

# $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上一类半线性椭圆问题的正解与负解

刘竞坤

(集美大学诚毅学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 考虑一类半线性椭圆问题  $\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x, u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow +\infty. \end{cases}$  用拓扑度理论证

明在  $a(x)$  与  $f(x, u)$  关于  $x$  是周期的情况下, 该方程存在一个正解与一个负解。

[关键词] 半线性椭圆问题; 拓扑度理论; 正解与负解;  $(PS)_c$  序列; 容许同伦

[中图分类号] O 175.5

## Positive Solution and Negative Solution for a Class of Semilinear Elliptic Problem in $H^1(\mathbf{R}^N)$

LIU Jing-kun

(Chengyi College, Jimei University, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** Considering the semilinear elliptic problem  $\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x, u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow +\infty. \end{cases}$

It is shown that if  $a(x)$  and  $f(x, u)$  are periodic in the  $x$ -variables, then a positive solution and a negative solution of this equation by topology degree theory are obtained.

**Keywords:** semilinear elliptic problem; topology degree theory; positive solution and negative solution;  $(PS)_c$ -sequence; admissible homotopy

## 0 引言

本文考虑如下半线性椭圆问题

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = f(x, u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (1)$$

解的存在性。试图找出  $u \in H^1(\mathbf{R}^N)$ , 使它满足椭圆方程 (1)。若  $u$  是正的, 称  $u$  为方程 (1) 的正解; 若  $u$  是负的, 称  $u$  为方程 (1) 的负解。

之前, 有很多文献研究过相关的问题。例如, Kryszewski 等<sup>[1]</sup>研究了半线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x, u), \\ x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N) \end{cases} \quad (2)$$

解的存在性, 但并未对其解的正负性进行讨论。而文献 [2] 获得了带限制的椭圆特征问题

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = \lambda f(x,u), x \in \mathbf{R}^N, u \in H^1(\mathbf{R}^N), \\ \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx = r^2, \\ u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3)$$

的正解与负解。而后,文献 [3] 进一步证明了问题 (3) 变号解的存在性。

设  $E := H^1(\mathbf{R}^N)$ , 方程 (1) 中  $a(x)$  满足如下两个条件:  $(A_1)$   $a(x) \in C(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$  关于  $x_j (j = 1, 2, \dots, N)$  满足周期性, 且  $a(x) > 0$ ;  $(A_2)$   $0$  位于  $\sigma(-\Delta + a)$  的谱隙中, 其中  $\sigma(-\Delta + a)$  表示算子  $-\Delta + a$  的谱。 $f(x,u)$  满足下列 4 个条件:  $(F_1)$   $f \in C(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$  关于  $x_j (j = 1, 2, \dots, N)$  满足周期性;  $(F_2)$  当  $u \rightarrow 0$  时,  $f(x,u) = o(|u|)$  关于  $x \in \mathbf{R}^N$  一致成立;  $(F_3)$  存在  $\gamma > 2$ , 对任意  $\delta > 0$ , 在  $\mathbf{R}^N \times (-\delta, 0)$  和  $\mathbf{R}^N \times (0, \delta)$  内部有  $0 < \gamma F(x,u) \leq uf(x,u)$ , 其中,  $F(x,u) := \int_0^u f(x,\xi) d\xi$ ;  $(F_4)$   $|f(x,u)| \leq c(1 + |u|^{p-1})$ , 这里  $c \in \mathbf{R}^+$ 。若  $N \geq 3$  时,  $2 < p < 2N/(N-2)$ ; 若  $N = 1, 2$  时,  $p > 2$ 。

**定理 1** 若  $a(x)$  满足条件  $(A_1)$  和  $(A_2)$ , 且  $f(x,u)$  满足条件  $(F_1) - (F_4)$ , 则半线性 Schrödinger 方程 (1) 至少有一个正解与一个负解。

### 1 预备知识

为了研究半线性 Schrödinger 方程 (1) 的解, 建立泛函

$$\Phi(u) := \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + a(x)u^2)/2 dx - \int_{\mathbf{R}^N} F(x,u) dx, u \in E, \quad (4)$$

其中  $F(x,u) := \int_0^u f(x,\xi) d\xi$ 。由条件  $(A_1)$ 、 $(F_1)$  与  $(F_3)$  可知:  $\Phi(u)$  的临界点与问题 (1) 的解一一对应。定义自伴算子  $L: E \rightarrow E$ ,

$$(Lu, v) := \int_{\mathbf{R}^N} (\nabla u \cdot \nabla v + a(x)uv) dx, u, v \in E, \quad (5)$$

则有

$$\Phi(u) = (Lu, u)/2 - \int_{\mathbf{R}^N} F(x,u) dx, u \in E, \quad (6)$$

$$\Phi'(u)v = (Lu, v) - \int_{\mathbf{R}^N} f(x,u)v dx, u, v \in E. \quad (7)$$

显然,  $\Phi$  在有界集上有界。

由文献 [4] Theorem XIII. 100 得: 算子  $L$  有纯绝对连续谱。再由  $(A_2)$  与 F. Riesz 空间分解定理<sup>[5]</sup><sup>157-160</sup>得: 空间  $E$  可分解为  $L$  的两个无限维不变正交子空间  $X$  与  $Y$ , 即  $E = X \oplus Y$ , 其中  $X$  为正定的,  $Y$  为负定的。令  $P: E \rightarrow X, Q: E \rightarrow Y$  为其对应的正交投影。构造  $E$  上的一个内积  $\langle u, v \rangle := (L(P - Q)u, v), u, v \in E$ 。对应的范数为:  $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}, u \in E$ , 则内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  与  $(\cdot, \cdot)$  等价, 且  $X$  与  $Y$  关于内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  正交。由式 (6) 与式 (7) 得:

$$\Phi(u) = (\|Pu\|^2 - \|Qu\|^2)/2 - \int_{\mathbf{R}^N} F(x,u) dx, u \in E, \quad (8)$$

$$\Phi'(u)v = \langle Pu, v \rangle - \langle Qu, v \rangle - \int_{\mathbf{R}^N} f(x,u)v dx, u, v \in E. \quad (9)$$

**定义 1** 设  $\Phi \in C^1(E, \mathbf{R})$ , 若序列  $\{u_n\} \subset E$  满足  $\{\Phi(u_n)\}$  有界且  $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$ , 则称  $\{u_n\}$  为  $\Phi$  的 (PS) 序列。特别地, 若序列  $\{u_n\} \subset E$  满足  $\Phi(u_n) \rightarrow c$  且  $\Phi'(u_n) \rightarrow 0$ , 则称  $\{u_n\}$  为  $\Phi$  的 (PS)<sub>c</sub> 序列。

记  $\Phi^\beta := \{u \in E: \Phi(u) \leq \beta\}, \Phi_\alpha := \{u \in E: \Phi(u) \geq \alpha\}, \Phi_\alpha^\beta := \{u \in E: \alpha \leq \Phi(u) \leq \beta\}, K := \{u \in E: \Phi'(u) = 0\}$ 。

根据  $f(x, u)$  所满足的条件可知: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在只与  $\varepsilon$  有关的  $c_1, c_2 > 0$ , 使得:

$$|f(x, u)| \leq \varepsilon |u| + c_1 |u|^{p-1}, x \in \mathbf{R}^N, u \in \mathbf{R}, \quad (10)$$

$$F(x, u) \geq c_2 |u|^\gamma - \varepsilon |u|^2, x \in \mathbf{R}^N, u \in \mathbf{R}_0. \quad (11)$$

从而有

$$\int_{\mathbf{R}^N} F(x, u) dx = o(\|u\|^2), \|u\| \rightarrow 0. \quad (12)$$

且存在  $\rho > 0$ , 使得

$$b := \inf_{S_\rho \cap X} \Phi > 0. \quad (13)$$

参见文献 [1], 导出引理 1—引理 3。

**引理 1**<sup>[1]</sup> 若  $x_0 \in X$ ,  $\|x_0\| = 1$ , 则存在  $R > \rho$ , 使得: 1)  $\max_{\partial M} \Phi = 0$ ; 2)  $S := \sup_M \Phi < \infty$ , 其中,  $M := \{u = y + \lambda x_0 : y \in Y, \|u\| < R, \lambda > 0\}$ ,  $\partial M := \bar{M} \setminus M = \{u = y + \lambda x_0 : y \in Y, \|u\| = R, \lambda \geq 0\} \cup \{u = y + \lambda x_0 : y \in Y, \|u\| \leq R, \lambda = 0\}$ 。

**引理 2**<sup>[1]</sup> 若  $\{u_n\} \subset E$  为  $\Phi$  的  $(PS)_c$  序列, 则  $\{u_n\}$  有界, 且  $c \geq 0$ 。

**引理 3**<sup>[1,6]</sup> 若  $\{u_n\} \subset E$  为  $\Phi$  的  $(PS)_c$  序列, 则以下 2 种情况有且仅有一个成立: 1)  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = 0$ ; 2) 存在序列  $\{a_n\} \subset \mathbf{R}^N, r, \eta > 0$ , 使得  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B(a_n, r)} |u_n|^2 dx \geq \eta$ 。

## 2 正解与负解的存在性

构造椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u + a(x)u = \bar{f}(x, u), x \in \mathbf{R}^N, u \in E, \\ u(x) \rightarrow 0, |x| \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (14)$$

其中,

$$\bar{f}(x, u) = \begin{cases} f(x, u), & u \geq 0, \\ 0, & u < 0. \end{cases} \quad (15)$$

则  $\bar{f}(x, u)$  满足  $(F_1)$ — $(F_4)$ 。建立泛函

$$\bar{\Phi}(u) = (\|Pu\|^2 - \|Qu\|^2)/2 - \int_{\mathbf{R}^N} \bar{F}(x, u) dx, u \in E, \quad (16)$$

其中,  $\bar{F}(x, u) = \int_0^u \bar{f}(x, \xi) d\xi$ , 则  $\bar{\Phi}(u)$  的临界点与问题 (14) 的解一一对应。

定义函数:  $\|\cdot\|: E \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $\|\cdot\| := \max\{\|Pu\|, \sum_{j=1}^{\infty} [|\langle e_j, Qu \rangle|/(2^j)]\}$ 。其中,  $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$  为  $Y$  的一个完全正交系, 则  $\|\cdot\|$  为空间  $E$  的一个范数。建立拓扑  $(E, \|\cdot\|)$ , 记为  $\tau$  拓扑, 则有  $u_n \xrightarrow{\tau} u \Leftrightarrow Pu_n \rightarrow Pu$  且  $Qu_n \rightarrow Qu$ 。若  $\{u_n\} \subset K$  且  $u_n \xrightarrow{\tau} u$ , 则  $u_n \rightarrow u$ 。由  $(F_3)$  得:  $\bar{\Phi}(u_n) - \bar{\Phi}'(u_n)u_n/2 = (Lu_n, u_n)/2 - \int_{\mathbf{R}^N} \bar{F}(x, u_n) dx - (Lu_n, u_n)/2 + \int_{\mathbf{R}^N} \bar{f}(x, u_n)u_n/2 dx = \int_{\mathbf{R}^N} [u_n \bar{f}(x, u_n)/2 - \bar{F}(x, u_n)] dx \geq \int_{\mathbf{R}^N} [u_n \bar{f}(x, u_n)/2 - u_n \bar{f}(x, u_n)/\gamma] dx$ , 所以,  $\bar{\Phi}(u_n) - \bar{\Phi}'(u_n)u_n/2 \geq (1/2 - 1/\gamma) \int_{\mathbf{R}^N} \bar{f}(x, u_n)u_n dx$ 。

**定义 2** 设  $A$  为空间  $E$  的一个闭集, 若映射  $h: A \rightarrow E$  满足以下 2 个条件: 1)  $h$  是  $\tau$  连续的, 即对任意  $u_n, u \in A$  且  $u_n \xrightarrow{\tau} u$ , 有  $h(u_n) \xrightarrow{\tau} h(u)$ ; 2)  $g = I - h$  ( $I$  为恒同映射) 是  $\tau$  局部有限维的, 即任意  $u \in A$  有一个  $\tau$  邻域  $W_u$ , 使得  $g(W_u \cap A)$  包含在  $E$  的某个有限维子空间内, 则称  $h$  为一个容许映射。

若映射  $H: A \times [0, 1] \rightarrow E$  满足以下 2 个条件: 1)  $H$  是  $\tau$  连续的, 即对任意  $(u_n, t_n), (u, t) \in A \times [0,$

1] 且  $u_n \xrightarrow{\tau} u, t_n \rightarrow t$ , 有  $H(u_n, t_n) \xrightarrow{\tau} H(u, t)$ ; 2)  $G(u, t) = u - H(u, t)$  是  $\tau$  局部有限维的, 即任意  $(u, t) \in A \times [0, 1]$  有一个邻域  $W(u, t)$ , 使得  $\{G(v, s) : (v, s) \in W(u, t) \cap (A \times [0, 1])\}$  包含在  $E$  的某个有限维子空间内, 则称  $H$  为一个容许同伦。

**命题 1** 设  $N$  为  $\tau$  开集, 向量场  $V: N \rightarrow E$  满足: 任意  $u \in N$  有一个  $\tau$  邻域  $W_u$ , 使得  $V(W_u)$  包含在  $E$  的某个有限维子空间内。且存在  $L_u \geq 0$  使得

$$\|V(u') - V(u'')\| \leq L_u \|u' - u''\|, u', u'' \in W_u,$$

若  $A \subset N$  为一个闭集, 则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} d\eta/dt = -V(\eta), \\ \eta(u, 0) = u \in A. \end{cases} \quad (17)$$

存在一个连续的解  $\eta(u, \cdot)$ , 且  $\eta(u, t): A \times [0, 1] \rightarrow E$  是一个容许同伦。

**证明** 由向量场  $V$  所满足的条件及文献[7]可得: 式(17)有一个解  $\eta(u, \cdot)$ 。

对任意  $u_0 \in A$ ,  $\Gamma := \eta(\{u_0\} \times [0, 1])$  是  $\tau$  紧的。由  $V$  所满足的条件得: 存在  $r, L > 0$ , 使得  $O := \{u \in E : \|u - \Gamma\| < r\} \subset N$ , 对任意  $u, v \in O$ , 有:  $\|V(u)\| \leq L$ ,  $\|V(u) - V(v)\| \leq L\|u - v\|$ , 且  $V(O)$  包含在空间  $E$  的某个有限维子空间  $E_1$  内。

对给定的  $\delta > 0$ , 任意  $t \in [0, 1], u \in A$ ,  $\|u - u_0\| < \delta$ , 不妨设  $\eta(u, s) \in O, s \in [0, t]$ , 则:

$$\begin{aligned} \|\eta(u, t) - \eta(u_0, t)\| &= \left\| \eta(u, 0) - \int_0^t V(\eta(u, s)) ds - \eta(u_0, 0) + \int_0^t V(\eta(u_0, s)) ds \right\| = \|u - u_0 + \\ &\int_0^t [V(\eta(u_0, s)) - V(\eta(u, s))] ds\| \leq \|u - u_0\| + \left\| \int_0^t [V(\eta(u_0, s)) - V(\eta(u, s))] ds \right\| \leq \|u - u_0\| + \\ &\int_0^t \|V(\eta(u, s)) - V(\eta(u_0, s))\| ds \leq \|u - u_0\| + L \int_0^t \|\eta(u, s) - \eta(u_0, s)\| ds. \end{aligned}$$

由 Gronwall 不等式<sup>[8]</sup>得:  $\|\eta(u, t) - \eta(u_0, t)\| \leq \|\eta(u, 0) - \eta(u_0, 0)\| e^{\int_0^t L ds} = \|u - u_0\| e^{Lt} \leq \|u - u_0\| e^L, \forall t \in [0, 1]$ 。

取  $\delta < re^{-L}$ , 则  $\|\eta(u, t) - \eta(u_0, t)\| < \|u - u_0\| r/\delta < r, \forall t \in [0, 1]$ , 因而  $\eta(u, t) \in O, t \in [0, 1]$ 。当  $|t - t_0| < \delta$  时, 有  $\|\eta(u, t) - \eta(u_0, t_0)\| = \|\eta(u, t) - \eta(u_0, t) + \eta(u_0, t) - \eta(u_0, t_0)\| \leq \|\eta(u, t) - \eta(u_0, t)\| + \|\eta(u_0, t) - \eta(u_0, t_0)\| = \|\eta(u, t) - \eta(u_0, t)\| + \left\| \int_{t_0}^t -V(\eta(u_0, s)) ds \right\| < \delta e^L + L|t - t_0| < \delta e^L + L\delta = (e^L + L)\delta$ 。由  $\delta$  的任意性得,  $\eta$  是  $\tau$  连续的。

同时, 对  $\forall t \in [0, 1], \|u - u_0\| < \delta$ , 有  $u - \eta(u, t) = \eta(u, 0) - \eta(u, t) = \int_0^t V(\eta(u, s)) ds \in E_1$ 。

综上可得:  $\eta(u, t): A \times [0, 1] \rightarrow E$  是一个容许同伦。

取空间  $X$  的一个有限维子空间  $X_1, U$  为空间  $E_1 := X_1 \oplus Y$  的开集。令  $h: \bar{U} \rightarrow E_1$  为一个容许映射, 满足  $h^{-1}(0) \cap \partial U = \emptyset$  且  $h^{-1}(0)$  是  $\tau$  紧的, 则存在  $\{u_i\}_{i=1}^n \subset h^{-1}(0)$  使得  $h^{-1}(0) \subset W := \bigcup_{i=1}^n W_{u_i} \cap U$ 。设  $g = I - h$ , 则  $g(W)$  包含在空间  $E_1$  的某个有限维子空间  $L$  内。令  $W_L := W \cap L, h_L := h|_{W_L}: W_L \rightarrow L$ 。显然,  $h_L^{-1}(0) = h^{-1}(0)$ , 且  $h_L^{-1}(0)$  关于  $L$  是紧的, 定义

$$\deg(h, U, 0) := \deg_B(h_L, W_L, 0). \quad (18)$$

由文献[9], 可得到  $\deg(h, U, 0)$  的如下性质。

**性质 1**<sup>[9]</sup> 若  $\deg(h, U, 0) \neq 0$ , 则  $h^{-1}(0) \neq \emptyset$ 。

**性质 2**<sup>[9]</sup> 设  $u_0 \in U$ , 若  $h(u) = u - u_0$ , 则  $\deg(h, U, 0) = 1$ 。

**性质 3**<sup>[9]</sup> 设  $\bar{H}: U \times [0, 1] \rightarrow E_1$  为容许同伦,  $H^{-1}(0) \cap (\partial U \times [0, 1]) = \emptyset$ , 且  $H^{-1}(0)$  为  $\tau$  紧的, 则  $\deg(H(\cdot, t), U, 0)$  与  $t \in [0, 1]$  无关。

**定理 2** 若  $a(x)$  满足条件  $(A_1)$  和  $(A_2)$ , 且  $f(x, u)$  满足条件  $(F_1) - (F_4)$ , 则方程 (14) 至少

有一个非平凡解。

**证明** 由式 (13) 与引理 1 得, 存在  $\bar{\rho} > 0$ ,  $\bar{R} > \bar{\rho}$ , 使得:

$$\bar{b} = \inf_{S_{\bar{\rho}} \cap X} \bar{\Phi} > 0, \bar{S} = \sup_{M_0} \bar{\Phi} < \infty. \quad (19)$$

其中,  $M_0 = \{u = y + \lambda x_0 : y \in Y, \|u\| < \bar{R}, \lambda > 0\}$ ,  $x_0 \in X$  且  $\|x_0\| = 1$ 。

取  $\Gamma_\varepsilon := \{u \in E : \|\bar{\Phi}'(u)\| \leq \varepsilon\}$ , 假设下面命题成立: (B) 存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $\Gamma_\varepsilon \cap \bar{\Phi}^{-1}[\bar{b} - \varepsilon, \bar{S} + \varepsilon] = \emptyset$ 。令  $\alpha := \bar{b} - \varepsilon$ , 对  $u \in \bar{\Phi}_\alpha^S$ , 取  $\omega(u) := 2\bar{\Phi}'(u)/\|\bar{\Phi}'(u)\|^2$ 。由  $\bar{\Phi}'$  的弱连续性得, 函数  $\phi_u : \bar{\Phi}_\alpha^S \rightarrow \mathbf{R}, v \mapsto \langle \bar{\Phi}'(v), \omega(u) \rangle$  是  $\tau$  连续的, 则存在  $u$  的一个  $\tau$  邻域  $U_u \subset E$ , 使得

$$\langle \bar{\Phi}'(v), \omega(u) \rangle > 1, v \in U_u \cap \bar{\Phi}_\alpha^S. \quad (20)$$

设  $U_0 := \bar{\Phi}^{-1}(-\infty, \alpha)$ , 则  $\{U_u\}_{u \in \bar{\Phi}_\alpha^S} \cup \{U_0\}$  为度量空间  $(\bar{\Phi}^S, \tau)$  的一个  $\tau$  开覆盖, 其具有一个  $\tau$  局部有限  $\tau$  开加细子覆盖  $\{N_j\}_{j \in J}$ , 则  $\bar{\Phi}^S \subset N := \bigcup_{j \in J} N_j$ 。对任意  $j \in J$ , 要么存在某个  $u_j \in \bar{\Phi}_\alpha^S$  使得  $N_j \subset U_{u_j}$ , 则取  $\omega_j := \omega(u_j)$ ; 要么  $N_j \subset U_0$ , 则取  $\omega_j := 0$ 。定义

$$V(u) := \sum_{j \in J} \lambda_j(u) \omega_j, u \in N, \quad (21)$$

其中,  $\{\lambda_j\}_{j \in J}$  为从属于  $\{N_j\}_{j \in J}$  的单位分解<sup>[10]</sup>, 则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} d\eta/dt = -V(\eta), \\ \eta(u, 0) = u \in \bar{\Phi}^S, \end{cases} \quad (22)$$

对  $t \geq 0$  有唯一解  $\eta(u, t)$ 。取  $T := \bar{S} - \bar{b} + 2\varepsilon$ , 由命题 1 得:  $\eta(u, t) : \bar{\Phi}^S \times [0, T] \rightarrow \bar{\Phi}^S$  是一个容许同伦,  $\bar{M}_0 \subset \bar{\Phi}^S$ 。

一方面, 设  $\bar{\Phi}(\eta(u, t)) \geq \bar{b} - \varepsilon, u \in \bar{M}_0$ 。由式 (20) 得:  $\langle \bar{\Phi}'(u), V(u) \rangle > 1, u \in \bar{M}_0$ 。所以,  $\bar{\Phi}(\eta(u, t)) - \bar{\Phi}(u) = \bar{\Phi}(\eta(u, t)) - \bar{\Phi}(\eta(u, 0)) = \int_0^t d\bar{\Phi}(\eta(u, s))/ds = \int_0^t \langle \bar{\Phi}'(\eta(u, s)), d\eta/ds \rangle ds = - \int_0^t \langle \bar{\Phi}'(\eta(u, s)), V(\eta(u, s)) \rangle ds$ 。因而有

$$\bar{\Phi}(\eta(u, t)) - \bar{\Phi}(u) \leq -t, u \in \bar{M}_0. \quad (23)$$

所以,  $\bar{S} \geq \bar{\Phi}(u) \geq t + \bar{\Phi}(\eta(u, t)) \geq t + \bar{b} - \varepsilon$ , 即  $t \leq \bar{S} - \bar{b} + \varepsilon < T$ 。从而得到

$$\sup_{u \in \bar{M}_0} \bar{\Phi}(\eta(u, T)) < \bar{b}. \quad (24)$$

另一方面, 构造一个映射:  $H: \bar{M}_0 \times [0, T] \rightarrow R x_0 \oplus Y, H(u, t) := (\|P\eta(u, t)\| - \bar{\rho})x_0 + Q\eta(u, t)$ , 则  $H$  为容许同伦, 当且仅当  $\eta(u, t) \in S_{\bar{\rho}} \cap X$  时,  $H(u, t) = 0$ 。由式 (19) 与式 (23) 得: 当  $\eta(u, t) \in S_{\bar{\rho}} \cap X$  时,

$$\bar{\Phi}(u) \geq \bar{\Phi}(\eta(u, t)) \geq \bar{b}, \quad (25)$$

且  $u \notin \partial M_0$ , 因而  $H^{-1}(0) \cap (\partial M_0 \times [0, T]) = \emptyset$ 。同时,  $H(u, 0) = u - \bar{\rho}x_0, \bar{\rho}x_0 \in M_0$ 。由性质 2 与性质 3 得:  $\deg(H(\cdot, T), M_0, 0) = \deg(H(\cdot, 0), M_0, 0) = 1$ 。由性质 1 得: 存在  $\bar{u} \in M_0$ , 使得  $H(\bar{u}, T) = 0$ 。因而  $\eta(\bar{u}, T) \in S_{\bar{\rho}} \cap X$ , 由式 (25) 得  $\bar{\Phi}(\eta(\bar{u}, T)) \geq \bar{b}$ , 与式 (24) 矛盾。因而命题 (B) 不成立, 即对任意  $\varepsilon > 0$ , 有  $\Gamma_\varepsilon \cap \bar{\Phi}^{-1}[\bar{b} - \varepsilon, \bar{S} + \varepsilon] \neq \emptyset$ 。因此,  $\bar{\Phi}$  存在一个  $(PS)_c$  序列  $\{u_n\}$ , 其中  $c \in [\bar{b}, \bar{S}]$ 。由引理 2 得:  $\{u_n\}$  有界且没有子列收敛到 0。再由引理 3 得: 存在一个序列  $\{a_n\} \subset \mathbf{R}^N, r, \eta > 0$ , 使得  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{B(a_n, r)} |u_n|^2 dx \geq \eta$ , 则  $\{u_n\}$  存在一个子列, 仍记为  $\{u_n\}$  满足

$$\|u_n\|_{L^2(B(a_n, r))} \geq \eta/2. \quad (26)$$

取  $g_n \in Z^N$  满足  $|g_n - a_n| = \min\{|g - a_n| : g \in Z^N\}$ , 则  $|g_n - a_n| \leq \sqrt{N}/2$ 。令  $v_n := g_n * u_n \triangleq u_n(\cdot + g_n)$ 。由式 (26) 得

$$\|v_n\|_{L^2(B(0, r + \sqrt{N}/2))} \geq \eta/2. \quad (27)$$

显然,  $\bar{\Phi}(v_n) = \bar{\Phi}(u_n)$ , 且  $\|\bar{\Phi}'(v_n)\| = \|\bar{\Phi}'(u_n)\|$ 。因而  $\{v_n\}$  为  $\bar{\Phi}$  的一个  $(PS)_c$  序列。由引理 2 得  $\{v_n\}$  有界。因此存在一个子列, 仍记为  $\{v_n\}$  收敛到某个  $v \in E$ , 且  $\|v\|_{L^2(B(0,r+\sqrt{N}/2))} \geq \eta/2$ , 则  $v \neq 0$ 。由  $\bar{\Phi}'$  的弱连续性得  $\bar{\Phi}'(v) = 0$ 。

综上可得: 方程 (14) 有一个非平凡解  $v$ 。

接下来, 证明  $v$  为方程 (1) 的一个正解。令  $A = \{x \in \mathbf{R}^N; v(x) < 0\}$ , 由式 (15) 得:  $-\Delta v + a(x)v = 0, x \in A$ , 且当  $|x| \rightarrow +\infty$  时,  $v(x) \rightarrow 0$ 。由极值原理<sup>[11]</sup>得:  $v(x) \geq 0, x \in A$ 。与  $A$  的定义矛盾, 所以  $A = \emptyset$ 。从而可得:  $v(x) \geq 0, x \in \mathbf{R}^N$ 。又因为  $v$  为式 (14) 的解, 所以,  $-\Delta v + a(x)v = \bar{f}(x, v) = \bar{f}(x, v)^+ - \bar{f}(x, v)^-$ , 所以,  $-\Delta v + [a(x) + \bar{f}(x, v)^- / v]v = \bar{f}(x, v)^+ \geq 0$ 。由强极值原理<sup>[11]</sup>得:  $v(x) \neq 0, x \in \mathbf{R}^N$ , 所以,  $v(x) > 0$ , 即  $v$  为方程 (1) 的一个正解。同理可证: 方程 (1) 有一个负解  $w$ 。综上所述, 可得到定理 1 的结论。

注 1 根据山路引理, 问题 (1) 除正解  $v$  与负解  $w$  以外, 还存在第三个解  $u$ , 但  $u$  的正负性无法确定。

## [ 参 考 文 献 ]

- [1] KRYSZEWSKI W, SZULKIN A. Generalized linking theorem with an application to semilinear Schrödinger equation. Adv diff eq, 1998, 3(3): 441-472.
- [2] 刘竞坤.  $H^1(\mathbf{R}^N)$  上带限制的椭圆特征问题的三个解. 数学研究, 2013, 46(2): 160-166.
- [3] LIU J K, CHEN J Q. Sign changing solutions and multiple solutions of an elliptic eigenvalue problem with constraint in  $H^1(\mathbf{R}^N)$ . Computers and mathematics with applications, 2010, 59(8): 3005-3013. DOI:10.1016/j.camwa.2010.02.019.
- [4] REED M, SIMON B. Methods of modern mathematical physics IV. New York: Academic Press, 1978: 309-310.
- [5] 江泽坚, 孙善利. 泛函分析. 北京: 高等教育出版社, 2005: 157-160.
- [6] ZELATI V C, RABINOWITZ P H. Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on  $\mathbf{R}^N$ . Comm pure appl math, 1992(45): 1217-1269. DOI:10.1002/cpa.3160451002.
- [7] MAWHIN J, WILLEM M. Critical point theory and hamiltonian system. New York: Springer-Verlag, 1989: 175-176.
- [8] 崔尚斌. 数学分析教程 (中册). 北京: 科学出版社, 2013: 53-54.
- [9] 钟承奎, 范先令. 非线性泛函分析引论. 兰州: 兰州大学出版社, 1998: 68-89.
- [10] 陈省身, 陈维恒. 微分几何讲义. 北京: 北京大学出版社, 2001: 85-92.
- [11] GILBARG D, TRUDINGER N S. Elliptic partial differential equations of second order. New York: Springer-Verlag, 1977: 32-35.
- [12] WILLEM M. Minimax theorems. Berlin: Birkhäuser Boston Basel, 1996: 93-107.
- [13] RABINOWITZ P H. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. Providence: Amer Math Soc, 1986: 1-22.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)