［文章编号］1007－7405(2016)06－0460－06

三维仿射非线性临界动态系统的局部解析镇定

辛云冰
（集美大学理学院，福建 厦门 361021）

［摘要］针对三维仿射非线性解析动态系统在临界情形假设下局部渐近镇定性，假设三维系统在解析的情况下，给出了三维系统如何构造 V 函数（李雅普诺夫函数），并确定 V 函数和反馈控制函数的一般方法，得出了判别的临界解析动态系统局部渐近镇定的充分条件。

［关键词］非线性系统；临界条件；李雅普诺夫 V 函数；局部渐近镇定
［中图分类号］O 175.14

Local Asymptotic Stabilizability of 3－dimension Nonlinear Analytic Dynamic Systems

XIN Yun-bing
(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: This paper studies the local asymptotic stabilizability of the 3－dimension nonlinear analytic dynamic system, which is assumed to be a critical situation. Assume that the 3－dimension system is under the resolved situation, the study inferred the general method to construct the V－function (Lyapunov's function) and confirm the V－function and feedback control function in 3－dimension system. This study gives out the sufficient condition to distinguish the local asymptotic stabilizability in critical analytic dynamic system.

Keywords: nonlinear system; critical condition; Lyapunov's V－function; local asymptotic stabilizability

0 引言

关于非线性系统的局部镇定问题的研究，有很多成果[1－4]。文献［2］对二维系统的纯临界控制系统渐近镇定进行了研究。文献［5］利用中心流形定理的方法对带有临界情形的系统的局部镇定进行了研究。还有人利用纯临界情形的解析动态系统局部渐近稳定性分别对二维[6－8]和三维[9－11]进行了讨论，并得到一些结果。文献［12］利用李雅普诺夫泛涵和平均值不等式的方法，得到了一类神经网络系统的全局渐近稳定性。

对一般仿射非线性控制系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{f}(0)=0$，$\boldsymbol{g}(0)=0$，$\boldsymbol{f}(x)$，$g_i\in C^{\infty}$，$i=1,2,\cdots,m$；$\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$，$\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$，$m\leqslant n$。

［收稿日期］2016－04－13 ［修回日期］2016－06－24
［基金项目］国家自然科学基金资助项目（10771001）；福建省自然科学基金资助项目（A0440005）
［作者简介］辛云冰（1960—），男，副教授，从事泛函微分方程、非线性控制理论的研究。

由文献［3］，要得到系统（1）零解局部光滑可镇定，可基于系统（1）一次近似的不可控模态实部要求非正为必要条件之一。也就是当 $\sigma(A \mid V) \subset \boldsymbol{C}^-$ 时，得到系统（1）在线性反馈下局部是指数型可镇定的。而如果要得到系统（1）的局部光滑非指数型可渐近镇定，只有当 $\sigma(A \mid V) \cap \boldsymbol{C}^- \neq \Phi$ 时才能有相应的结果，显然系统镇定的条件很难实现。

注 1　$\sigma(A \mid V) \subset \boldsymbol{C}^- + \boldsymbol{C}^0$，其中 $\boldsymbol{C}^- = \{\lambda \in \boldsymbol{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$，$\boldsymbol{C}^0 = \{\lambda \in \boldsymbol{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda = 0\}$。

为了得到系统（1）的镇定性，由有关理论知，系统（1）的局部光滑可渐近镇定问题等价地归结为如下系统（2）的纯临界情形局部光滑镇定问题。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = Ax + \bar{\boldsymbol{f}}(x) + \bar{\boldsymbol{g}}(x)\cdot\boldsymbol{u}, \tag{2}$$

其中：$\bar{\boldsymbol{f}}(0) = 0$；$D\bar{\boldsymbol{f}}(0) = 0$；$\bar{\boldsymbol{g}}(0) = 0$；$\boldsymbol{\sigma}(A) \subset \boldsymbol{C}^0$。

在自由动态（即 $\boldsymbol{u} = 0$）状态下讨论系统（2）的稳定性是研究难点之一。文献［9］在 $n = 3$ 讨论系统（2）在 $\boldsymbol{u} = 0$ 时得到了稳定性。文献［5］利用系统（1）的中心流形或近似中心流形讨论了系统（2）的镇定问题。而文献［10］利用联级形式研究了三维控制系统的渐近镇定。本文对系统（2）的镇定问题的讨论采用了形式级数法的思想。

现考察下列三维非线性解析临界动态系统的标准形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = y + P(x,y,z) + g^1(x,y,z)\boldsymbol{u}, \\ \dot{y} = -x + Q(x,y,z) + g^2(x,y,z)\boldsymbol{u}, \\ \dot{z} = + H(x,y,z) + g^3(x,y,z)\boldsymbol{u}, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $P,Q,H,\boldsymbol{g} = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \\ g^3 \end{pmatrix}$ 关于 $Z = (x,y,z)$ 是解析的，且 $(P,Q,H)(0) = 0$，$\partial(P,Q,H)/\partial Z(0) = 0$，$\boldsymbol{g}(0) = 0$。对一般的三维非线性解析临界系统 $\dot{Z} = AZ + \bar{\boldsymbol{f}}(Z) + \bar{\boldsymbol{g}}(Z)\boldsymbol{u}$，$\sigma(A) = \{\pm\omega\cdot \mathrm{i}, 0\}$，$\omega > 0$，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，可作如下变换使之具有系统（3）的形式。

由线性代数知识可知，对于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 存在一个非奇异的矩阵 $\boldsymbol{S} \in \boldsymbol{M}^{3\times 3}$，使得 $\boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}$。

令 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U}$，则 $\dot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{S}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U} + \boldsymbol{S}^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{S}^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U})\boldsymbol{u}$。再令 $v = \omega\cdot t$，便得到：$\mathrm{d}U/\mathrm{d}v = \boldsymbol{A}_0\cdot\boldsymbol{U} + \boldsymbol{f}(U) + \boldsymbol{g}(U)\boldsymbol{u}$，其中 $\boldsymbol{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\omega\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{S}^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U})$，$\omega\cdot\boldsymbol{g}(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{S}^{-1}\cdot\bar{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{U})$。

由上面的推导可以看出，系统（2）就化成了标准形式系统（3）。

1　三维解析临界动态系统的设计

对于系统（3），下面给出设计解析的状态反馈。

设 $\boldsymbol{f}$，$\boldsymbol{g}$ 及反馈 $\boldsymbol{u}$ 的形式分别为：$\boldsymbol{f} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n$，$\boldsymbol{g} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$，$\boldsymbol{u} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中 $\boldsymbol{f}_n$，$\boldsymbol{u}_n$，$\boldsymbol{g}_n$ 分别为 $Z = (x,y,z)$ 的以 n 次齐次多项式为元素的向量矩阵函数。

记 $\boldsymbol{gu} = \sum_{n=2}^{\infty} \boldsymbol{h}_n$，$\boldsymbol{h}_n = \sum_{i=1}^{n-1} g_i u_{n-i}$，可见 h_n 的求和式中仅含有 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$ 项。

设 $\boldsymbol{f}_n = \begin{pmatrix} P_n \\ Q_n \\ H_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{h}_n = \begin{pmatrix} h_n^1 \\ h_n^2 \\ h_n^3 \end{pmatrix}, n \geqslant 2$，并且 P_n、Q_n、H_n、h_n^1、h_n^2、h_n^3 均为 $Z = (x,y,z)$ 的 n 次齐次多项式，则系统（3）可写成：

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \sum_{n\geqslant 2} P_n(x,y,z) + \sum_{n\geqslant 2} h_n^1(x,y,z,u_1,\cdots,u_{n-1}), \\ \dot{y} = -x + \sum_{n\geqslant 2} Q_n(x,y,z) + \sum_{n\geqslant 2} h_n^2(x,y,z,u_1,\cdots,u_{n-1}), \\ \dot{z} = \sum_{n\geqslant 2} H_n(x,y,z) + \sum_{n\geqslant 2} h_n^3(x,y,z,u_1,\cdots,u_{n-1})。 \end{cases} \tag{4}$$

根据文献［6］，如果已求出 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$，使

$$\dot{Z} = A_0 Z + \sum_{i=2}^{n} f_i + \sum_{i=2}^{n} h_i \tag{5}$$

的零解是局部渐近稳定的。则令 $u_j = 0, j \geqslant n$，便有 $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i$ 局部镇定系统（4）。

下面讨论如何求取 $u_i\ (i = 1,2,\cdots,n-1)$，使系统（5）、式（4）的零解渐近稳定。

取系统（4）的李雅普诺夫函数形式为

$$V = (x^2 + y^2 + z^2)/2 + \sum_{n\geqslant 3} V_n(x,y,z), \tag{6}$$

其中 V_n 为被选函数，是 (x,y,z) 的 n 次齐次多项式。从式（6）的选取可以看出，怎样选取 V_n 都能在一个原点的领域使 V 为正定的，这也是上述李雅普诺夫函数的优点。为确定 V_n，先计算 V 沿系统（4）的导数，

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{V}}_{(2,1)} &= x(y + \sum_{n\geqslant 2}(P_n + h_n^1)) + y(-x + \sum_{n\geqslant 2}(Q_n + h_n^2)) + z\sum_{n\geqslant 2}(H_n + h_n^3) + \sum_{n\geqslant 3}[(y + \sum_{k\geqslant 2}(P_k + h_k^1))\partial V_n/\partial x + \\ &\quad (-x + \sum_{k\geqslant 2}(Q_k + h_k^2))\partial V_n/\partial y + \sum_{k\geqslant 2}(H_k + h_k^3)\partial V_n/\partial z] = \sum_{n\geqslant 2}[x(P_n + h_n^1) + y(Q_n + h_n^2) + \\ &\quad z(H_n + h_n^3)] + \sum_{n\geqslant 3}(y\partial V_n/\partial x - x\partial V_n/\partial y) + \sum_{n\geqslant 3}\sum_{k\geqslant 2}[(P_k + h_k^1)\partial V_n/\partial x + (Q_k + h_k^2)\partial V_n/\partial y + \\ &\quad (H_k + h_k^3)\partial V_n/\partial z]。 \end{aligned}$$

若记 $\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$，$\boldsymbol{F}_k = (P_k + h_k^1, Q_k + h_k^2, H_k + h_k^3)^{\mathrm{T}}$，$G_n(x,y,z,u_1,u_2,\cdots,u_{n-2}) = (x,y,z)\cdot \boldsymbol{F}_{n-1} + \sum_{k=3}^{n-1} \nabla V_k \cdot \boldsymbol{F}_{n+1-k}\ (n \geqslant 4)$，$G_3 = (x,y,z)\cdot \boldsymbol{F}_2$，则 $G_n\ (n \geqslant 3)$ 解析的，并且 $\dot{\boldsymbol{V}} = [G_3 - (x\partial V_3/\partial y - y\partial V_3/\partial x)] + \sum_{n\geqslant 4}[G_n - (x\partial V_n/\partial y - y\partial V_n/\partial x)]$。

考察 $\dot{\boldsymbol{V}} = 0$，得到

$$x\partial V_3/\partial y - y\partial V_3/\partial x = G_3, \tag{7}$$

$$x\partial V_n/\partial y - y\partial V_n/\partial x = G_n, n \geqslant 4。 \tag{8}$$

由 h_n 关于 u_k 的关系知式(7)右边仅含 u_1，同时由 G_n, V_n 的性质知，只要选取 u_1 并从式(7)中求出 V_3，则对式(8)可用归纳法选取 u_{n-2} 并求出 V_n。

不妨设已求出 $u_1,\cdots,u_{n-3}$ 及 $V_3,\cdots,V_{n-1}$，下面从式(8)中确定出 u_{n-2} 及 V_n。

设 $V_n(x,y,z) = \sum_{k=0}^{n}(\sum_{i=0}^{k} a_{i,k}^n \cdot x^i y^{k-i}) z^{n-k}$，则 $x\partial V_n/\partial x - y\partial V_n/\partial x = \sum_{k=1}^{n}[\sum_{i=0}^{k-1}(k-i)a_{i,k}^n x^{i+1} y^{k-i-1} - \sum_{i=1}^{k} i a_{i,k}^n x^{i-1} y^{k-i+1}] z^{n-k}$。显然右端是 z 的 $n-1$ 次多项式。

设 $u_{n-2} = \sum_{i+j+k=n-2} \boldsymbol{c}_{i,j,k} x^i y^j z^k$，$\boldsymbol{c} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\boldsymbol{c}_{i,j,k}: i + j + k = n-2\}$（即将 u_{n-2} 中的系数视为向量 $\boldsymbol{c}$），$G_n =$

$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} b_{i,k}^{n}(\boldsymbol{c}) \cdot x^{i} \cdot y^{k-i}\right) \cdot z^{n-k}$，则 G_n 是 z 的 n 次多项式，首项系数为 $b_{0,0}^{n}(\boldsymbol{c})$。若将 $\boldsymbol{c}$ 看成已知，则 $b_{i,k}^{n}(\boldsymbol{c})$ 也为已知，从而 G_n 也为已知。

若对任何 $\boldsymbol{c}, b_{0,0}^{n}(\boldsymbol{c}) \neq 0$，则式（8）不可能成立。

设有 $\boldsymbol{c}$ 使 $b_{0,0}^{n}(\boldsymbol{c})=0$，则式（8）成立时，对任何 $k(1 \leqslant k \leqslant n)$ 成立

$$(k-i+1) a_{i-1,k}^{n}-(i+1) a_{i+1,k}^{n}=b_{i,k}^{n}(\boldsymbol{c}), i=0,1,\cdots,k, \tag{9}$$

其中 $a_{i,k}^{n}=0$，当 $i<0$ 或 $i>k$。

对固定的 n、k，式（9）表示为 $k+1$ 个元的线性方程组（将 $\boldsymbol{c}$ 视为已知）

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & 0 \\ k & 0 & -2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 2 & 0 & -k \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{0,k}^{n} \\ a_{1,k}^{n} \\ \vdots \\ a_{k-1,k}^{n} \\ a_{k,k}^{n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{0,k}^{n}(\boldsymbol{c}) \\ b_{1,k}^{n}(\boldsymbol{c}) \\ \vdots \\ b_{k-1,k}^{n}(\boldsymbol{c}) \\ b_{k,k}^{n}(\boldsymbol{c}) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

其系数矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_k$ 有如下性质：n 为偶数时，$\det(\boldsymbol{\Delta}_k)=0$；$k=2m+1$（奇数时），$\det(\boldsymbol{\Delta}_k)=(k!!)^2$（计算从略）。式（10）唯一确定了一组 $a_{i,k}^{n}$ 使式(14)成立。当 $k=2m$（偶数时）时，式（9）就得到独立方程组：

$$2(m-j+1) a_{2(j-1),2m}^{n}-2j a_{2j,2m}^{n}=b_{2j-1,2m}^{n}(\boldsymbol{c}), j=1,\cdots,m, \tag{11}$$

$$(2m-2j+1) a_{2j-1,2m}^{n}-(2j+1) a_{2j+1,2m}^{n}=b_{2j,2m}^{n}(\boldsymbol{c}), j=0,\cdots,m, \tag{12}$$

式（11）系数矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_k^1$ 为：

$$\boldsymbol{\Delta}_k^1=\begin{pmatrix} 2m & -2 & & & \\ & 2(m-1) & -4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -2m \end{pmatrix}。$$

显然 $\operatorname{Rank}(\boldsymbol{\Delta}_k^{-1})=m$。由此可知，它对任何 $\boldsymbol{c}$ 即 u_{n-2} 总依赖于一个参数的无穷多个解。

式（12）系数矩阵 $\boldsymbol{\Delta}_k^{-1}$ 为：$\boldsymbol{\Delta}_k^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & & & \\ 2m-1 & -3 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 3 & -(2m-1) \\ & & & 1 \end{pmatrix}$。显然 $\operatorname{Rank}(\boldsymbol{\Delta}_k^{-1})=m$。

若记式（12）的常数项 $b_m^n(\boldsymbol{c})=(b_{0,2m}^{n} b_{2,2m}^{n} \cdots b_{2m,2m}^{n})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{c})$，则：

$$A(b_m^n(\boldsymbol{c})) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\boldsymbol{\Delta}_k^{-1} \vdots b_m^n(\boldsymbol{c}))=(-1)^m \sum_{l=0}^{m}(2m-2l-1)!!(2l-1)!! b_{2l,2m}^{n}(\boldsymbol{c})。$$

如果 $A(b_m^n(\boldsymbol{c}))=0$，则式（12）有解，否则求如下方程

$$(2m-2j+1) a_{2j-1,2m}^{n}-(2j+1) a_{2j+1,2m}^{n}-C_m^j \lambda_{2m}^{n}=b_{2j,2m}^{n}(\boldsymbol{c}), j=0,\cdots,m \tag{13}$$

的解 $(a_{1,2m}^{n}, a_{3,2m}^{n}, \cdots, a_{2m-1,2m}^{n}, \lambda_{2m}^{n})(\boldsymbol{c})$，其中 C_m^j 为二项展开式系数。由克莱姆法则可求得 $\lambda_{2m}^{n}(\boldsymbol{c})=-A(b_m^n(\boldsymbol{c}))/(2m)!!$（计算从略）。显然，当 $A(b_m^n(\boldsymbol{c}))=0$ 时 $\lambda_{2m}^{n}(\boldsymbol{c})=0$。

由上面推导可知，选取 $\boldsymbol{c}$ 即 u_{n-2} 后，可由 $\boldsymbol{G}_n(n \geqslant 3)$ 的系数 $\{b_{i,k}^{n}(\boldsymbol{c})\}$ 所确定出 V_n（$n \geqslant 3$）的所有系数 $\{a_{i,k}^{n}\}$。

假设 $G_n-(x \partial V_n/\partial y-y \partial V_n/\partial x) \neq 0$，$G_k-(x \partial V_k/\partial y-y \partial V_k/\partial x)=0$（$k<n$），并且 2 与 n 之间有 l 个偶数 $2 \leqslant 2n_1<\cdots<2n_l \leqslant n$，则由式（13）确定的 l 个 λ 值 $\lambda_1^n(\boldsymbol{c}), \cdots, \lambda_l^n(\boldsymbol{c})$ 不全为零。于是有：

$$G_n - (x\partial V_n/\partial y - y\partial V_n/\partial x) = \sum_{k=1}^{n}\{\sum_{i=0}^{k}[b_{i,k}^n(\boldsymbol{c}) - (k-i+1)a_{i-1,k}^n + (i+1)a_{i+1,k}^n]x^i y^{k-i}\}z^{n-k} =$$

$$-\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^n(\boldsymbol{c})(\sum_{j=0}^{n_i}C_{n_i}^j x^{2j}y^{2n_i-2j})z^{n-2n_i} = -\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^n(\boldsymbol{c})(x^2+y^2)^{n_i}z^{n-2n_i}。$$

从而有：$\mathrm{d}((x^2+y^2+z^2)/2+\sum_{k=3}^{n}V_k)/\mathrm{d}t = [G_3-(x\partial V_3/\partial y - y\partial V_3/\partial x)]+\cdots+[G_n-(x\partial V_n/\partial y - y\partial V_n/\partial x)]+o(\rho^{n+1}) = -\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^n(\boldsymbol{c})r^{2n_i}z^{n-2n_i}+o(\rho^{n+1})$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

如果 $b_{0,0}^n(\boldsymbol{c})\neq 0$，令 $\lambda_0^n(\boldsymbol{c}) = -b_{0,0}^n(\boldsymbol{c})$，$n_0=0$，则同样有 $\mathrm{d}((x^2+y^2+z^2)/2+\sum_{k=3}^{n}V_k)/\mathrm{d}t = -\sum_{i=0}^{l}\lambda_i^n(\boldsymbol{c})r^{2n_i}z^{n-2n_i}+o(\rho^{n+1})$。

2 局部渐近镇定的充分条件

下面得到系统（4）是局部渐近稳定的充分条件。

定理 1 系统（4）是局部渐近可镇定的，如果 n 为偶数并存在 $\boldsymbol{c}$ 使下列条件之一成立：1）$\lambda_0^n(\boldsymbol{c})\neq 0$，$\exists\,\delta>0$，使 $W(r,z)=\sum_{i=0}^{l}\lambda_i^n(\boldsymbol{c})r^{2n_i}z^{2(n_l-n_i)}>0$，$0<\rho<\delta$，$n_l=n/2$ 或 $n_l<n/2$ 且

$$\begin{cases}\dot{x} = y+\sum_{n\geqslant 2}[P_n(x,y,0)+h_n^1(x,y,0,u_i(x,y,0))],i=1,\cdots,n-1,\\ \dot{y} = -x+\sum_{n\geqslant 2}[Q_n(x,y,0)+h_n^2(x,y,0,u_i(x,y,0))],i=1,\cdots,n-1,\end{cases}\tag{14}$$

的零解是局部渐近镇定的；2）$\lambda_0^n(\boldsymbol{c})=0$，$\exists\,\delta>0$，使 $W_1(r,z)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^n(\boldsymbol{c})r^{2(n_i-n_1)}z^{2(n_l-n_i)}>0$，$0<\rho<\delta$，$n_l=n/2$ 且

$$\dot{z} = \sum_{n\geqslant 2}[H(0,0,z)+h_n^3(0,0,z,u_i(0,0,z))],i=1,\cdots,n-1\tag{15}$$

的零解 $z=0$ 是局部渐近稳定的；或 $n_l<n/2$，且系统（15）的零解 $z=0$ 和系统（14）的零解均为局部渐近镇定的。

证明 见式（6）中 V 的选取，V_k 由前面讨论的方式确定，则当 $\lambda_0^n(\boldsymbol{c})\neq 0$ 时，$\dot{\boldsymbol{V}}$ 的符号在原点某个邻域由 $z^{n-2n_l}W(r,z)=z^{n-2n_l}\cdot\sum_{i=0}^{l}\lambda_i^n(\boldsymbol{c})r^{2n_i}z^{2(n_l-n_i)}$ 确定，$\lambda_0^n(\boldsymbol{c})=0$ 时，并由 $r^{2n_1}z^{n-2n_l}W_1(r,z)=r^{2n_1}z^{n-2n_l}\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^n(\boldsymbol{c})r^{2(n_i-n_1)}z^{2(n_l-n_i)}$ 确定。

1）若 $n_l>n/2$，则在原点某个邻域内 $\dot{V}=o(\rho^{n+1})\Leftrightarrow W(r,z)\equiv 0$，并且当 $0<\rho<\delta$，$W(r,z)>0$ 时，$\dot{\boldsymbol{V}}$ 负定，从而系统（4）零解是局部渐近镇定的。若 $n_l<n/2$，则当 $0<\rho<\delta$，$W(r,z)>0$ 时，$\dot{\boldsymbol{V}}=o(\rho^{n+1})\Leftrightarrow z=0$。故 $M=\{(x,y,z)\mid\dot{\boldsymbol{V}}=0\}\subset\{(x,y,z)\mid z=0\}$。若 $\gamma:t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ 为式（4）含于 $M\cap B(0,\delta)$ 中的解轨线，则 $z(t)\equiv 0,\forall t\geqslant 0$，$x(t),y(t)$ 满足系统（14）。由假设得 $x(t),y(t)\to 0(t\to\infty)$，这表明 M 中最大不变集仅为原点。

2）若 $n_l=n/2$，由于 $0<\rho<\delta$ 时，$W_1(r,z)>0$，故有 $\dot{V}=o(\rho^{n+1})\Leftrightarrow r=0$，即有 $M=\{(x,y,z)\mid\dot{\boldsymbol{V}}=0\}\subset\{(x,y,z)\mid x,y=0\}$，从而若 $\gamma:t\mapsto(x(t),y(t),z(t))$ 为式（4）的含于 $M\cap B(0,\delta)$ 中的解轨线，则 $x(t)$，$y(t)\equiv 0$，$\forall t\geqslant 0$，$z(t)$ 满足系统（15）。由假设可知必有 $z(t)\to 0(t\to\infty)$，可见 M 中最大不变集仅为原点。

若 $n_l<n/2$，则 $\dot{\boldsymbol{V}}=o(\rho^{n+1})\Leftrightarrow r=0$ 或 $z=0$，故 $M=\{(x,y,z)\mid\dot{\boldsymbol{V}}=0\}\subset\{(x,y,z)\mid x,y=$

$0\} \cup \{(x,y,z) \mid z=0\}$（记为 $M_1 \cup M_2$），由于 $M_1 \cap M_2=\{(0,0,0)\}$，所以若 $\gamma: t \mapsto (x(t),y(t),z(t))$ 为式（4）含于 $M \cap B(0,\delta)$ 中的解轨线，则或者 $z(t)\equiv 0, \forall t \geqslant 0, x(t), y(t)$ 满足式（14）或者 $x(t),y(t)\equiv 0$，$\forall t \geqslant 0, z(t)$ 满足系统（15）。由假设知均有 $(x(t),y(t),z(t)) \to 0 (t \to \infty)$，即 M 中的最大不变集仅为原点。这样由 La Salle 原理就完全证明了定理 1。

注 2　从定理 1 证明可以看出，在 $n_l=2n$ 可判别零解局部渐近稳定之外，进一步要判定 $\dot{x}=y+P(x,y,0), \dot{y}=-x+Q(x,y,0)$ 或 $\dot{z}=H(0,0,z)$ 的局部渐近稳定性。前者可由文献［6］的方法去判定，后者是一阶微分方程，也很容易得到局部渐近镇定性。

注 3　定理 1 中还要判定 $W(r,z)$ 或 $W_1(r,z)$ 在某领域内的正定性。从 $W(r,z)$ 或 $W_1(r,z)$ 形式可以将它们视为一个二元线性多项式在平面原点领域的第一象限内为正定的方法去判别。

注 4　从定理 1 中得知，确定反馈 u_{n-2} 即 $\boldsymbol{c}$ 仅需使从式（13）求出的 $\lambda_i(\boldsymbol{c})$ 值满足定理 1 条件即可，故而选取的余地是很大的，同时还隐含着当 $u_1,\cdots,u_{n-2}$ 确定后 $u_k, k \geqslant n-1$ 可任选。

［参考文献］

［1］BACCIOTTI A. Local stabilizability of nonlinear control systems. Munich：World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd，1992.

［2］BROCKETT R W. Asymptotic stability and feedback stabilization//BROCKET R W，MILLMAN R S，SUSSMANN H J. Eds Differential Geometric Control Theory. Boston：Birkhauser，1983.

［3］张芷芬. 微分方程定性理论. 北京：科学出版社，1985.

［4］刘向东，黄文虎. 非线性临界系统稳定性分析的中心流形方法. 哈尔滨工业大学学报，1999，31(6)：1-4.

［5］倪郁东，辛云冰. 非线性控制系统的局部镇定. 合肥工业大学学报(自然科学版)，2003，26(3)：467-471.

［6］吉英存. 非线性系统镇定研究. 北京：北京航空航天大学，1991：22-29.

［7］DAYAWANSA W P，MARTIN C F. Some suffcient conditionsfor the asymptotic stabilizability of three dimensional homogeneous polynomial systems. Proc of C D C Dec，1989(8)：1366-1369.

［8］吉英存，高为炳. 受控中心流形与非线性临界镇定. 控制理论与应用，1993，10(4)：447-450.

［9］李春文，张平，乔岩. 一类二维临界非线性系统的稳定性判别. 控制理论与应用，1998，15(6)：842-846.

［10］辛云冰，费树岷. 三阶临界非线性系统的稳定性//第 13 届中国控制会议论文集. 太原：中国控制学会，1994：378-382.

［11］蒋自国. 两类三阶非线性系统零解的全局渐近稳定性. 四川大学学报(自然科学版)，2011，34(2)：217-220.

［12］张保生. 时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性. 生物科学学报，2013，28(2)：271-277.

（责任编辑　马建华　英文审校　黄振坤）