[文章编号] 1007－7405(2016)06－0471－03

p－拉普拉斯抛物型方程解的稳定性

许文彬

（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

[摘要] 探讨拉普拉斯抛物型方程解的稳定性质，说明了当扩散系数 $0 < \alpha < p-1$ 时，可以赋予通常的边界条件。而当 $\alpha \geqslant p-1$ 时，只要能选出一个合适的测试函数，即使没有边界条件，解的稳定性也总是成立。

[关键词] p－拉普拉斯；边界退化；稳定性
[中图分类号] O 175.26

On the Stability of a Parabolic Equation Related to the p－Laplacian

XU Wen-bin

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper presents stability properties of solutions of a parabolic equation related to the p－Laplacian. If the diffusion coefficient $0 < \alpha < p-1$, then the boundary value condition can be imposed as usual. While $\alpha \geqslant p-1$, the stability of the solutions always can be established without any boundary condition.

Keywords: p－Laplacian; boundary degeneracy; stability

0　引言

考虑 p－拉普拉斯方程

$$u_t = \mathrm{div}(\rho^{\alpha} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + f(u,x,t), (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 上具有适当光滑边界的有界域，$\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega), \rho > 1, \alpha > 0$。Yin 等[1]首先研究了方程

$$u_t = \mathrm{div}(\rho^{\alpha} |\nabla u|^{p-2} \nabla u), \tag{2}$$

从中可以发现扩散系数 ρ^{α} 对方程解的影响。特别地，当 $\alpha > p-1$ 时，没有边界条件下也可以得到解的唯一性。换句话说，方程的解完全取决于初值。文献 [2－3] 研究了下列方程

$$u_t = \mathrm{div}(\rho^{\alpha} |\nabla u|^{p-2} \nabla u) + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \partial b_i(u)/\partial x_i, (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$

研究结果表明，考虑方程（3）的稳定性，不需要使用完整的边界条件

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T)。 \tag{4}$$

只要局部边界条件

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \sum\nolimits_p \times (0,T) \tag{5}$$

[收稿日期] 2016－04－18　　[修回日期] 2016－06－12
[作者简介] 许文彬（1963—），男，副教授，从事偏微分方程研究。

就可以了。其中 $\sum_p \subseteq \partial\Omega$，$\sum_p$ 由一阶导数项 $\partial b_i(u)/\partial x_i$ 决定。当然，初值条件

$$u(x,0)=u_0(x) \tag{6}$$

总是必要的。

定义 1 函数 $u(x,t)$ 称为方程（1）具有初值（6）的弱解，如果 $u\in L^{\infty}(Q_T),u_t\in L^2(Q_T)$，$\rho^{\alpha}|\nabla u|^p\in L^1(Q_T)$，对于任意函数 $\varphi\in C_0^{\infty}(Q_T)$，积分 $\iint_{Q_T}[-u\varphi_t+\rho^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi-f(u,x,t)\varphi]\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0$ 恒成立。初值满足：

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}u(x,t)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{\Omega}u_0(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\forall\varphi(x)\in C_0^{\infty}(\Omega)。$$

首先，采用类似于文献［1-3］的方法，可以容易地得到弱解的存在性。本文将文献［1］的结果推广到方程（1）上，并论证方程解的稳定性。

1 主要结果

本文的主要结果是下面的定理 1 和定理 2。

定理 1 设 $0<\alpha<p-1$，且 $u_0\in L^{\infty}(\Omega)$，$\rho^{\alpha}|\nabla u_0|^p\in L^1(\Omega)$，$f(s,x,t)$ 是利普希茨函数，则问题（1）、(4)、(6）的解是唯一的。

定理 2 设 $\alpha\geqslant p-1$，无需任何边值条件，如果 $u_0\in L^{\infty}(\Omega)$，$\rho^{\alpha}|\nabla u_0|^p\in L^1(\Omega)$，$f(s,x,t)$ 是利普希茨函数，则问题（1）、(6）的解是唯一的。

实际上，可以得到解的稳定性，即：若 u,v 是满足定理 1 或定理 2 条件的两个解，则有：

$$\int_{\Omega}|u(x,t)-v(x,t)|^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}|u_0(x)-v_0(x)|^2\mathrm{d}x,\forall t\in[0,T]。$$

其他的一些相关的研究，可参考文献［4-11］等。

2 定理的证明

2.1 定理 1 的证明

设 u 和 v 是第一初边值问题（1）、(4)、(6）具有初值 $u(x,0)$、$v(x,0)$ 的两个弱解。首先，由于 $0<\alpha<p-1$，从文献［1-3］知，此时存在一常数 $\gamma>1$ 使得

$$\iint_{Q_T}|\nabla u|^{\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c,\ \iint_{Q_T}|\nabla v|^{\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leqslant c, \tag{7}$$

所以边值条件是合理的。现在证明唯一性。通过光滑化，可以选取 $(u-v)$ 作为式（7）的检验函数。这样，$\int_{\Omega}(u-v)\partial(u-v)/\partial t=-\int_{\Omega}\rho^{\alpha}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla(u-v)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{\Omega}(f(u,x,t)-f(v,x,t))(u-v)\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}\int_{\Omega}(u-v)^2\mathrm{d}x/\mathrm{d}t\leqslant c\int_{\Omega}(u-v)^2\mathrm{d}x$。由 Gronwall 不等式知道，$\int_{\Omega}(u(x,t)-v(x,t))^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{\Omega}(u(x,0)-v(x,0))^2\mathrm{d}x$。由此易知解的唯一性成立。定理 1 证毕。

2.2 定理 2 的证明

记 $\Omega_{\varepsilon}=\{x\in\Omega|\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$。取 $\xi_{\varepsilon}\in C_0^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$ 使得 $\Omega_{2\varepsilon}$ 上 $\xi=1$，$0\leqslant\xi_{\varepsilon}\leqslant 1$，且

$$|\nabla\xi_{\varepsilon}|\leqslant C/\varepsilon, \tag{8}$$

这里 C 是与 ε 无关的正常数。设 u 和 v 是初值问题（1）、(6）的两个弱解。由解的定义，有：

$$\iint_{Q_T}\varphi\partial(u-v)/\partial t\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\iint_{Q_T}\rho^{\alpha}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u-|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\iint_{Q_T}[f(u,x,t)-f(v,x,t)]\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{9}$$

对任何 $\varphi\in C_0^{\infty}(Q_T)$ 成立。对任意固定 $s\in[0,T]$，通过光滑化，可以选取 $\chi_{[0,s]}(u-v)\xi_{\varepsilon}$ 作为式（9）的检验函数，这里 $\chi_{[0,s]}$ 在 $[0,s]$ 上是特征函数。由式（8），利用 Hölder 不等式，

$$\iint_{Q_s}(u-v)\xi_\varepsilon \partial(u-v)/\partial t \mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\iint_{Q_s}\rho^\alpha(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla((u-v)\xi_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_s}[f(u,x,t)-f(v,x,t)](u-v)\xi_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

于是，

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (u(x,s)-v(x,s))^2\xi_\varepsilon \mathrm{d}x - \int_\Omega (u(x,0)-v(x,0))^2\xi_\varepsilon \mathrm{d}x = \\ &-\iint_{Q_s}\rho^\alpha(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v)\cdot\nabla\xi_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \iint_{Q_s}[f(u,x,t)-f(v,x,t)]\xi_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant \\ &c\left(\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_{2\varepsilon}}\rho^\alpha(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p}\cdot\left(\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_{2\varepsilon}}\rho^\alpha|\nabla\xi_\varepsilon|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p} + \\ &\iint_{Q_s}[f(u,x,t)-f(v,x,t)]\xi_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant c\left(\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_{2\varepsilon}}\rho^\alpha(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{(p-1)/p}\cdot \\ &\left(\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_{2\varepsilon}}\varepsilon^{\alpha-p}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p} + \iint_{Q_s}[f(u,x,t)-f(v,x,t)]\xi_\varepsilon \mathrm{d}x\mathrm{d}t。\end{aligned} \tag{10}$$

因为 $\alpha \geqslant p-1$，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_{2\varepsilon}}\rho^\alpha(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p)\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{(p-1)/p} = 0$，$(\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_{2\varepsilon}}\varepsilon^{\alpha-p}\mathrm{d}x\mathrm{d}t)^{1/p} \leqslant c$，在式(10)中令 $\varepsilon\to 0$，得到 $\int_\Omega (u(x,s)-v(x,s))^2\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega (u(x,0)-v(x,0))^2\mathrm{d}x + c\int_0^s\int_\Omega |u-v|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t$。由 Gronwall 不等式知道，$\int_\Omega (u(x,s)-v(x,s))^2\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega (u(x,0)-v(x,0))^2\mathrm{d}x$。由此同样易知解的唯一性成立。定理 2 证毕。

[参考文献]

[1] YIN J X，WANG C P. Properties of the boundary flux of a singular diffusion process. Chin Ann Math，2004，25B(2)：175-182. DOI:10.1142/S0252959904000184.

[2] 詹华税，袁洪君. 边界退化的对流扩散方程. 吉林大学学报（理学版），2015，53(3)：353-358.

[3] ZHAN H S. The boundary value condition of an evolutionary $p(x)$ -Laplacian equation. Boundary Value Problems，2015(1)：1-24. DOI:10.1186/s13661-015-0377-6.

[4] ZHAO J N. Existence and nonexistence of solutions for $u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$. J Math Anal Appl，1993，172(1)：130-146.

[5] WANG J，GAO W，SU M. Periodic solutions of non-Newtonian polytropic filtration equations with nonlinear sources. Applied Mathematics and Computation，2010，216：1996-2009. DOI:10.1016/j.amc.2010.03.030.

[6] LEE K，PETROSYAN A，VAZQUEZ J L. Large time geometric properties of solutions of the evolution p-Laplacian equation. J Diff Equ，2006，229：389-411. DOI:10.1016/j.jde.2005.07.028.

[7] YIN J X，WANG C P. Evolutionary weighted p-Laplacian with boundary degeneracy. J Diff Equ，2007，237：421-445. DOI:10.1016/j.jde.2007.03.012.

[8] BENEDIKT J，PETER G，KOTRLA L，et al. Nonuniqueness and multi-bump solutions in parabolic problems with the p-Laplacian. J Diff Equ，2016，260：991-1009. DOI:10.1016/j.jde.2015.09.015.

[9] ANTONTSEV S，SHMAREV S. Anisotropic parabolic equations with variable nonlinearity. Publ Mat，2009，53：355-399. DOI:10.5565/PUBLMAT_53209_04.

[10] ANTONTSEV S N，SHMAREV S I. Parabolic equations with double variable nonlinearities. Math And Comp in Simulation，2011，81：2018-2032. DOI:10.1016/j.matcom.2010.12.015.

[11] 詹华税. 对流扩散方程的解. 数学年刊，2013，34A(2)：235-256.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）