

具波动算子的非线性 Schrödinger 方程的显式精确解

林成龙, 梁宗旗

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究了具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程显式精确解问题。先借助于一个规范行波变化, 将该方程转化为微分方程动力系统, 求出其奇点并给出其类型; 采用直接积分法在特殊情况下得到该方程的一组显式精确解; 最后利用预设 Jacobi 椭圆函数构造方法, 得到了该方程多种形式的新的显式精确解。

[关键词] 波动算子; 非线性 Schrödinger 方程; 奇点; Jacobi 椭圆函数; 精确解

[中图分类号] O 241.8

Explicit and Exact Solutions for Nonlinear Schrödinger Equation with Wave Operator

LIN Chenglong, LIANG Zongqi

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, the explicit and exact solutions for a class of nonlinear Schrödinger equation with wave operator were studied. With the help of a specific travelling wave transformation, the equation was transformed into a dynamic differential system, its singularity was obtained and its type was given. A set of explicit exact solutions of the equation were obtained by the direct integral method in special cases. Finally, the new forms of explicit and exact solutions of the equation were obtained by using the preset Jacobi elliptic function method.

Keywords: wave operator; nonlinear Schrödinger equation; singularity; Jacobi elliptic function; exact solution.

0 引言

Matsunchi^[1]在考察单色波的非线性相互作用时首次提出具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程, 随后在研究等离子物理孤立子问题、推导高频电子横向速度所满足的方程等许多物理模型中均得到了同类方程。众所周知的经典的非线性 Schrödinger 方程, 一直是国内外学者理论研究和数值计算的热点。而具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程由于其在原经典的非线性 Schrödinger 方程加了波动项和一阶项, 使该问题的研究变得异常困难和复杂, 所以关于该问题的相关研究很少。文献[2]研究了一类具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的初值、边值问题, 讨论了方程的存在性、唯一性及正则性。文献[3-4]给出了具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的差分方法、谱方法及拟谱方

[收稿日期] 2016-05-11

[修回日期] 2016-06-15

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(11201178); 福建省科技计划重点项目(2014H0034); 福建省自然科学基金资助项目(2012J01013, 2016J01310)

[作者简介] 林成龙(1989—), 男, 硕士生, 从事计算数学方向研究。通信作者: 梁宗旗(1964—), 男, 教授, 硕士生导师, 从事计算数学方向研究, E-mail: liangzq2719@163.com。

法。文献 [5] 给出了一类非线性 Schrödinger 方程精确行波解。文献 [6-7] 给出了具有波动算子非线性 Schrödinger 方程特殊形式下的多种守恒格式。文献 [8] 给出了一类非线性 Schrödinger 方程的 Jacobi 椭圆函数周期解。本文将研究一般形式的具有波动算子非线性 Schrödinger 方程的相关问题, 首先利用动力系统奇点性质给出奇点类型, 然后利用初等积分法和椭圆函数展开法分别得到了该方程的多组新的精确解包括显式精确解。

本文考察如下广义具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程

$$Tu + i\alpha(u_t + u_x) + \delta^2 u + \beta |u|^2 u = 0, \beta \neq 0, \quad (1)$$

其中: $u(x, t)$ 是待定复值函数; $Tu = u_{tt} - u_{xx} + \gamma u_{tx}$ 是波动算子; $i^2 = -1$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 皆是实常数; $u_x = \partial u / \partial x$; $u_t = \partial u / \partial t$; $u_{tt} = \partial^2 u / \partial t^2$; $u_{xx} = \partial^2 u / \partial x^2$; $u_{tx} = \partial^2 u / (\partial t \partial x)$ 。

1 方程的行波变换及动力系统

设方程 (1) 具有如下形式的行波解

$$u(x, t) = \varphi(\xi) e^{i(kx + \omega t)}, \quad (2)$$

其中 $\xi = x - ct + \xi_0$ 。为方便起见, 将 $\varphi(\xi)$ 记为 φ 。

将式 (2) 代入式 (1) 中, 得到如下方程

$$(c^2 - 1 - \gamma c)\varphi'' + i(-2\omega c - 2k + \gamma\omega - \gamma ck + \alpha - \alpha c)\varphi' + (k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)\varphi + \beta\varphi^3 = 0, \quad (3)$$

将式 (3) 实部与虚部分离, 可得如下常微分方程组

$$(c^2 - 1 - \gamma c)\varphi'' + (k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)\varphi + \beta\varphi^3 = 0, \quad (4)$$

$$(-2\omega c - 2k + \gamma\omega - \gamma ck + \alpha - \alpha c)\varphi' = 0. \quad (5)$$

由式 (4) 知,

$$\varphi'' = (k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)\varphi / (1 - c^2 + \gamma c) + \beta\varphi^3 / (1 - c^2 + \gamma c) \triangleq a\varphi + b\varphi^3, \quad (6)$$

其中: $a = (k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k) / (1 - c^2 + \gamma c)$; $b = \beta / (1 - c^2 + \gamma c)$; $c^2 \neq 1 + \gamma c$ 。

令 $d\varphi/d\xi = f$, 与式 (6) 联立得如下动力系统

$$\begin{cases} d\varphi/d\xi = f, \\ df/d\xi = a\varphi + b\varphi^3, \end{cases} \quad (7)$$

将式 (7) 中两个式子进行相除, 分离变量后积分得

$$f^2/2 = a\varphi^2/2 + b\varphi^4/4 + c_1, \quad (8)$$

其中 c_1 为积分常数。为研究方便, 令 $c_1 = 0$, 可得

$$f^2/2 = a\varphi^2/2 + b\varphi^4/4. \quad (9)$$

方程 (9) 是一个哈密尔顿量

$$H(\varphi, f) = f^2/2 - a\varphi^2/2 - b\varphi^4/4 = \mathbf{R}. \quad (10)$$

其中 \mathbf{R} 是实常数。

根据奇点定义, 令式 (7) 等于零, 得到方程 (7) 的奇点 $\sigma(0, 0), \theta_{1,2}(\pm \sqrt{-a/b}, 0)$, 方程组 (7) 相对应的 Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a + 3b\varphi^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

其对应特征多项式为

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{J})\lambda + |\mathbf{J}| = 0. \quad (12)$$

由于矩阵的迹 $\text{tr}(\mathbf{J}) = 0$, 故其特征方程变为

$$\lambda^2 - (a + 3b\varphi^2) = 0. \quad (13)$$

下面讨论奇点的类型。

1) 当奇点为 $\sigma(0,0)$ 时, 此时式 (13) 变为 $\lambda^2 - a = 0$ 。i) 当 $a > 0, b < 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a}$, 此时 $\sigma(0,0)$ 为鞍点 (如图 1 所示), 且为不稳定的; ii) 当 $a < 0, b < 0$ 时, $\lambda_{1,2} = i\rho (\rho \in \mathbf{R})$, 此时 $\sigma(0,0)$ 为中心 (如图 2 所示), 稳定但非渐进稳定; iii) 当 $a < 0, b > 0$ 时, $\lambda_{1,2} = i\rho (\rho \in \mathbf{R})$, 此时 $\sigma(0,0)$ 为中心 (如图 3 所示), 稳定但非渐进稳定; iv) 当 $a > 0, b > 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a}$, 此时 $\sigma(0,0)$ 为鞍点 (如图 4 所示), 是不稳定的。

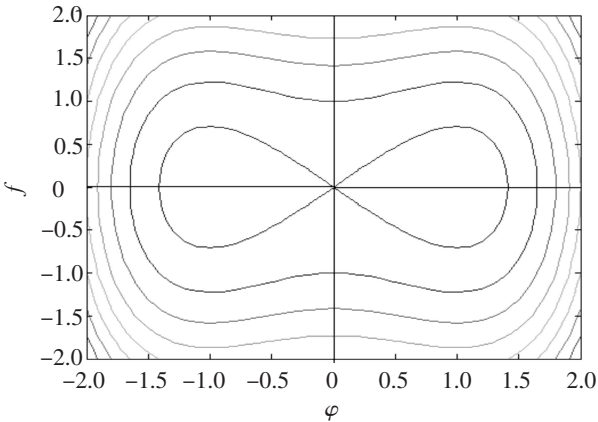


图 1 $a > 0, b < 0$ 时奇点情况 ($\sigma(0,0)$)

Fig.1 The situation of singular when $a > 0$ and $b < 0$

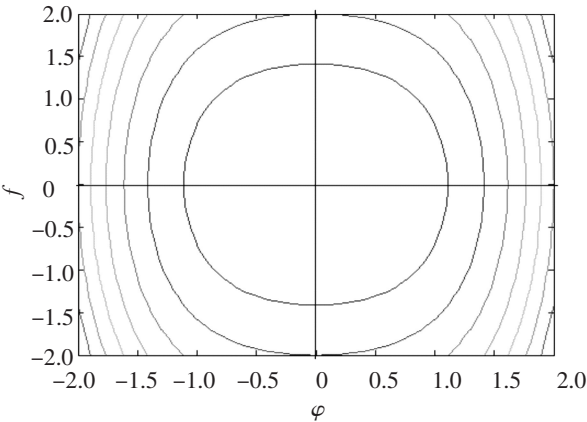


图 2 $a < 0, b < 0$ 时奇点情况 ($\sigma(0,0)$)

Fig.1 The situation of singular when $a < 0$ and $b < 0$

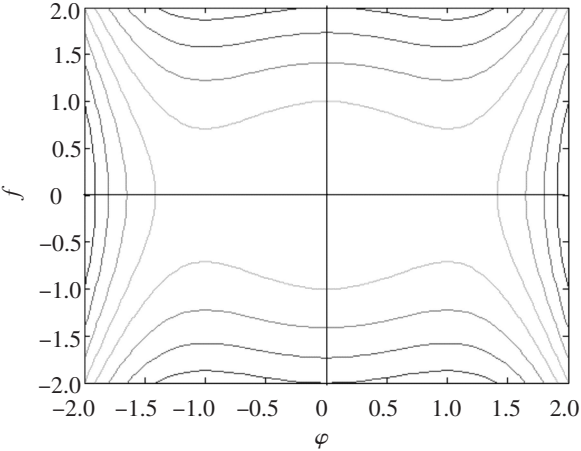


图 3 $a < 0, b > 0$ 时奇点情况 ($\sigma(0,0)$)

Fig.3 The situation of singular when $a < 0$ and $b > 0$

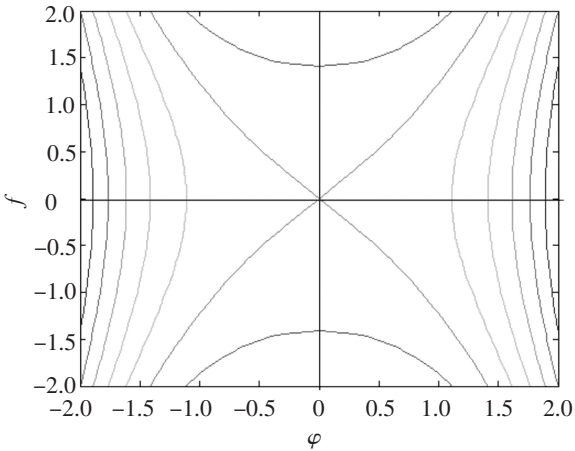


图 4 $a > 0, b > 0$ 时奇点情况 ($\sigma(0,0)$)

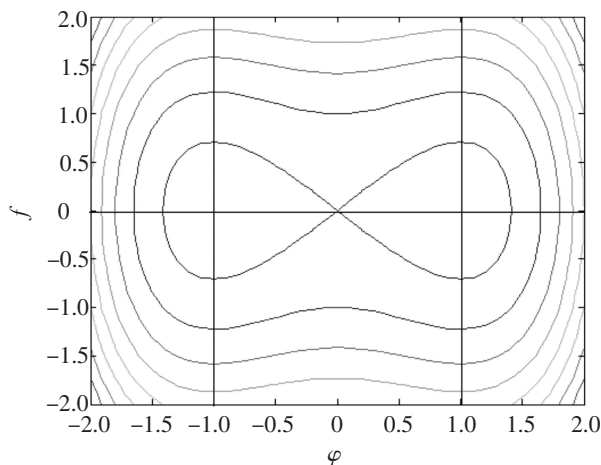
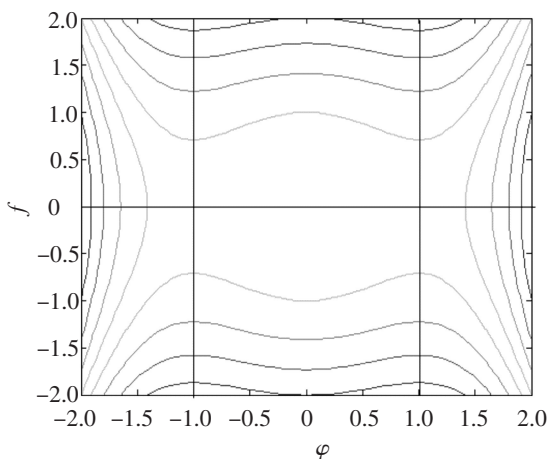
Fig.4 The situation of singular when $a > 0$ and $b > 0$

2) 当奇点为 $\theta_{1,2}(\pm \sqrt{-a/b}, 0)$ 时, 此时式 (13) 变为 $\lambda^2 + 2a = 0$ 。i) 当 $a > 0, b < 0$ 时, $\lambda_{1,2} = i\rho (\rho \in \mathbf{R})$, 此时 $\theta_{1,2}(\pm \sqrt{-a/b}, 0)$ 为中心 (如图 5 所示), 奇点 $\theta_{1,2}$ 为稳定但非渐进稳定; ii) 当 $a < 0, b < 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-2a}$, 此时 $\theta_{1,2}(\pm \sqrt{-a/b}, 0)$, 不存在; iii) 当 $a < 0, b > 0$ 时, $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-2a}$, 此时 $\theta_{1,2}(\pm \sqrt{-a/b}, 0)$ 为鞍点 (如图 6 所示), 不稳定; iv) 当 $a > 0, b > 0$ 时, $\lambda_{1,2} = i\rho (\rho \in \mathbf{R})$, $\theta_{1,2}(\pm \sqrt{-a/b}, 0)$, 不存在。

2 方程 (1) 精确解

2.1 直接积分法

由方程 (5), 求得

图 5 $a > 0, b < 0$ 时奇点情况 $(\theta_{1,2}(\pm\sqrt{-a/b}, 0))$ Fig.5 The situation of singular when $a > 0$ and $b < 0$ 图 6 $a < 0, b > 0$ 时奇点情况 $(\theta_{1,2}(\pm\sqrt{-a/b}, 0))$ Fig.6 The situation of singular when $a < 0$ and $b > 0$

$$\varphi' = 0 \text{ 或 } -2\omega c - 2k + \gamma\omega - \gamma ck + \alpha - \alpha c = 0. \quad (14)$$

1) 当 $\varphi' = 0$ 时, 解 $\varphi(\xi) = C$, C 为常数。可得 $u(x, t) = Ce^{i(kx + \omega t)}$, 当 $C = \pm 1$ 时, $u(x, t)$ 是方程 (1) 的 Stokes 解。

2) 当 $-2\omega c - 2k + \gamma\omega - \gamma ck + \alpha - \alpha c = 0$ 时, 可以得到 $\omega = (\alpha - \alpha c - 2k - \gamma ck)/(2c - \gamma)$, $\gamma \neq 2c$ 。

由式 (9) 得到

$$(d\varphi/d\xi)^2 = a\varphi^2 + b\varphi^4 + 2\mathbf{R} = b(\varphi^4 + a\varphi^2/b + 2\mathbf{R}/b). \quad (15)$$

设方程 $\varphi^4 + a\varphi^2/b + 2\mathbf{R}/b = 0$, 则方程 (15) 可以改写为

$$(d\varphi/d\xi)^2 = b(\varphi^4 + a\varphi^2/b + 2\mathbf{R}/b) = b(\varphi^2 - c)^2, \quad (16)$$

其中 $a^2 = 8b\mathbf{R}$, $c = -(k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)/(2\beta)$ 。在这一特殊情况下, 有

$$d\varphi/d\xi = \pm \sqrt{b}(\varphi^2 - c) = \pm \sqrt{b}(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2), \quad (17)$$

其中 $\varphi_1 = \sqrt{c}$, $\varphi_2 = -\sqrt{c}$ 是方程 (17) 的根, 要求 $b > 0, c > 0$ 。

对方程 (17) 直接积分, 得

$$\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 - (\varphi_1 - \varphi_2) \tanh[\pm (\varphi_1 - \varphi_2) \sqrt{b}\xi/2]/2 = -\sqrt{c} \tanh[\pm \sqrt{bc}\xi]. \quad (18)$$

将式 (18) 代入式 (2) 中得, $u(x, t) = \pm \sqrt{-(k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)/2\beta} \tanh[\pm \sqrt{-(k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)(\xi)/2(1 - c^2 + \gamma c)}] e^{i(kx + \omega t)}$, 方程 (1) 的该组显式精确解称为冲击波解。

2.2 椭圆函数展开法

2.2.1 Jacobi 椭圆正弦函数展开法

设方程 (6) 的解的形式

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=0}^n F_i \operatorname{sn}(\xi), \quad (19)$$

其中: F_i, n 均为实常数; $\operatorname{sn}(\xi)$ 是椭圆正弦函数; $m \in (0, 1)$ 为模数。

通过齐次平衡法, 比较式 (6) 中最高阶导数项和最高次非线性项, 可得 $n = 1$, 修改解的形式为

$$\varphi(\xi) = F_0 + F_1 \operatorname{sn}(\xi). \quad (20)$$

根据椭圆函数性质, 将式 (20) 代入式 (6), 得: $aF_0 + bF_0^3 + (F_1(1 + m^2) + aF_1 + 3bF_0^2F_1)\operatorname{sn}(\xi) + 3bF_0F_1^2\operatorname{sn}^2(\xi) + (bF_1^3 - 2F_1m^2)\operatorname{sn}^3(\xi) = 0$ 。由平衡原则, 得:

$$\begin{cases} aF_0 + bF_0^3 = 0, \\ F_1(1 + m^2) + aF_1 + 3bF_0^2F_1 = 0, \\ 3bF_0F_1^2 = 0, \\ bF_1^3 - 2F_1m^2 = 0, \end{cases} \quad (21)$$

解得

$$F_0 = 0, F_1 = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta}, k^2 - (a + \gamma\omega)k = (1 + m^2)(c^2 - \gamma c - 1) + (\omega^2 - \delta^2 + a\omega), \quad (22)$$

$$F_1 = 0, F_0 = \pm \sqrt{-(k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)/\beta}. \quad (23)$$

在满足式 (22) 条件下, 得方程 (1) 的精确周期解:

$$u(x, t) = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta} \operatorname{sn}(x - ct + \xi_0) e^{i(kx + \omega t)}, \quad (24)$$

其中要求 $\beta(1 - c^2 + \gamma c) > 0$, $(a + \gamma\omega)^2 - 4[(1 + m^2)(c^2 - \gamma c - 1) + (\omega^2 - \delta^2 + a\omega)] \geq 0$ 。

当模数 $m \rightarrow 1$ 时, $\operatorname{sn}(\xi) \rightarrow \tanh(\xi)$, 式 (24) 变为

$$u(x, t) = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta} \tanh(x - ct + \xi_0) e^{i(kx + \omega t)}, \quad (25)$$

式 (25) 通常称为方程 (1) 的冲击波解。当 $(1 - c^2 - \gamma c) > 0, \beta < 0$ 时, 在非线形光学中, 一般称暗孤立子。

当模数 $m \rightarrow 0$ 时, $\operatorname{sn}(\xi) \rightarrow \sin(\xi)$, 式 (24) 变为

$$u(x, t) = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta} \sin(x - ct + \xi_0) e^{i(kx + \omega t)}, \quad (26)$$

这样就得到了方程 (1) 的三角函数平面周期解:

同理, 在满足式 (23) 条件下, 得到方程 (1) 的准确平面周期解。

$$u(x, t) = \pm \sqrt{-(k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)/\beta} e^{i(kx + \omega t)}. \quad (27)$$

2.2.2 Jacobi 椭圆余弦函数展开法

设方程 (6) 的解为

$$\varphi(\xi) = F_2 + F_3 \operatorname{cn}(\xi). \quad (28)$$

根据椭圆函数性质, 将式 (28) 代入式 (6), 得: $aF_2 + bF_2^3 + (aF_3 + 3bF_2^2F_3 - F_3(2m^2 - 1))\operatorname{cn}(\xi) + 3bF_2F_3^2\operatorname{cn}^2(\xi) + (bF_3^3 - 2F_3m^2)\operatorname{cn}^3(\xi) = 0$, 得到

$$\begin{cases} aF_2 + bF_2^3 = 0, \\ aF_3 + 3bF_2^2F_3 - F_3(2m^2 - 1) = 0, \\ 3bF_2F_3^2 = 0, \\ bF_3^3 - 2F_3m^2 = 0, \end{cases} \quad (29)$$

$$F_2 = 0, F_3 = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta}, k^2 - (a + \gamma\omega)k = (2m^2 - 1)(1 - c^2 + \gamma c) + (\omega^2 - \delta^2 + a\omega), \quad (30)$$

$$F_3 = 0, F_2 = \pm \sqrt{-(k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k\omega - \alpha\omega - \alpha k)/\beta}. \quad (31)$$

在满足式 (30) 条件下, 得方程 (1) 的精确周期解为:

$$u(x, t) = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta} \operatorname{cn}(x - ct + \xi_0) e^{i(kx + \omega t)}, \quad (32)$$

其中要求 $\beta(1 - c^2 + \gamma c) > 0$, $(a + \gamma\omega)^2 - 4[(2m^2 - 1)(1 - c^2 + \gamma c) + (\omega^2 - \delta^2 + a\omega)] \geq 0$ 。

当模数 $m \rightarrow 1$ 时, $\operatorname{cn}(\xi) \rightarrow \operatorname{sech}(\xi)$,

$$u(x, t) = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta} \operatorname{sech}(x - ct + \xi_0) e^{i(kx + \omega t)}. \quad (33)$$

解式 (33) 通常称为方程 (1) 的包络孤立波解, 当 $(1 - c^2 + \gamma c) < 0, \beta < 0$ 时, 在非线形光学中, 一般称明孤立子。

当模数 $m \rightarrow 0$ 时, $\operatorname{cn}(\xi) \rightarrow \cos(\xi)$,

$$u(x, t) = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta} \cos(x - ct + \xi_0) e^{i(kx + \omega t)}, \quad (34)$$

这样就得到了方程 (1) 的三角函数平面周期解。

同理, 在满足式 (31) 条件下, 得到方程 (1) 的准确平面周期解:

$$u(x, t) = \pm \sqrt{-(k^2 + \delta^2 - \omega^2 - \gamma k \omega - \alpha \omega - \alpha k)/\beta} e^{i(kx + \omega t)}, \quad (35)$$

此结果与式 (27) 结果一致。

2.2.3 其他类型 Jacobi 椭圆函数展开法

根据 2.2.1 和 2.2.2 的构造方法, 令

$$\varphi(\xi) = F_i + F_{i+1}B(\xi), \quad (36)$$

其中 $i = 4, 5, \dots, 9$ 。当 $B(\xi) = \operatorname{dn}(\xi)$, 即可得到第三类 Jacobi 椭圆函数解。

事实上, 也可以定义如下形式

$$\operatorname{sc}(\xi) = \operatorname{sn}(\xi)/\operatorname{cn}(\xi), \operatorname{sd}(\xi) = \operatorname{sn}(\xi)/\operatorname{dn}(\xi), \operatorname{cs}(\xi) = \operatorname{cn}(\xi)/\operatorname{sn}(\xi), \quad (37)$$

$$\operatorname{cd}(\xi) = \operatorname{cn}(\xi)/\operatorname{dn}(\xi), \operatorname{ds}(\xi) = \operatorname{dn}(\xi)/\operatorname{sn}(\xi), \operatorname{dc}(\xi) = \operatorname{dn}(\xi)/\operatorname{cn}(\xi). \quad (38)$$

这些函数都满足 Jacobi 椭圆函数展开法所要求的方程 (6) 的形式, 代入展开即可得到若干椭圆函数解。具体步骤可参考上述式 (19) 一式 (36) 计算过程, 本文不再赘述, 结果如下:

$$u(x, t) = \pm \sqrt{2m^2(1 - c^2 + \gamma c)/\beta} B(\xi) e^{i(kx + \omega t)}. \quad (39)$$

当模数 $m \rightarrow 1$ 时, $\operatorname{dn}(\xi) \rightarrow \operatorname{sech}(\xi)$, $\operatorname{sc}(\xi) \rightarrow \sinh(\xi)$, $\operatorname{sd}(\xi) \rightarrow \sinh(\xi)/m$, $\operatorname{cs}(\xi) \rightarrow 1/\sinh(\xi)$, $\operatorname{cd}(\xi) \rightarrow \sqrt{1 - m^2 \cosh^2(\xi)}/m$, $\operatorname{ds}(\xi) \rightarrow \sqrt{\coth^2(\xi) - m^2}$, $\operatorname{dc}(\xi) \rightarrow m \sqrt{1 + \cosh^2(\xi)}$ 。当模数 $m \rightarrow 0$ 时, $\operatorname{dn}(\xi) \rightarrow 1$, $\operatorname{sc}(\xi) \rightarrow \tan(\xi)$, $\operatorname{sd}(\xi) \rightarrow 0$, $\operatorname{cs}(\xi) \rightarrow \cot(\xi)$, $\operatorname{cd}(\xi) \rightarrow \sqrt{m^2 + 1}/m$, $\operatorname{ds}(\xi) \rightarrow \sqrt{1 - m^2 \sin^2(\xi)}/\sin(\xi)$, $\operatorname{dc}(\xi) \rightarrow m \sqrt{1 + \cos^2(\xi)}/\cos(\xi)$ 。将结果代入式 (39) 就可以得到多组椭圆函数解以及显示精确解。

[参 考 文 献]

- [1] MATSUNCHI K. Nonlinear interactions of counter-travelling waves [J]. Phy Soc of Japan, 1980, 48(5): 1746-1754.
- [2] GUO B L, LIANG H X. On the problem of numerical calculation for a class of the system of nonlinear Schrödinger equations with wave operator [J]. Numer Methods Comput Appl, 1983(4): 176-182.
- [3] 梁宗旗, 鲁百年. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的拟谱方法 [J]. 高等学校计算数学学报, 1999, 9(3): 201-211.
- [4] 梁宗旗. 具有波动算子的非线性 Schrödinger 方程的有限差分法 [J]. 黑龙江大学学报 (自然科学版), 1983, 15(1): 1-4.
- [5] 高芳, 马锐, 熊梅, 等. 一类 NLSE 方程的精确行波解 [J]. 云南师范大学学报 (自然科学版), 2015, 35(6): 39-44. DOI:10.7699/j.ynnu.ns-2015-077.
- [6] ZHANG F V, PERÉZ-GGARCÍA M, VÁZQUEZ L. Numerical simulation of nonlinear Schrödinger equation system: a new conservative scheme [J]. Appl Math Comput, 1995(71): 165-177. DOI:10.1016/0096-3003(94)00152-T.
- [7] ZHANG L M, CHANG Q S. A conservative numerical scheme for a class of nonlinear Schrödinger equation with wave operator [J]. Appl Math Comput, 2003, 145(2): 603-612. DOI:10.1016/S0096-3003(02)00842-1.
- [8] 陈娟. 一类非线性 Schrödinger 方程的 Jacobi 椭圆函数周期解 [J]. 应用数学学报, 2014, 37(4): 656-661.
- [9] 郭柏灵. 非线性 Schrödinger 方程 (I): Bose-Einstein 凝聚和怪波现象 [J]. 数学进展, 2011, 40(4): 393-399. DOI:1000-0917(2011)04-0393-07.
- [10] 李志斌. 非线性数学物理方程的行波解 [M]. 北京: 科学出版社, 2007: 130-160.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)