[文章编号] 1007－7405(2016)05－0379－04

一类基尔霍夫型方程非平凡解的存在性

蓝永艺

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 考虑具有 Dirichlet 边值问题的非线性 Kirchhoff 型问题 $-(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u=f(x,u)$ 的非平凡解的存在性。在具有更一般增长性条件的非线性项 f 赋予适当的条件下，通过变分法和一些分析技巧给出了其非平凡解的存在性定理。

[关键词] Kirchhoff 型方程；变分法；P. S. 条件；山路引理
[中图分类号] O 177.91

Existence of Nontrivial Solutions to a Class of Kirchhoff Type Equation

LAN Yong-yi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper is devoted to the following nonlinear Kirchhoff type problem $-(a+b\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u=f(x,u)$ with the Dirichlet boundary value. The existence of a nontrivial solution for the Kirchhoff－type equations under suitable assumptions on the nonlinear term f with more general growth condition is proved by using the variational method and some analysis techniques.

Keywords: Kirchhoff type equation; variational methods; P. S. condition; mountain-pass Lemma

0　引言

考虑下面具有 Dirichlet 边值问题的 Kirchhoff 型方程：

$$\begin{cases}-(a+b\int|\nabla u|^2\mathrm{d}x)\Delta u=f(x,u), & x\in\Omega,\\ u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中，Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 的非空有界开集，且 $a,b>0$，$f(x,t)\in C(\Omega\times\mathbf{R})$，并且规定 Sobolev 空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的范数为：$\|u\|=(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{1/2}$，则问题（1）中的解可以等价于它所对应的能量泛函的临界点：$I(u)=a\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x/2+b(\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^2/4-\int_{\Omega}F(x,u)\mathrm{d}x$，其中 $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$。

对于问题（1）的可解性条件，近年来引起众多学者的广泛关注，出现了很多应用变分法来研究 Kirchhoff 型方程的文献[1－14]，并给出了很多非线性项 f 在无穷远点及零点的可解性条件。本文从不同的角度给出方程（1）的可解性条件。

[收稿日期] 2016－04－01　　[修回日期] 2016－04－22
[基金项目] 国家自然科学基金资助项目（11671331）；福建省自然科学基金资助项目（2015J01585）；集美大学科研启动基金资助项目（C614013）
[作者简介] 蓝永艺（1977—），男，讲师，博士，从事非线性泛函分析方向研究。

1 主要结果

定理 1 假设以下条件(F_1)—(F_4)成立:(F_1)对任意的 $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha(\varepsilon) > 0$,且使得 $|f(x,t)t| \leqslant \varepsilon |t|^{2^*} + \alpha(\varepsilon)$ 对 $\forall t \in \mathbf{R}, x \in \Omega$ 成立,其中 $2^* = 2N/(N-2) = 6$ 是 Sobolev 临界指数;(F_2)存在 $\theta \in (0,1/4)$, M 都为常数,且使得 $f(x,t)t \leqslant \theta t f(x,t)$,对 $\forall |t| \geqslant M$;(F_3) $\limsup\limits_{t\to 0}[f(x,t)/(t|t|^2)] \leqslant \lambda_1 b$,对 a. e. $x \in \Omega$ 一致;(F_4) $\liminf\limits_{t\to\infty}[f(x,t)/t|t|^2)] \geqslant \lambda_1 b + \varepsilon$,对 a. e. $x \in \Omega$ 一致,其中 $\varepsilon > 0$ 且为常数,$\lambda_1 = \inf\left\{\|u\|^4 : u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |u|^4 \mathrm{d}x = 1\right\} > 0$ 为方程

$$\begin{cases} -(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)\Delta u = \lambda u^3, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

的第一特征值[1],那么方程(1)至少会有一个非零解。

由定理 1 容易得到推论 1。

推论 1 设定理 1 中的条件(F_2)—(F_4)以及下列条件(F_1')成立,(F_1') $\lim\limits_{t\to\infty}[f(x,t)/(t|t|^{2^*-2})] = 0$,对 a. e. $x \in \Omega$ 一致成立,那么方程(1)至少会有一个非零解。

2 定理 1 的证明

证明过程应用山路引理,为此首先逐条验证应用山路引理的条件。

第一步:(P.S.)条件。设 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega)$ 是 P.S-序列,也就是说 $\{u_n\}$ 满足:$I(u_n)$ 有界,$I'(u_n) \to 0$,当 $n \to \infty$。要证明 $\{u_n\}$ 存在强收敛的子列 $\{u_{n_j}\}$,回顾泛函 I 为 $I(u) = a\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x/2 + b(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x)^2/4 - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x$,且是 C^1,它的导数为:$\langle I'(u), v\rangle = (a + b\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x$,其中 $u, v \in H_0^1(\Omega)$。

以下先证明 $\{u_n\}$ 是有界的。事实上,当(F_2)这个条件满足后,且 f 的连续性对充分大的 n,$C, C_1, C_2 > 0$ 时,有:$C \geqslant I(u_n) - \theta\langle I'(u_n), u_n\rangle = (a/2 - \theta a)\|u_n\|^2 + (b/4 - \theta b)\|u_n\|^4 + \int_\Omega (\theta u_n f(x,u_n) - F(x,u_n))\mathrm{d}x \geqslant (a/2 - \theta a)\|u_n\|^2 + (b/4 - \theta b)\|u_n\|^4 + \int_{|u_n(x)| \geqslant C_1} (\theta u_n f(x,u_n) - F(x,u_n))\mathrm{d}x - C_2$。又因为假设中有 $I'(u_n) \to 0$,所以有 $|\langle I'(u_n), u_n\rangle| < \|u_n\|$,当 n 充分大时,所以由此得 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 是有界的。

接下来证明 $\{u_n\}$ 有强收敛的子列。因为 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 有界,则由连续嵌入定理,有:$\|u_n\|_{2^*}^{2^*} \leqslant C_1 < \infty$,对任意的 n 成立,且存在 $\{u_n\}$ 的子列,仍然把它记为 $\{u_n\}$,那么有:u_n 弱收敛于 u 在 $H_0^1(\Omega)$,且 $u_n \to u$ 在 $L^r(\Omega)$ 中,这里的 $2 \leqslant r < 2^*$。又因为(F_1)条件,所以对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha(\varepsilon) > 0$,会使得:$|f(x,t)| \leqslant \varepsilon |t|^{2^*}/(2C_1) + \alpha(\varepsilon)$,对 $\forall t \in \mathbf{R}$, a. e. $x \in \Omega$.。接下来令 $\delta = \varepsilon/(2a(\varepsilon)) > 0$, $E \subseteq \Omega$, $mesE < \delta$,则有 $\left|\int_E f(x,u_n)u_n \mathrm{d}x\right| \leqslant \int |_E f(x,u_n)u_n| \mathrm{d}x \leqslant \int_E \alpha(\varepsilon)\mathrm{d}x + \varepsilon\int_E |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x/(2C_1) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$,所以 $\left\{\int_\Omega f(x,u_n)u_n \mathrm{d}x, n \in \mathbf{N}\right\}$ 是等度连续的,又由 Vitali 收敛定理,有

$$\int_\Omega f(x,u_n)u_n \mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x。\tag{3}$$

再由(F_1)条件,对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha(\varepsilon) > 0$,会使得:$|f(x,t)| \leqslant \varepsilon |t|^{2^*-1}/(2c_1c_2) + \alpha(\varepsilon)$,对 $\forall t \in \mathbf{R}$,

$x \in \Omega$。这里 $c_1 \geqslant (\int_\Omega |u_n|^{2^*} \mathrm{d}x)^{(2^*-1)/2^*}$,对 $\forall n$ 成立;$c_2:=(\int_\Omega |u|^{2^*} \mathrm{d}x)^{1/2^*}$ 是正常数,则由 Holders 不等式,对 $\forall E \subseteq \Omega$ 时有:

$$\int_E |u_n|^{2^*-1}|u|\mathrm{d}x \leqslant (\int_E |u_n|^{2^*-1}\mathrm{d}x)^{(2^*-1)/2^*}(\int_E |u|^{2^*}\mathrm{d}x)^{1/2^*} \leqslant c_1c_2。$$

再令 $\delta=(\varepsilon/(2c_1a(\varepsilon)))^{2^*/(2^*-1)}>0, E \subseteq \Omega, mesE<\delta$, 则有:

$$\left|\int_E f(x,u_n)u\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E\left|f(x,u_n)u\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_E \alpha(\varepsilon)|u|\mathrm{d}x+\varepsilon\int_E |u_n|^{2^*-1}|u|\mathrm{d}x/(2c_1c_2) \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon,$$

所以,$\left\{\int_\Omega f(x,u_n)u\mathrm{d}x, n \in \mathbf{N}\right\}$ 也是等度连续的,再依然由 Vitali 收敛定理,会有

$$\int_\Omega f(x,u_n)u\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x,u)u\mathrm{d}x。\tag{4}$$

又因为

$$\langle I'(u_n),u\rangle=(a+b\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u_n)u\mathrm{d}x \to 0,\tag{5}$$

$$\langle I'(u_n),u_n\rangle=(a+b\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla u_n\mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u_n)u_n\mathrm{d}x \to 0,\tag{6}$$

所以由式(3)—式(6),有 $\|u_n\| \to \|u\|$ 。又由 Kadec - Klee 性质,可得 $u_n \to u$,在 $H_0^1(\Omega)$ 。

第二步:证明满足山路几何结构。验证:存在正常数 α,ρ ,使得

$$I|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha,\tag{7}$$

这里的 B_ρ 是中心为 θ、半径为 ρ 的球。事实上,在(F_3)条件中,蕴含了 $\exists$ 常数 $\delta>0$,会使得:$f(x,t)/t^3 \leqslant \lambda_1 b$,当 $0<|t|<\delta$。从而 $F(x,t) \leqslant \lambda_1 bt^4/4$,当 $|t|<\delta$。则再由(F_1)条件,即可得常数 C_1 使得对 $\forall t \in \mathbf{R}$,都有 $F(x,t) \leqslant \lambda_1 bt^4/4+C_1|t|^{2^*}$,这里 $\|u\|^4 \geqslant \lambda_1\|u\|_4^4$ 对 $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ 。所以,

$$I(u)=a\|u\|^2/2+b\|u\|^4/4-\int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x \geqslant a\|u\|^2/2+b\|u\|^4/4-\lambda_1 b\int_\Omega u^4\mathrm{d}x/4-$$

$$c\int_\Omega |u|^6\mathrm{d}x \geqslant a\|u\|^2/2-c\|u\|^6。$$

这样即说明了,$\exists \gamma$ 和 ρ 会满足 $I(u) \geqslant \rho$,当 $\|u\|=\gamma$ 时。因为(F_4)条件,所以存在 $C_3>0$,使得 $F(x,t)>(\lambda_1 b+c)t^4/4-C_3, \forall x \in \Omega, \forall t>0$。所以有:

$$I(t\varphi_1)=at^2\|\varphi_1\|^2/2+bt^4\|\varphi_1\|^4/4-\int_\Omega F(x,t\varphi_1)\mathrm{d}x \leqslant at^2\|\varphi_1\|^2/2+bt^4\|\varphi_1\|^4/4-$$

$$(\lambda_1 b+c)\int_\Omega \varphi_1^4\mathrm{d}x/4+c|\Omega| \to -\infty,$$

当 $t \to \infty$,这里的 φ_1 是方程(2)的第一特征值 λ_1 对于的特征函数。

取定足够大的 $t>0$,且使得 $I(t\varphi_1)<0$ 及 $t\|\varphi_1\|>\gamma$。再令 $u_1:=t\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$,所以 $\exists \gamma$ 和 $\rho>0$,使得 $I(u_1)<0, \|u_1\|>\gamma$ 且式(7)成立,由此即证得能量泛函 I 具有山路几何结构。

第三步:泛函 I 的临界值。u_1 为第二步中得到的,定义 $\Gamma:=\{\gamma:C[0,1] \to H_0^1(\Omega) \mid \gamma(0)=0,\gamma(1)=u_1\}$。$c_0:=\inf\limits_{\gamma \in \Gamma}\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} I(\gamma(t))$,则 c_0 为泛函 I 的临界值。由山路引理即可以求得方程(1)的非平凡解。

[参考文献]

[1] ZHANG Z T, PERERA K. Sign changing solutions of Kirchhoff type problems via invariant sets of descent flow. J Math Anal Appl, 2006, 317(2): 456-463. DOI: 10.1016/j.jmaa.2005.06.102.

[2] CHEN C Y, KUO Y C, WU T F. The Nehari manifold for a Kirchhoff type problem involving sign-changing weight func-

tions. J Differential Equations, 2011, 250(4): 1876-1908. DOI:10.1016/j. jde. 2010. 11. 017.
[3] HE Y, LI G, PENG S. Concentrating bound states for Kirchhoff type problem in involving critical Sobolev exponents. Adv Nonlinear Stud, 2014, 14(2): 441-468. DOI:10.1016/ans-2014-0214.
[4] HE X, ZOU W. Infinitely many positive solutions for Kirchhoff type problems. Nonlinear Anal, 2009, 70(3): 1407-1414. DOI:10.1016/j. na. 2008. 02. 021.
[5] HE X, ZOU W. Existence and concentration behavior of positive solutions for a Kirchhoff type equations in R^3. J Differential Equations, 2012, 252(2): 1813-1834. DOI:10.1016/j. jde. 2011. 08. 035.
[6] LIU W, HE X. Multiplicity of high energy solutions for superlinear Kirchhoff equations. J Appl Math Comput, 2012, 39(1/2): 473-487. DOI:10.1007/s12190-012-0536-1.
[7] LI Y, LI F, SHI J. Existence of a positive solution to Kirchhoff type problems without compactness conditions. J Differential Equations, 2012, 253(3): 2285-2294. DOI:10.1016/j. jde. 2012. 05. 017.
[8] LI G B, YE H Y. Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in R^3. J Differential Equations, 2014, 257(2): 566-600. DOI:10.1016/j. jde. 2014. 04. 011.
[9] LI G B, YE H Y. Existence of positive solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in with critical Sobolev exponent. Math Meth Appl Sci, 2014, 37: 2570-2584.
[10] AROSIO A, PANIZZI S. On the well-posedness of the Kirchhoff string. Trans Amer Math Soc, 1996, 49(1): 305-330.
[11] LI L, SUN J J. Existence and multiplicity of solutions for the Kirchhoff equations with asymptotically linear nonlinearities. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2015, 26: 391-399. DOI:10.1016/j. nonrwa. 2015. 07. 002.
[12] XIE Q L, WU X P, TANG C L. Existence and multiplicity of solutions for Kirchhoff type problem with critical exponent. Commun Pure Appl Anal, 2013, 12(6): 2773-2786. DOI:10.3934/cpaa. 2013. 12. 2773.
[13] SUN J J, TANG C L. Existence and multipicity of solutions for Kirchhoff type equations. Nonlinear Anal, 2011, 74(4): 1212-1222. DOI:10.1016/j. na. 2010. 09. 061.
[14] LAN Y Y. Existence of solutions to a class of Kirchhoff type equation with a general subcritical nonlinearity. Mediterr J Math, 2015, 12(3): 851-861. DOI:10.1007/s00009-014-0453-7.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)