；逗留测度；小球概率；重分形

[中图分类号] O 211.6

A Note on the Occupation Measures of Symmetric Stable Processes

ZHENG Shui-cao

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: A fundamental lemma is reproved to solve a proof gap in reference [1]. Also, some results on the lower local dimension of the occupation measures are given. So the results of multifractal structure of stable subordinator processes are generalized to that of the symmetric stable processes.

Keywords: symmetric stable process; occupation measure; probability of small ball; multifractal

0 引言

在文献［1］中，倪文清试图将 HU 等人[2]的关于稳定从属过程的重分形结构成果推广到对称稳定过程上来。因此，他首先建立了“一个重要引理”。然而，由于文献［1］作者在证明该引理时，存在一个本质错误，参见下面的命题注解 1。因此，为了使得其推广得以成立，笔者重新证明了该引理，修正了其证明漏洞，使其工作有可靠的基础。另外，本文进一步讨论了对称 stable 过程的逗留时测度的下局部维数的重分形问题，这些结论充实了文献［1］的定理 3，从而，完整地将文献［2］关于稳定从属过程的重分形成果推广到对称稳定过程上。

首先，把需要用到的一些其他文献的结果以如下的引理形式给出。

引理 1[3]　设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha<d)$ 的对称 stable 过程。则存在常数 $0<c_1(\alpha,d)<\infty$，使得当 $K\to\infty$ 时，$P\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|X_s|\geqslant K\}\leqslant c_1(\alpha,d)P\{|X_1|\geqslant K/d\}$。

引理 2[4]　设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha<2)$ 的对称 stable 过程。则存在常数 $0<c_2(\alpha,d)\leqslant c_3(\alpha,d)<\infty$，使得当 $K\to\infty$ 时，$c_2(\alpha,d)K^{-\alpha}\leqslant P\{|X_t|\geqslant Kt^{1/\alpha}\}=P\{|X_1|\geqslant K\}\leqslant c_3(\alpha,d)K^{-\alpha}$。

引理 3[5]　设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha<d)$ 的对称 stable 过程。并设 $|x|>r>0$，则存在有限的常数 $0<c_4(\alpha,d)<c_5(\alpha,d)<\infty$，使得 $c_4(\alpha,d)[1/(|x|+r)]^{d-\alpha}\leqslant P\{|X_t|<r,\exists t>0\}\leqslant c_5(\alpha,d)[1/(|x|-r)]^{d-\alpha}$。

[收稿日期] 2015－04－21　　[修回日期] 2015－08－01
[作者简介] 郑水草（1973—），男，副教授，博士，从事随机过程与随机分形研究。

1 结果

下面，给出并证明主要结果。

命题 1 设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha<d)$ 的对称 stable 过程。则存在常数 $0<c_6(\alpha,d)\leqslant c_7(\alpha,d)<\infty$，使得当 r 充分小时，有：

$$c_6(\alpha,d)r\leqslant P\{\mu_\infty^X(B(0,\varepsilon))\leqslant r\varepsilon^\alpha\}\leqslant c_7(\alpha,d)r\ 。\tag{1}$$

注 1 本命题在文献［1］中叙述为“一个重要的引理”。然而，由于文献［1］作者在证明该引理当中，存在一个本质证明错误（参见下面给出的证明中的第一个不等式，其中，在文献［1］中，作者给的是等式，这显然是错误的）。因此，本质上他只证明了式（1）的右边不等式。为完整起见，将整个命题的完整证明都包含进来。

证明 如未特殊声明，本文仍采用文献［1］的符号系统。先考察文献［1］式（1）右边不等式。由对称 stable 过程 $\{X_t\}$ 的 scaling 性质知，$\{\varepsilon^{-1/\alpha}X_{\varepsilon t}\}$ 与 $\{X_t\}$ 同分布，因此，$P\{\mu_\infty^X(B(0,\varepsilon))\leqslant r\varepsilon^\alpha\}=P\{\int_0^\infty I_{\{|X|<\varepsilon\}}\mathrm{d}t\leqslant r\varepsilon^\alpha\}=P\{\int_0^\infty I_{\{|X|<1\}}\mathrm{d}t\leqslant r\}\leqslant P\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant r}|X_s|\geqslant 1\}=P\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|X_s|\geqslant r^{-1/\alpha}\}$．因此，利用引理 1 和引理 2 可得，当 $r>0$ 充分小时，$P\{\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant 1}|X_s|\geqslant r^{-1/\alpha}\}\leqslant c_1(\alpha,d)P\{|X_1|\geqslant r^{-1/\alpha}/d\}\leqslant c_1(\alpha,d)c_3(\alpha,d)d^\alpha r=c_7(\alpha,d)r$ 。

接下来，考虑文献［1］的式（1）左边不等式。对于（待定的）$k_0\geqslant 3$，当 $r>0$ 充分小时，$P\{\int_0^\infty I_{\{|X|<1\}}\mathrm{d}t\leqslant r\}\geqslant P\{\inf\limits_{r\leqslant s<\infty}|X_s|\geqslant 1\}\geqslant P\{|X_r|\geqslant k_0\}-P\{\{|X_t|<1,\exists t>r\};|X_r|\geqslant k_0\}=P\{|X_r|\geqslant k_0\}-\int_{|y|\geqslant k_0}P_y\{|X_t|<1,\exists t>0\}P\{X_r=y\}\mathrm{d}y\geqslant(1-c_5(\alpha,d)(1/(k_0-1))^{d-\alpha})P\{|X_r|\geqslant k_0\}=(1-c_5(\alpha,d)(1/(k_0-1))^{d-\alpha})P\{|X_1|\geqslant k_0r^{-1/\alpha}\}\geqslant(1-c_5(\alpha,d)(1/(k_0-1))^{d-\alpha})c_1(\alpha,d)k_0^{-\alpha}r=c_6(\alpha,d)r$．其中，第三个不等式利用了引理 3，最后一个不等式利用了引理 2，而 k_0 的选择只要满足 $c_5(\alpha,d)(1/(k_0-1))^{d-\alpha}<1$ 即可，而这显然可以让 $k_0(k_0\geqslant 3)$ 适当大即可做到。命题证明完毕。

命题 1 的结论直观上称为关于逗留测度的小球概率估计。利用命题 1，即可获得逗留测度的上局部维数的重分形谱分解，具体可参见文献［1］中定理 1 的证明。关于它的进一步应用，可参见文献［6］。可见，小球概率估计是获得随机过程的厚点（上极限类型的）重分形谱的一个重要工具。下面，本文将进一步探讨逗留测度的下局部维数的重分形问题。为此，先给出引理 4。

引理 4[4] 设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha<d)$ 的对称 stable 过程。则存在正常数 $c_8(\alpha,d)$，使得：$\lim\limits_{t\to 0+}\inf\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}|X_\tau|/[t^{1/\alpha}/(\log\log(1/t))^{1/\alpha}]=c_8(\alpha,d)$，a. s. 。

由引理 4 以及对称 stable 过程的平稳增量性，即 $\forall 0\leqslant s<\infty\ \{X_{s+\tau}-X_s\}$ 与 $\{X_\tau\}$ 具有相同的分布，有：对于所有的 $s\in[0,\infty)$，$\lim\limits_{t\to 0+}\inf\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant t}|X_{s+\tau}-X_s|/[t^{1/\alpha}/(\log\log(1/t))^{1/\alpha}]=c_8(\alpha,d)$，a. s. 。因此，可得到推论 1。

推论 1 设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha<d)$ 的对称 stable 过程。则存在正常数 $c_8(\alpha,d)$，使得，对于所有的 $s\in[0,\infty)$，总成立：$\lim\limits_{t\to 0+}\inf(X_{s+t}-X_s)/[t^{1/\alpha}/(\log\log(1/t))^{1/\alpha}]\leqslant c_8(\alpha,d)$，a. s. 。

另外，对于任意给定的 $t_0>0$，令 $Y_t=X_{t_0}-X_{t_0-t},0\leqslant t\leqslant t_0$，则由对称 stable 过程的独立增量性质知，$\{Y_t\}$ 是 $\{X_t\}$ 的另一个版本，且它与 $X_t,t\geqslant t_0$ 相互独立。因此，有推论 2。

推论 2 设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha<d)$ 的对称 stable 过程。则存在正常数 $c_8(\alpha,d)$，使得，对于所有的 $s\in[0,\infty)$，总成立：$\lim\limits_{t\to 0+}\inf(X_s-X_{s-t})/[t^{1/\alpha}/(\log\log(1/t))^{1/\alpha}]\leqslant c_8(\alpha,d)$，a. s. 。

为了将上述随机过程的增量性质转化为关于逗留测度的性质，本文需要一个分析引理 5。

引理 5 设 $\phi(t)=t^{1/\alpha}/(\log\log(1/t))^{1/\alpha}$，$t>0$，$\varphi(s)=s^\alpha\log\log(1/s),s>0$ 。则：$\phi(\varphi(s))\sim$

$s, s \to 0+$，且 $\psi(\phi(t)) \sim t, t \to 0+$。

证明　由 ϕ 和 ψ 的定义：$\phi(\psi(s))/s = \phi(s^{\alpha}\log\log(1/s))/s = s(\log\log(1/s))^{1/\alpha}/(\log\log s^{-\alpha} - \log\log\log\log s^{-1})^{1/\alpha}/s = \{1/[1+(\log\alpha/\log\log(1/s)) - (\log\log\log\log s^{-1}/\log\log(1/s))]\}^{1/\alpha} \to 1$，当 $s \to 0+$，即 $\phi(\psi(s)) \sim s, s \to 0+$。同理可证：$\phi(\psi(t)) \sim t, t \to 0+$。因此，在该引理结论意义下，$\phi(t)$ 和 $\psi(s)$ 二者渐进地（$t, s \to 0$）互为反函数。

设 $x_0 = X_{t_0}$，并记 $\mu(x_0, x_0 + r) \triangleq \int_{t_0}^{\infty} I_{\{|X_{t+t_0} - X_{t_0}| \leqslant r\}}(t)\,\mathrm{d}t$ 为过程从 x_0 出发，在球 $B(x_0, r)$ 内的逗留测度。由引理 5 知，推论 1 等价于：对于任意的 $x \in \operatorname{supp}\mu$，有 $\limsup_{r\to0+}\{\mu(x, x+r)/[r^{\alpha}\log\log(1/r)]\} \geqslant c_8(\alpha, d)$, a. s.。从而，对于任意的 $x \in \operatorname{supp}\mu$，关于原过程 $\{X_t\}$ 的逗留测度 $\mu(B(x, r)) = \int_{t_0}^{\infty} I_{\{|X_{t+t_0} - X_{t_0}| \leqslant r\}}(t)\,\mathrm{d}t$，有 $\limsup_{r\to0+}\{\mu(B(x,r))/[r^{\alpha}\log\log(1/r)]\} \geqslant c_8(\alpha, d)$, a. s.。从而，存在单调下降趋向于 0 的子列 $\{r_n\}$，使得对于给定的 $\varepsilon \in (0, c_8(\alpha, d))$，总存在 $\delta(\omega) > 0$，当 $r_n < \delta(\omega)$ 时，$\mu(B(x, r_n)) \geqslant (c_8(\alpha, d) - \varepsilon) r_n^{\alpha}\log\log(1/r_n)$。因此，$\log\mu(B(x, r_n)) \geqslant \log\{(c_8(\alpha, d) - \varepsilon) r_n^{\alpha}\log\log(1/r_n)\}$。整理得：$\log\mu(B(x, r_n))/\log r_n \leqslant \alpha + \log(c_8(\alpha, d) - \varepsilon)/\log r_n + \log\log(1/r_n)/\log r_n$。此即证明了：对于任意的 $x \in \operatorname{supp}\mu$，总成立 $\liminf_{r\downarrow0+}[\log\mu(B(x, r))/\log r] \leqslant \alpha$, a. s.。

综合上述，本文给出第二个主要结论，即命题 2。

命题 2　设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha < d)$ 的对称 stable 过程，$\mu(\cdot)$ 为该过程的逗留测度，则对于任意的 $x \in \operatorname{supp}\mu$，总成立：$\liminf_{r\downarrow0+}[\log\mu(B(x, r))/\log r] = \alpha$, a. s.。

证明　由文献［1］定理 3 知：$\liminf_{r\downarrow0+}[\log\mu(B(x, r))/\log r] \geqslant \alpha$, a. s.。再结合上面得到的结论即知本命题成立。

注 2　命题 2 说明了关于对称 stable 过程的下局部维数没有例外集的重分形谱分解，见下面的推论 3。另外，它与文献［1］的定理 1 和定理 2 一起，完整地将 HU 等人[2]的关于稳定从属过程的重分形结构成果推广到对称 stable 过程上来。

推论 3　设 $\{X_t\}$ 是取值于 $\mathbf{R}^d$ 上的指标为 $\alpha(\alpha < d)$ 的对称 stable 过程，$\mu(\cdot)$ 为该过程的逗留测度，则对于任意的 $x \in \operatorname{supp}\mu$，总成立：1）当 $\beta < \alpha$ 时，$\lim_{r\downarrow0+}[\mu(B(x, r))/r^{\beta}] = 0$, a. s.；2）当 $\beta > \alpha$ 时，$\limsup_{r\downarrow0+}[\mu(B(x, r))/r^{\beta}] = \infty$, a. s.。

［参考文献］

［1］倪文清．暂留对称 stable 过程逗留测度的重分形结构．集美大学学报（自然科学版），2007，12(1)：85-90.

［2］HU X Y，TAYLOR S J．The multifractal structure of stable occupation measure．Stochastic Processes and Their Application，1997，66(2)：283-299．DOI：10.1016/S0304-4419(97)00127-0.

［3］EHM W．Sample function properties of multi-parameter stable processes．Z Wahrsch Verw Gebietes，1981，56：195-228．DOI：10.1007/BF00535741.

［4］TAYLOR S J．Sample path properties of a transient stable process．Journal of Mathematics and Mechanics，1967，16：1229-1246．DOI：10.1512/iumj.1967.16.16081.

［5］TAKEUCHI J．On the sample paths of the symmetric stable processes in spaces．J Math Soc Japan，1964，16：109-127.

［6］DEMBO A，PERES Y，ROSEN J，et al．Thick points for spatial Brownian motion：multifractal analysis of occupation measure．Ann Prob，2000，28(1)：1-35.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）