[文章编号] 1007 - 7405(2016)04 - 0310 - 04

一类 $p(x)$–Laplace 方程解的爆破

温 杰[1]，詹华税[2]

（1. 集美大学理学院，福建 厦门 361021；2. 厦门理工学院应用数学学院，福建 厦门 361024）

[摘要] 利用能量泛函的方法，研究了方程 $u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(u)\,(x \in \Omega, t > 0)$ 在正初始能量下解的爆破问题。在对 f 的增长阶等条件作了一定的限制情况下，证明了该方程的能量泛函在时间 t^* 处趋于无穷，因此，方程的解在有限时间内爆破。

[关键词] 爆破；$p(x)$–Laplace 方程；正初始能量；Dirichlet 边界条件

[中图分类号] O 175.2

Blow-up of the Solution for a $p(x)$–Laplace Equation

WEN Jie[1], ZHAN Hua-shui[2]

(1. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China;
2. School of Applied Mathematics, Xiamen University of Technology, Xiamen 361024, China)

Abstract: The problem $u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(u)$ with the method of energy functional was considered. A blow-up result for certain solution with positive initial energy was established. If some restrictions of the growth order of f are imposed, it was proved that equation of the energy functional in time t^* tends to infinity, so the solution blow-up in a limited time.

Keywords: blow-up; $p(x)$–Laplace equation; positive initial energy; Dirichlet boundary value problem

0 引言

对常指数增长条件的微分方程解的性质研究已经有很多文献[1-3]。随后出现了变指数增长条件的微分方程及变分问题，此问题来源于物理学中非线性弹性力学和电流流体学，它反映了“逐点异性”的物理现象。随着弹性力学的发展，这一课题引起了很多学者的关注。而变指数空间理论的发展为此类问题的研究提供了合适的空间框架。经过多位学者的共同努力，也取得了很多研究成果[4-9]。

本文考虑变指数方程

$$\begin{cases} u_t - \mathrm{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = f(u), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, & t \geqslant 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 R^n 中一个有界区域，且有光滑边界 $\partial\Omega$，$2 < p^- < p(x) < p^+ < n$，其中 $p^- = \mathrm{ess}\inf\limits_{\overline{\Omega}} p(x)$，$p^+ = \mathrm{ess}\sup\limits_{\overline{\Omega}} p(x)$。$f(u)$ 是一个 $C(R)$ 函数且 $|f(u)| \leqslant h(u)$，h 是 C^1 函数。$p(x)$ 为常数 p 时，文献

[收稿日期] 2015 - 10 - 28 [修回日期] 2015 - 12 - 07
[基金项目] 福建省自然科学基金资助项目（2015J01592）
[作者简介] 温杰（1990—），女，硕士生，从事偏微分方程研究。通信作者：詹华税（1966—），男，教授，博士，从事偏微分方程研究，E-mail: hszhan@jmu.edu.cn。

[10] 给出了此方程解的爆破，此问题源于非线性流体力学[11]。本文利用能量泛函的方法，将文献 [10] 的结果推广到 $p(x)$ 的情形。

$L^{p(x)}(\Omega)=\{u \mid u$ 是可测的实值函数,$\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty\}$，此空间上范数的定义为 $|u|_{L^{p(x)}}(\Omega)=\inf\left\{\lambda>0 \mid \int_\Omega |u(x)/\lambda|\mathrm{d}x\leqslant 1\right\}$，$W^{1,p(x)}(\Omega)=\{u\in L^{p(x)}(\Omega)\mid |\nabla u|\in L^{p(x)}(\Omega)\}$，此空间上范数的定义为 $|u|_{W^{1,p(x)}}=|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}+|\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \forall u\in W^{1,p(x)}(\Omega)$。$W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 是 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 中的闭包。

下面给出变指数空间的一些性质（可以参考文献 [4-5] 和 [11]）。

性质 1　空间 $(L^{p(x)}(\Omega),|\cdot|_{L^{p(x)}(\Omega)}),(W^{1,p(x)}(\Omega),|\cdot|_{W^{1,p(x)}(\Omega)})$ 和 $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ 是自反的 Banach 空间。

性质 2　令 $q_1(x)$ 和 $q_2(x)$ 是实函数，$1/q_1(x)+1/q_2(x)=1$ 且 $q_1(x)>1$。$L^{q_1(x)}(\Omega)$ 是 $L^{q_2(x)}(\Omega)$ 的共轭空间。对于任意的 $u\in L^{q_1(x)}(\Omega)$ 和 $v\in L^{q_2(x)}(\Omega)$，有 $\left|\int_\Omega uv\mathrm{d}x\right|\leqslant 2|u|_{L^{q_1(x)}}(\Omega)|v|_{L^{q_2(x)}}(\Omega)$。

性质 3　$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}=1$，则 $\int_\Omega |u|^{p(x)}\mathrm{d}x=1$；$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}>1$，则 $|u|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega)}\leqslant\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant|u|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega)}$；$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}<1$，则 $|u|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega)}\leqslant\int_\Omega|u|^{p(x)}\mathrm{d}x\leqslant|u|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega)}$。

性质 4　如果 $p_1(x)\leqslant p_2(x)$，则 $L^{p_1(x)}\supset L^{p_2(x)}$。

性质 5　如果 $p(x)\in C(\bar{\Omega})$，则存在一个常数 $C>0$，使得 $|u|_{L^{p(x)}(\Omega)}\leqslant C|\nabla u|_{L^{p(x)}(\Omega)}, \forall u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$。

性质 6　如果 $p(x)\in C(\bar{\Omega})$，且 $p(x)\leqslant q(x)\leqslant np(x)/(n-p(x))$，则 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 嵌入到 $L^{q(x)}(\Omega)$。

1　主要结论

假设

$$\inf\left\{\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x : |u|=1\right\}>0, \tag{2}$$

其中 $F(u)=\int_0^u f(s)\mathrm{d}s$，$B$ 是满足下面嵌入不等式的常数，

$$\left(\int_\Omega rF(u)\mathrm{d}x\right)^{1/r}\leqslant B\|\nabla u\|_{p(x)}, u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega), \tag{3}$$

$B^{-1}=\inf\limits_{u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega)}\|\nabla u\|_{p(x)}/\left(\int_\Omega rF(u)\mathrm{d}x\right)^{1/r}$, $r\in(p(x),np(x)/(n-p(x)))$ 是一固定常数。

令

$$\alpha_1=B^{-r/(r-p(x))}, E_1=(1/p(x)-1/r)B^{-rp(x)/(r-p(x))}, \tag{4}$$

$$E(t)=\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x/p(x)-\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x, \tag{5}$$

$E'(t)=-\|u_t\|_2^2\leqslant 0, t\geqslant 0$。下面给出问题 (1) 解的存在定理，具体可参看文献 [6]。

定理 1　令 $u_0\in L^\infty(\Omega)\cap W_0^{1,p(x)}(\Omega), f(x,t,z)\in C^1(\bar{\Omega}\times[0,T]\times R)$，$|f(x,t,z)|\leqslant C_0(\varphi(x,t)+|z|^\alpha)$，$\alpha<p^--1$ 或 $\alpha=p^--1$ 且 $|\Omega|$（$|\Omega|$ 表示 Ω 的 Lebesgue 测度）是足够小的，问题 (1) 有一个弱解 $u\in L^\infty(Q_T)\cap L^\infty(0,T;W_0^{1,p(x)}(\Omega)), u_t\in L^2(\Omega\times(0,T))$，其中 $\varphi\geqslant 0$，$\varphi\in L^k(\Omega\times(0,T))$，$k>(N-p^-)/p^-$，$C_0$ 和 α 都是大于零的常数。

定理 2　令 f 是满足式 (2)、式 (3) 的 $C(R)$ 函数且

$$sf(s)\geqslant rF(s)\geqslant|s|^r, r>p^+>2, \tag{6}$$

假设初值 $E(0) < E_1$，$\|\nabla u_0\|_{p(x)} > \alpha_1$，则解 $u(x,t)$ 关于方程（1）在有限时间内爆破。其中，E_1,α_1 是正常数。

2 定理 2 的证明

引理 1 假设 u 是方程（1）的解，$E(0) < E_1$，$\|\nabla u_0\|_{p(x)} > \alpha_1$，则存在一个正常数 $\alpha_2 > \alpha_1$，使

$$\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant \alpha_2, \forall t \geqslant 0, \tag{7}$$

$$(r\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x)^{1/r} \geqslant B\alpha_2, \forall t \geqslant 0。\tag{8}$$

证明 由式（3）、式（5），有 $\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x/p(x) - E(t) \leqslant B^r\|\nabla u\|_{p(x)}^r/r$，

$$E(t) \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p(x)}/p(x) - B^r\|\nabla u\|_{p(x)}^r/r = \alpha^{p(x)}/p(x) - B^r\alpha^r/r := g(\alpha), \tag{9}$$

其中 $\alpha = \|\nabla u\|_{p(x)}$，则 $g'(\alpha) = \alpha^{p(x)-1}(1 - B^r\alpha^{r-p(x)})$。当 $\alpha > \alpha_1$ 时，$B^r\alpha^{r-p(x)} > B^r{\alpha_1}^{r-p(x)} = 1$，则 $g'(\alpha) < 0$，$g(\alpha)$ 为减函数；当 $0 < \alpha < \alpha_1$ 时，$B^r\alpha^{r-p(x)} < B^r{\alpha_1}^{r-p(x)} = 1$，则 $g'(\alpha) > 0$，$g(\alpha)$ 为增函数。所以 $g(\alpha)$ 在 α_1 处取得最大值。记 $g(\alpha_1) = E_1$，则 $E(0) < E_1$，所以存在 $\alpha_2 > \alpha_1$，使得 $g(\alpha_2) = E(0)$。令 $\alpha_0 = \|\nabla u_0\|_{p(x)}$，由式（9）有 $g(\alpha_0) \leqslant E(0) = g(\alpha_2)$，则 $\alpha_0 > \alpha_2 > \alpha_1$。

下面用反证法来证明式（7）。对于某 $t_0 > 0$，有 $\|\nabla u(\cdot,t_0)\|_{p(x)} < \alpha_2$，选取适当的 t_0 使得 $\|\nabla u(\cdot,t_0)\|_{p(x)} > \alpha_1$，则有 $E(t_0) \geqslant g(\|\nabla u(\cdot,t_0)\|_{p(x)}) > g(\alpha_2) = E(0)$。这与 $E(t)$ 是减函数矛盾。所以对于 $\forall t \geqslant 0$，$E(t) \leqslant E(0)$，则 $\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant \alpha_2$，式（7）成立。由式（5）有 $\|\nabla u\|_{p(x)}^{p(x)}/p(x) \leqslant E(0) + \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$，所以，$\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x \geqslant \|\nabla u\|_{p(x)}^{p(x)}/p(x) - E(0) \geqslant \alpha_2^{p(x)}/p(x) - E(0) = \alpha_2^{p(x)}/p(x) - \alpha_2^{p(x)}/p(x) + B^r\alpha_2^r/r = B^r\alpha_2^r/r$。有 $(r\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x)^{1/r} \geqslant B\alpha_2$，对于 $\forall t \geqslant 0$。即式（8）成立。

下面考虑 $E(0) < E_1$ 且 $\|\nabla u\|_{p(x)} \geqslant \alpha_1$。令

$$H(t) = E_1 - E(t), t \geqslant 0。\tag{10}$$

引理 2 对于 $\forall t \geqslant 0$，有 $0 < H(0) \leqslant H(t) \leqslant \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$。

证明 对于 $\forall t \geqslant 0$，有 $E'(t) \leqslant 0$。又 $H'(t) = -E'(t) \geqslant 0$，所以，

$$H(t) \geqslant H(0) = E_1 - E(0) > 0, t \geqslant 0。\tag{11}$$

由 $H(t) = E_1 - E(t)$ 和式（5）得：$H(t) = E_1 - \|\nabla u\|_{p(x)}^{p(x)}/p(x) + \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$。由引理 1 有：$E_1 - \|\nabla u\|_{p(x)}^{p(x)}/p(x) \leqslant E_1 - \alpha_1^{p(x)}/p(x) = -B^r\alpha_1^r/r < 0$，$\forall t \geqslant 0$。所以，

$$H(t) \leqslant \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x, \forall t \geqslant 0。\tag{12}$$

又由式（11）和式（12）得 $0 < H(0) \leqslant H(t) \leqslant \int_\Omega F(u)\mathrm{d}x$，引理 2 证毕。

下面证明定理 2。首先定义

$$G(t) = \int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x/2, \tag{13}$$

则 $G'(t) = \int_\Omega uu_t\mathrm{d}x = \int_\Omega u[\mathrm{div}(\nabla u)^{p(x)-2}\nabla u + f(u)]\mathrm{d}x = \int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)}\mathrm{d}x$。由式（5）和式（10）得：

$$G'(t) = \int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x - p(x)E(t) - p(x)\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x = \int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x - p(x)E_1 + p(x)H(t) - p(x)\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x。\tag{14}$$

由式（4）和式（8）得：

$$p(x)E_1 = p(x)(1/p(x) - 1/r)B^{-rp(x)/(r-p(x))} = (r-p(x))B^r\alpha_1^r/r = \alpha_1^r(r-p(x))B^r\alpha_2^r/(r\alpha_2^r) \leqslant \alpha_1^r(r-p(x))\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x/\alpha_2^r。\qquad(15)$$

由式（6）、式（14）和式（15）得：

$$G'(t) \geqslant \int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x - \alpha_1^r(r-p(x))\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x/\alpha_2^r + p(x)H(t) - p(x)\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x = \int_\Omega uf(u)\mathrm{d}x - [\alpha_1^r(r-p(x))/\alpha_2^r + p(x)]\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x + p(x)H(t) \geqslant \int_\Omega rF(u)\mathrm{d}x - (\alpha_1^r(r-p(x))/\alpha_2^r + p(x))\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x + p(x)H(t) = (1-\alpha_1^r/\alpha_2^r)(r-p(x))\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x + p(x)H(t) = C_0\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x + p(x)H(t) \geqslant 0,\qquad(16)$$

其中 $C_0 = (1-\alpha_1^r/\alpha_2^r)(r-p(x)) > 0$，$r > p(x)$ 且 $\alpha_2 \geqslant \alpha_1$。

下面估计 $G^{r/2}(t)$。由式（6）、式（13）和 Hölder 不等式得：

$$G^{r/2}(t) = \left(\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x/2\right)^{r/2} \leqslant \left[\left(\int_\Omega (u^2)^{r/2}\mathrm{d}x\right)^{2/r}\left(\int_\Omega 1^{r/(r-2)}\mathrm{d}x\right)^{(r-2)/r}/2\right]^{r/2} \leqslant C\int_\Omega u^r\mathrm{d}x = C\|u\|_r^r \leqslant rC\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x。\qquad(17)$$

由式（16）和式（17）得：

$$G'(t) \geqslant C_0\int_\Omega F(u)\mathrm{d}x + p(x)H(t) \geqslant C_0G^{r/2}(t)/(rC) + p(x)H(t) \geqslant \gamma G^{r/2}(t)。\qquad(18)$$

其中 $\gamma = C_0/(rC)$，对式（18）积分得：$G^{r/2-1}(t) \geqslant 1/[G^{1-r/2}(0) - (r/2-1)\gamma t]$，因此 G 在 $t^* \leqslant G^{r/2-1}(0)/[(r/2-1)\gamma]$ 时爆破，定理 2 证毕。

[参考文献]

[1] ZHAO J. Existence and nonexistence of solutions for $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$. J Math Anal Appl, 1993, 172: 130-146.

[2] NABANA E. Uniqueness for positive solutions of p-Laplace problem in an annulus. Ann Fac Sci Toulouse Math, 1999, 8(1): 143-154. DOI:10.5802/afst.926.

[3] DAMBROSIO W. Multiple solutions of weakly-coupled system with p-Laplacian operators. Results Math, 1999, 36(1): 34-54. DOI:10.1007/BF03322100.

[4] FAN X, ZHAO D. On the space $L^{P(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J Math Anal Appl, 2001, 263(2): 424-446.

[5] KOVÁCIK O, RÁKOSNIK J. On spaces $L^{P(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Math, 1991, 41(116): 592-618.

[6] LIAN S. Existence of solutions to an initial Dirichlet problem of evolutional $p(x)$-Laplace equations. Ann I H Poincare-AN, 2012, 29(3): 377-399. DOI:10.1016/j.anihpc.2012.01.001.

[7] FAN X, ZHANG Q. Existence of solution for $p(x)$-Laplace Dirichlet problem. Nonlinear Anal, 2003, 52(8): 1843-1852. DOI:10.1016/S0362-546X(02)00150-5.

[8] FAN X L, ZHANG Q H, ZHAO D. Eigenvalues of $p(x)$-Laplace Dirichlet problem. J Math Anal Appl, 2005, 302(2): 306-317. DOI:10.1016/j.jmaa.2003.11.020.

[9] FAN X, SHEN J, ZHAO D. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{m,p(x)}(\Omega)$. J Math Anal Appl, 2001, 262(2): 749-760.

[10] LIU W, WANG M. Blow-up of the solution for a p-Laplace equation with positive initial energy. Acta Appl Math, 2008, 103(2): 141-146. DOI:10.1007/S10440-008-9225-3.

[11] WU Z, ZHANG J, YI J. Nonlinear diffusion equations. Changchun: Jilin University Press, 1996.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）