

食饵具有偏利合作关系的捕食-食饵系统的定性分析

李石英, 张树文

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 考虑了一个包含偏利关系的三种群捕食-食饵系统, 给出其正平衡态与边界平衡态存在的条件, 并通过构造适当的李雅普诺夫函数得到正平衡态与边界平衡态全局渐近稳定的充分条件。

[关键词] 捕食-食饵系统; 平衡态; 局部稳定; 全局渐近稳定

[中图分类号] O 175.13

Qualitative Analysis of a Three-species Predator-prey System with Partial Benefit Relationship of Prey

LI Shi-ying, ZHANG Shu-wen

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: A three-species predator-prey system with partial benefit relationship was considered. The conditions of the existence of the equilibrium were given. By constructing some suitable Liapunov functions, the sufficient conditions of the global asymptotic stability of the positive equilibrium and boundary equilibrium were obtained.

Keywords: predator-prey system; equilibrium solution; local stability; global asymptotic stability

0 引言

合作系统是重要的种群生态系统, 有很多学者对合作系统的动力学行为进行了大量的研究, 并获得了丰富的研究成果^[1-4], 但是对于偏利合作种群模型的研究还是较少的^[5-6]。文献[5]提出了一方不能独立生存的两种群偏利合作的自治系统, 模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_1 - b_1x + c_1y), \\ \dot{y} = y(a_2 - c_2y). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 为种群 x 在 t 时刻的种群密度; $y(t)$ 为种群 y 在 t 时刻的种群密度; 常系数 $a_1 < 0$ 为种群 x 的死亡率; $a_2 > 0$ 为种群 y 的增长率; 常系数分别为种群 x 和种群 y 的密度制约系数; 常系数 $c_1 > 0$ 代表种群 y 对种群 x 的偏惠系数。祝占法等^[5]主要研究了系统(1)的各个平衡点的稳定性和系统轨线的走向问题。沈柠等^[7]考虑了具有相互干扰的捕食-食饵系统, 模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - a_1x - exy^\theta), \\ \dot{y} = y(r_2 - ley)/(k+x). \end{cases} \quad (2)$$

[收稿日期] 2015-06-24

[修回日期] 2015-09-14

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(31272653, 11301216)

[作者简介] 李石英(1989—), 女, 硕士生, 从事生物数学方向研究。通信作者: 张树文(1963—), 男, 教授, 硕导, 从事生物数学方向研究, E-mail: anzsw_123@163.com。

其中: $x(t)$ 为种群 x 在 t 时刻的种群密度; $y(t)$ 为种群 y 在 t 时刻的种群密度; 系数 $r_1 > 0, r_2 > 0, a_1 > 0, e > 0, l > 0$ 均为常数, 且 $k > 0$ 为第二个种群的最大环境容纳量; $\theta > 0$ 为捕食者之间的相互干扰系数。本文主要研究了在捕食者之间存在相互干扰情况下系统解的非负性、有界性、局部稳定性和全局渐近稳定性。因为在自然界中种群间的关系是比较复杂的, 纯粹的两种群关系是很难存在的。结合系统 (1) 和系统 (2), 笔者建立了具有偏利合作关系和捕食关系的三种群捕食-食饵混合系统, 模型如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) [r_1 - a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)], \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) [r_2 - a_{22}x_2(t) - \alpha y(t)], \\ \dot{y}(t) = y(t) \{r_3 - \beta y(t) / [k + x_2(t)]\}. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示种群 x_1 , x_2 和 y 在 t 时刻的种群密度; $r_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 表示种群的内禀增长率; $a_{11} > 0, a_{22} > 0$ 和 $\beta > 0$ 分别表示种群的密度制约系数; $a_{12} > 0$ 表示种群 x_2 对种群 x_1 的偏惠系数; $k > 0$ 表示捕食者的最大环境容纳量。

1 系统 (3) 解的有界性

定理 1 若对于系统 (3) 的任何初始值 $x_1(t_0) > 0, x_2(t_0) > 0, y(t_0) > 0$ 都成立, 则对其任意解 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$, 均有 $x_1(t) > 0, x_2(t) > 0, y(t) > 0$ 对于任意 $t \geq 0$ 成立。

证明 对系统 (3) 中的三个微分方程左右两边同时取积分得:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t [r_1 - a_{11}x_1(\tau) + a_{12}x_2(\tau)] d\tau \right\}, \\ x_2(t) = x_2(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t [r_2 - a_{22}x_2(\tau) - \alpha y(\tau)] d\tau \right\}, \\ y(t) = y(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t [r_3 - \beta y(\tau) / (k + x_2(\tau))] d\tau \right\}. \end{cases} \quad (4)$$

考虑式 (4) 中的第一个等式, 由于 $x_1(t_0) > 0, \exp \left\{ \int_{t_0}^t [r_1 - a_{11}x_1(\tau) + a_{12}x_2(\tau)] d\tau \right\} > 0$, 所以, 对于任意 $t \geq 0$, 都有 $x_1(t) > 0$ 。同理, 由式 (4) 的第二和第三个等式可得到 $x_2(t) > 0, y(t) > 0$ 均成立, 证毕。

定理 2 令 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), y(t))$ 为系统 (3) 的任意解, 则存在与 t 无关的正常数 M_1, M_2, M_3 , 使得 $0 < x_1(t) < M_1, 0 < x_2(t) < M_2, 0 < y(t) < M_3$ 均成立。

证明 考虑系统 (3) 中的第二个等式, 由定理 1 知 $y(t) > 0$, 且常系数 $\alpha > 0$, 则 $\alpha y(t) > 0$, 因此有 $x_2(t)(r_2 - a_{22}x_2(t) - \alpha y(t)) \leq x_2(t)(r_2 - a_{22}x_2(t))$ 成立, 则可依据文献 [8] 构造比较系统

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = v(t)(r_2 - a_{22}v(t)), \\ v(t_0) = x_2(t_0). \end{cases} \quad (5)$$

对式 (5) 求解可得

$$v(t) = r_2 v(t_0) / [a_{22}v(t_0) + (r_2 - a_{22}v(t_0)) \exp(-r_2 t)], \quad (6)$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对式 (6) 两边同时取极限, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = r_2 / a_{22}$, 令 $M_2 = r_2 / a_{22}$, 因此存在 $T_1 > 0$, 当 $t > T_1$ 时, 由比较定理可知

$$x_2(t) < M_2 \quad (7)$$

成立。

考虑系统 (3) 中的第一个等式并运用不等式 (7) 可得: $x_1(t)[r_1 - a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t)] \leq x_1(t)[r_1 - a_{11}x_1(t) + r_2 / a_{22}]$, 类似式 (5) 可构造比较系统

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = u(t)[r_1 - a_{11}u(t) + r_2 / a_{22}], \\ u(t_0) = x_1(t_0). \end{cases} \quad (8)$$

对式 (8) 求解可得: $u(t) = (r_1 + a_{12}r_2/a_{22})u(t_0)/[a_{11}u(t_0) + (r_1 + a_{12}r_2/a_{22} - a_{11}u(t_0))\exp(-r_1t - a_{12}r_2/a_{22}t)]$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对上式两边同时取极限, 可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = (a_{22}r_1 + a_{11}r_2)/(a_{11}a_{22})$, 令 $M_1 = (a_{22}r_1 + a_{11}r_2)/(a_{11}a_{22})$, 因此存在 $T_2 > 0$, 当 $t > T_2$ 时, 有 $x_1(t) < M_1$ 成立。

考虑系统 (3) 中的第 3 个等式并运用不等式 (7), 有: $y(t)(r_3 - \beta y(t)/(k + x_2(t))) < y(t)(r_3 - \beta y(t)/(k + r_2/a_{22}))$, 与式 (5) 类似, 构造比较系统

$$\begin{cases} \dot{\omega}(t) = \omega(t)[r_3 - \beta\omega(t)/(k + r_2/a_{22})], \\ \omega(t_0) = y(t_0). \end{cases} \quad (9)$$

对式 (9) 求解可得: $\omega(t) = r_3\omega(t_0)/[\beta\omega(t_0)/(k + r_2/a_{22}) + (r_3 - \beta\omega(t_0)/(k + r_2/a_{22}))\exp(-r_3t)]$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对上式两边同时取极限有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = (r_3a_{22}k + r_2)/(a_{22}\beta)$, 令 $M_3 = (r_3a_{22}k + r_2)/(a_{22}\beta)$, 因此存在 $T_3 > 0$, 当 $t > T_3$ 时, 有 $y(t) < M_3$ 成立。再根据定理 1 可知 $0 < x_1(t) < M_1$, $0 < x_2(t) < M_2$, $0 < y(t) < M_3$ 均成立, 证毕。

2 平衡态的局部稳定性

根据系统 (3) 易解得其有 7 个边界平衡态, 分别为: $O(0,0,0)$, $A(0, (r_2\beta - \alpha r_3 k)/(\alpha r_3 + a_{22}\beta), (r_2r_3 + r_3a_{22}k)/(\alpha r_3 + a_{22}\beta))$, $B(r_1/a_{11}, 0, r_3k/\beta)$, $C((a_{22}r_1 + a_{12}r_2)/a_{11}a_{12}, r_2/a_{22}, 0)$, $D(0,0, r_3k/\beta)$, $E(0, r_2/a_{22}, 0)$, $F(r_1/a_{11}, 0, 0)$ 。当 $r_2\beta > \alpha r_3 k$ 时, 系统 (3) 有正平衡态 $G(x_1^*, x_2^*, y^*)$ 存在且唯一, 其中: $x_1^* = r_1/a_{11} + a_{12}(r_2\beta - \alpha r_3 k)/(\alpha r_3 + a_{22}\beta)$, $x_2^* = (r_2\beta - \alpha r_3 k)/(\alpha r_3 + a_{22}\beta)$, $y^* = (r_2r_3 + a_{22}r_3k)/(\alpha r_3 + a_{22}\beta)$ 。

定理 3 1) 系统 (3) 的平衡态 O 是不稳定的结点, 平衡态 C 为包含一个二维稳定流形和一个一维不稳定流形的鞍点, 平衡态 E 和平衡态 F 均为包含一个一维稳定流形和一个二维不稳定流形的鞍点; 2) 当 $r_2\beta > \alpha r_3 k$, 平衡态 A 和平衡态 D 均为包含一个一维稳定流形和一个二维不稳定流形的鞍点, 平衡态 B 为包含一个一维不稳定流形和一个二维稳定流形的鞍点; 3) 当 $r_2\beta < \alpha r_3 k$, 平衡态 D 为包含一个一维不稳定流形和一个二维稳定流形的鞍点。

证明 设系统 (3) 的右端部分的雅克比矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} r - 2a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{12}x_1 & 0 \\ 0 & r_2 - 2a_{22}x_2 - \alpha y & -\alpha x_2 \\ 0 & \beta y^2/(k + x_2)^2 & r_3 - 2\beta y/(k + x_2) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

由式 (10) 可得其对应的特征方程为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - r + 2a_{11}x_1 - a_{12}x_2 & -a_{12}x_1 & 0 \\ 0 & \lambda - r_2 + 2a_{22}x_2 + \alpha y & \alpha x_2 \\ 0 & -\beta y^2/(k + x_2)^2 & \lambda - r_3 + 2\beta y/(k + x_2) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

1) 根据式 (11) 考虑平衡态 O 对应的特征方程为

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - r_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - r_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - r_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (12)$$

求解式 (12) 可得 $\lambda_j = r_j > 0 (j = 1, 2, 3)$, 则平衡态 O 是不稳定的结点。同理, 可得平衡态 C 对应的特征方程为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + r_1 + a_{12}r_2/a_{22} & -a_{12}(a_{22}r_1 + a_{12}r_2)/(a_{11}a_{22}) & 0 \\ 0 & \lambda + r_2 & \alpha r_2/a_{22} \\ 0 & 0 & \lambda - r_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (13)$$

求解式 (13) 可得: $\lambda_1 = -r_1 - a_{12}r_2/a_{22} < 0$, $\lambda_2 = -r_2 < 0$, $\lambda_3 = r_3 > 0$, 则平衡态 C 为包含一个二维稳定流形和一个一维不稳定流形的鞍点。同理, 可得平衡态 E 对应的特征方程为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - r_1 - r_2 a_{12}/a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + r_2 & \alpha r_2/a_{22} \\ 0 & -r_3^2/\beta & \lambda + r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

(14)

求解式 (14) 可得: $\lambda_1 = r_1 + r_2 a_{12}/a_{22}$, $\lambda_2 + \lambda_3 = -(r_2 + r_3)$, $\lambda_2 \lambda_3 = r_2 r_3 + \alpha r_2 r_3^2/(a_{22} \beta)$, 显然 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 + \lambda_3 < 0$, $\lambda_2 \lambda_3 > 0$, 则 λ_2 和 λ_3 均为负数, 所以平衡态 E 为包含一个一维不稳定流形和一个二维稳定流形的鞍点。同理可得, 平衡态 F 为包含一个一维稳定流形和一个二维不稳定流形的鞍点。

对于 2)、3) 中的各平衡态稳定性的证明与 1) 类似, 此处省略。

定理 4 当 $r_2 \beta < \alpha r_3 k$ 时, 系统 (4) 的平衡态 C 是局部稳定的。

证明 根据式 (11) 考虑平衡态 C 对应的特征方程为:

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda + r_1 & -a_{12}r_1/a_{11} & 0 \\ 0 & \lambda - r_2 + \alpha r_3 k/\beta & 0 \\ 0 & -r_3^2/\beta & \lambda + r_3 \end{vmatrix} = 0,$$

(15)

求解式 (15) 可得: $\lambda_1 = -r_1 < 0$, $\lambda_2 = r_2 - \alpha r_3 k/\beta$, $\lambda_3 = -r_3 < 0$, 易知当 $r_2 \beta > \alpha r_3 k$ 时, $\lambda_2 > 0$, 则平衡态 C 为包含一个一维不稳定流形和一个二维稳定流形的平衡点; 当 $r_2 \beta < \alpha r_3 k$ 时, $\lambda_2 < 0$, 则平衡态 C 是局部渐近稳定的。

引理 1^[8] (Hurwitz 判据) 考虑多项式方程 $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$, 所有根

具有负实部的充要条件是: $H_k =$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_k \end{vmatrix} > 0, k = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 $j > n$ 时, 补充定义

$a_j = 0$ 。

定理 5 当 $r_2 \beta > \alpha r_3 k$ 时, 系统 (3) 的正平衡态 $G(x_1^*, x_2^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的。

证明 考虑正平衡态 $G(x_1^*, x_2^*, y^*)$ 对应的特征方程为: $|\lambda E - A| =$

$$\begin{vmatrix} \lambda + r_1 + a_{12}x_2^* & -a_{12}(r_1 + a_{12}x_2^*)/a_{11} & 0 \\ 0 & \lambda - r_2 + r_3 \alpha k/\beta + (2a_{22} + \alpha r_3/\beta)x_2^* & \alpha x_2^* \\ 0 & -r_3^2/\beta & \lambda + r_3 \end{vmatrix} = \lambda^3 + [r_1 + r_3 + (a_{12} + a_{22})x_2^*]\lambda^2 +$$

$\lambda[(r_1 + a_{12}x_2^*)(r_3 + a_{22}x_2^*) + r_2 r_3 - \alpha k r_3^2/\beta] + (r_1 + a_{12}x_2^*)(r_2 r_3 - \alpha k r_3^2/\beta) = 0$ 。当 $r_2 \beta > \alpha r_3 k$ 时, 令 $A = r_1 + a_{12}x_2^* > 0$, $B = r_3 + a_{22}x_2^* > 0$, $C = r_2 r_3 - \alpha k r_3^2/\beta > 0$, 则通过计算可知: $a_1 = A + B > 0$,

$a_2 = AB + C > 0$, $a_3 = AC > 0$ 。进而可知 $H_1 = a_1 = A + B > 0$, $H_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 =$

$$A^2 B + AB^2 + BC > 0, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ 1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = AC(A^2 B + AB^2 + BC) > 0,$$

则根据引理 1 可知, 正平衡

态 $G(x_1^*, x_2^*, y^*)$ 所对应的特征根均有负实部, 即正平衡态是局部渐近稳定的。

3 平衡态的全局渐近稳定性

定理 6 当 $r_2\beta < \alpha r_3k$, $m = \beta y^*/(\alpha k^2) > 0$, $n = k\alpha/\beta > 0$ 时, 系统 (3) 的边界平衡态 $C(r_1/a_{11}, 0, r_3k/\beta)$ 在 R_3^+ 上是全局渐近稳定的。

证明 参考文献 [9], 在 R_3^+ 上构造李雅普诺夫函数 $V(x_1, x_2, y) = x_1 - x_1^* - x_1^* \ln(x_1/x_1^*) + mx_2/2 + y - y^* - y^* \ln(y/y^*)$, 其中常数 $m > 0$, $V(x_1, x_2, y)$ 的正定性显而易见。沿着系统 (3) 对 V 求全导数有: $\dot{V} = (x_1 - x_1^*)(r_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + mx_2(r_2 - a_{22}x_2 - \alpha y) + (y - y^*)[r_3 - 1/(k + x_2)] = (x_1 - x_1^*)[-a_{11}(x_1 - x_1^*) + a_{12}x_2] + m[r^2 - a_{22}x_2 - \alpha y - n(r_3 - \beta y^*/k)] - k\beta(y - y^*)^2/k(k + x_2) + \beta y^*x_2(y - y^*)/k(k + x_2)$, 其中常数 $n > 0$, 有: $\dot{V} \leq -[a_{11}(x_1 - x_1^*)^2 - a_{12}x_2(x_1 - x_1^*) + ma_{22}x_2^2] + m(r_2 - nr_3)x_2 - k\beta(y - y^*)^2/[k(k + x_2)] + mx_2(-\alpha y + n\beta y^*/k) + \beta y^*x_2(y - y^*)/k^2$ 。将 $m = \beta y^*/(\alpha k^2)$, $n = k\alpha/\beta$ 代入上式, 则有

$$mx_2(-\alpha y + n\beta y^*/k) + \beta y^*x_2(y - y^*)/k^2 = 0, m(r_2 - nr_3)x_2 < 0 \quad (16)$$

成立, 且易知二次型

$$a_{11}(x_1 - x_1^*)^2 - a_{12}x_2(x_1 - x_1^*) + ma_{22}x_2^2 \quad (17)$$

是正定的。

由式 (16) 和式 (17) 可得 $\dot{V}(x_1, x_2, y) \leq 0$, 当且仅当 $x_1 = r_1/a_{11}$, $x_2 = 0$, $y = r_3k/\beta$ 时等号成立。此时系统 (3) 的边界平衡态 $C(r_1/a_{11}, 0, r_3k/\beta)$ 是全局渐近稳定的。

定理 7 令 $\tilde{A} = 1/(k + r_2/a_{22}) > 0$, $\tilde{B} = \beta y^*/\alpha > 0$, 当 $r_2\beta > \alpha r_3k$ 时, 系统 (3) 的正平衡态 $G(x_1^*, x_2^*, y^*)$ 在 R_3^+ 上是全局渐近稳定的。

证明 参考文献 [10 - 11], 在 R_3^+ 上构造李雅普诺夫函数: $V(x_1, x_2, y) = \tilde{A}(x_1 - x_1^* - x_1^* \ln(x_1/x_1^*)) + \tilde{B} \int_{x_2^*}^{x_2} (1/x_2)[1/(k + x_2^*) - 1/(k + x_2)] dx_2 + \int_{y^*}^y (y - y^*)/y dy$, 易知对 $\forall x_1 \neq x_1^*$,

$$x_1 - x_1^* - x_1^* \ln(x_1/x_1^*) > 0 \quad (18)$$

恒成立, 对于 $\int_{x_2^*}^{x_2} (1/x_2)[1/(k + x_2^*) - 1/(k + x_2)] dx_2$, 当 $x_2 > x_2^*$ 时, 有 $1/(k + x_2^*) > 1/(k + x_2)$, 即 $\int_{x_2^*}^{x_2} (1/x_2)[1/(k + x_2^*) - 1/(k + x_2)] dx_2 > 0$, 当 $x_2 < x_2^*$ 时, 有 $1/(k + x_2^*) < 1/(k + x_2)$, 亦可得 $\int_{x_2^*}^{x_2} (1/x_2)[1/(k + x_2^*) - 1/(k + x_2)] dx_2 > 0$, 所以对于任意的 $x_2 \neq x_2^*$, 有

$$\int_{x_2^*}^{x_2} (1/x_2)[1/(k + x_2^*) - 1/(k + x_2)] dx_2 > 0 \quad (19)$$

恒成立, 对于 $\int_{y^*}^y (y - y^*)/y dy$, 用上述方法同样可得对于任意的 $y \neq y^*$, 恒有

$$\int_{y^*}^y (y - y^*)/y dy > 0 \quad (20)$$

成立, 则根据式 (18) 一式 (20) 可知 $V(x_1, x_2, y)$ 是正定的。对 $V(x_1, x_2, y)$ 沿着系统 (3) 求全导数有:

$\dot{V} = \tilde{A}(1 - x_1^*/x_1)x_1(r_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + (\tilde{B}/x_2)[1/(k + x_2^*) - 1/(k + x_2)](r_2 - a_{22}x_2 - \alpha y) + (y - y^*)[r_3 - \beta y/(k + x_2)] = \tilde{A}(1 - x_1^*/x_1)x_1[(r_1 - a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - (r_1 - a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^*)] + (\tilde{B}/x_2)[1/(k + x_2^*) - 1/(k + x_2)][(r_2 - a_{22}x_2 - \alpha y) - (r_2 - a_{22}x_2^* - \alpha y^*)] + (y - y^*)\{[r_3 - \beta y/(k + x_2)] - [r_3 - \beta y^*/(k + x_2^*)]\}$ 。

进一步整理可得: $\dot{V} = \tilde{A}(x_1 - x_1^*)[-a_{11}(x_1 - x_1^*) + a_{12}(x_2 - x_2^*)] + \tilde{B}[(x_2 - x_2^*)/(k + x_2^*)(k + x_2)][-a_{22}(x_2 - x_2^*) - \alpha(y - y^*)] + (y - y^*)[\beta y^*/(k + x_2^*) - \beta y/(k + x_2)] = -\tilde{A}a_{11}(x_1 - x_1^*)^2 +$

$\bar{A}a_{12}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - \bar{B}a_{22}(x_2 - x_2^*)^2/[(k + x_2^*)(k + x_2)] - \bar{B}\alpha(x_2 - x_2^*)(y - y^*)/[(k + x_2^*)(k + x_2)] + \beta y^*(x_2 - x_2^*)(y - y^*)/[(k + x_2^*)(k + x_2)] - \beta(k + x_2^*)(y - y^*)^2/[(k + x_2^*)(k + x_2)]$, 易知二次型 $a_{11}(x_1 - x_1^*)^2 - a_{12}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + (\beta y^*/\alpha)a_{22}(x_2 - x_2^*)^2/(k + x_2^*)$ 是正定的, 则取

$\bar{A} = 1/(k + r_2/a_{22})$, $\bar{B} = \beta y^*/\alpha$, 有

$$-\bar{A}a_{11}(x_1 - x_1^*)^2 + \bar{A}a_{12}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) - \bar{B}a_{22}(x_2 - x_2^*)^2/[(k + x_2^*)(k + x_2)] \leqslant -[1/(k + r_2/a_{22})][a_{11}(x_1 - x_1^*)^2 - a_{12}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + \bar{B}a_{22}(x_2 - x_2^*)^2/(k + x_2^*)] \leqslant 0 \quad (21)$$

成立, 且

$$\bar{B}\alpha(x_2 - x_2^*)(y - y^*)/[(k + x_2^*)(k + x_2)] - \beta y^*(x_2 - x_2^*)(y - y^*)/[(k + x_2^*)(k + x_2)] = 0 \quad (22)$$

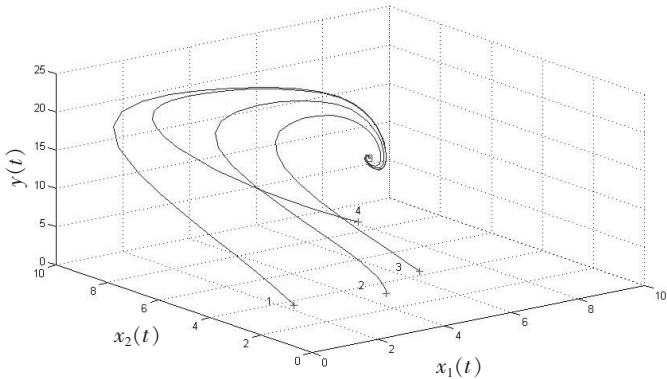
成立。由式 (21) 和式 (22) 可知 $\dot{V}(x_1, x_2, y) \leqslant 0$, 当且仅当 $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, y = y^*$ 时等号成立。因此, 系统 (3) 的正平衡态 $G(x_1^*, x_2^*, y^*)$ 是全局渐近稳定的。

4 数值模拟

本文研究了一个具有偏利合作关系和捕食关系的三种群捕食 - 食饵系统, 其中种群 x_2 对种群 x_1 是偏惠的, 偏惠系数为 a_{12} , 又因为种群 x_1 对种群 x_2 和种群 y 均无影响, 所以偏惠系数 a_{12} 仅对种群 x_1 有影响。当种群 x_2 未灭绝时, 偏惠系数 a_{12} 越大, 种群 x_1 将越快趋于稳定, 则模型的解也将越快趋于稳定。反之, 则不然。在此偏惠关系下, 本文主要得到如下结论: i) 当 $r_2\beta > \alpha r_3k$ 时, 系统 (3) 存在唯一的正平衡态 $G(x_1^*, x_2^*, y^*)$ 且是全局渐近稳定的; ii) 当 $r_2\beta < \alpha r_3k$ 时, 系统 (3) 不存在正平衡态, 而边界平衡态 $C(r_1/a_{11}, 0, r_3k/\beta)$ 是全局渐近稳定的。

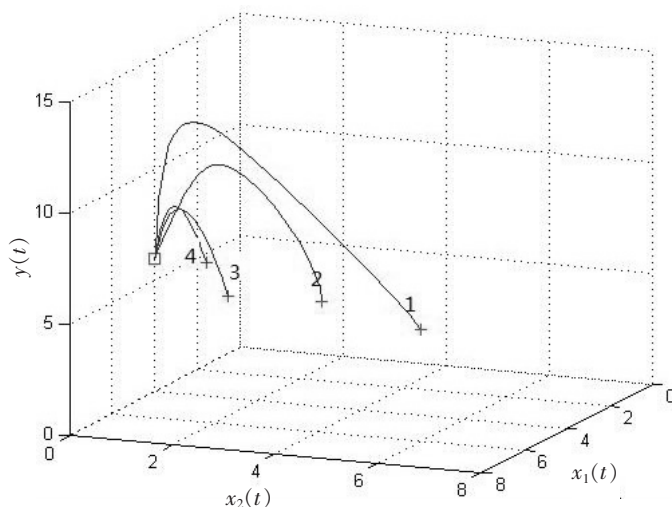
通过数值模拟来验证系统 (3) 结果的正确性。任意给出 4 个初值: $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2, y(0) = 3; x_1(0) = 4, x_2(0) = 1, y(0) = 6; x_1(0) = 6, x_2(0) = 6, y(0) = 5; x_1(0) = 3, x_2(0) = 5, y(0) = 1$ 。令系统 (3) 中的参数分别取值为: $r_1 = 4, r_2 = 6, r_3 = 2, a_{11} = 1, a_{12} = 0.1, a_{22} = 0.2, \alpha = 0.3, \beta = 0.5, k = 1$, 显然 $r_2\beta > \alpha r_3k$ 成立, 此时正平衡态为 (4.34, 3.43, 9.87) 是全局渐近稳定的, 见图 1。

令系统 (3) 中各参数取值分别为: $r_1 = 4, r_2 = 4, r_3 = 6, a_{11} = 1, a_{12} = 0.1, a_{22} = 0.1, \alpha = 1, \beta = 1, k = 1$, 易知 $r_2\beta < \alpha r_3k$ 成立, 此时边界平衡态为 (4, 0, 6) 是全局渐近稳定的, 见图 2。



说明: 曲线 1—初值为 (1, 2, 3) 的解轨线; 曲线 2—初值为 (3, 1, 4) 的解轨线; 曲线 3—初值为 (4, 1, 6) 的解轨线; 曲线 4—初值为 (6, 6, 5) 的解轨线。
Notes: 1—the solution trajectory for initial value condition (1, 2, 3); 2—the solution trajectory for initial value condition (3, 1, 4); 3—the solution trajectory for initial value condition (4, 1, 6); 4—the solution trajectory for initial value condition (6, 6, 5).

图 1 正平衡态 G 的全局渐近稳定性
Fig.1 The global asymptotic stability of the positive equilibrium G



说明: 曲线 1—初值为 (6,6,5) 的解轨线; 曲线 2—初值为 (1,2,3) 的解轨线; 曲线 3—初值为 (3,1,4) 的解轨线; 曲线 4—初值为 (4,1,6) 的解轨线。

Notes: 1—the solution trajectory for initial value condition (6,6,5); 2—the solution trajectory for initial value condition (1,2,3); 3—the solution trajectory for initial value condition (3,1,4); 4—the solution trajectory for initial value condition (4,1,6).

图 2 边界平衡态 C 的全局渐近稳定性

Fig.2 The global asymptotic stability of the bounded equilibrium C

[参 考 文 献]

- [1] CHEN F D. Permanence of a discrete N -species cooperation system with time delays and feedback controls. *Applied mathematics and computation*, 2007, 186(1): 23-29. DOI:10.1016/j.amc.2006.07.084.
- [2] CHEN L J, XIE X D. Permanence of a N -species cooperation system with continuous time delays and feedback controls. *Nonlinear analysis: real world applications*, 2011, 12(1): 34-38. DOI:10.1016/j.nonrwa.2010.05.033.
- [3] YANG W S, LI X P. Permanence of a discrete nonlinear N -species cooperation system with time delays and feedback controls. *Applied mathematics and computation*, 2011, 218(7): 3581-3586. DOI:10.1016/j.amc.2011.08.106.
- [4] 陈凤德, 谢向东. 合作种群模型动力学行为研究. 北京: 科学出版社, 2014.
- [5] 祝占法, 栗永安, 徐芳. 具有偏利关系的 Lotka-Volterra 模型. *重庆工学院学报 (自然科学版)*, 2007, 21(10): 59-62.
- [6] 杨丽娅, 韩荣玉, 薛亚龙, 等. 一方不能独立生存的非自治偏利合作模型研究. *三明学院学报*, 2014, 31(6): 15-18.
- [7] 沈柠, 张树文. 具有相互干扰的捕食-食饵系统的定性分析. *集美大学学报 (自然科学版)*, 2014, 19(2): 143-147.
- [8] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性稳定性方法. 北京: 科学出版社, 2001: 60-90.
- [9] XU S H. Dynamics of a general prey-predator model with prey-stage structure and diffusive effects. *Computers and mathematics with applications*, 2014, 68: 405-423. DOI:10.1016/j.camwa.2014.06.016.
- [10] 林琳, 雒志学. 捕食被捕食三种群系统平衡点稳定性的分析. *兰州交通大学学报 (自然科学版)*, 2007, 26(1): 142-145.
- [11] 张群英, 周桦, 侯燕, 等. 具有 Michaelis-Menten 响应函数的 3 种群捕食模型 [J]. *扬州大学学报 (自然科学版)*, 2004, 7(2): 6-9.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)