

时标上含 N 段激活函数 2-D 网络的指数周期轨迹

王博宇, 宾红华, 黄振坤

(集美大学理学院, 福建 厦门 361021)

[摘要] 研究了时标上具有 N 分段激活函数 2-D 网络的多重周期解。通过运用激活函数的定义分析了状态空间, 获得了新的标准来保证模型有 N^2 正不变集。通过压缩映射原理证明了网络有指数型周期轨迹, 模拟的例子证明了结果的有效性。

[关键词] 2-D 网络; 不变集; 周期解; 神经网络

[中图分类号] O 193

Exponentially Periodic Orbits of 2-D Networks with N -Segment Activation on Time Scales

WANG Boyu, BIN Honghua, HUANG Zhenkun

(School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)

Abstract: In this paper, multiperiodicity was studied for 2-D networks with N -segment activation on time scales. By using the definition of activation to analyze the state space, new criteria was obtained to guarantee that the model has N^2 positively invariant sets. The exponentially periodic orbits for the network are proved by contraction mapping principle. A simulation example is presented to demonstrate the effectiveness of the results.

Keywords: 2-D networks; invariant set; periodic solution; neural network

0 引言

近年来, 神经网络在不同的领域都有着广泛的应用, 如关联记忆^[1-2]、图像处理^[3]、信号与模式识别^[4]、周期解和多重周期解^[5-10]等动力学性质也受到广泛的关注和研究。文献[3]研究了带时滞的 n 个神经元的神经网络在饱和区域有 2^n 个周期轨迹, 并且这些周期轨迹是指数吸引的。文献[4]通过构造恰当的李雅普诺夫函数和不等式技巧, 获得一些充要条件保证带时滞的脉冲 C-G 神经网络全局指数稳定周期解的存在性。文献[6]通过分离状态空间得到带变时滞和一类普通激活函数的 C-G 神经网络有多重稳定性和多重周期解。文献[7]通过分离状态空间、Halanay 不等式、柯西收敛准则和不等式技巧得到一类带普通激活函数的高阶竞争神经网络存在多重稳定性和多重周期解。

在模式识别中, 设计神经网络进行关联记忆储存时, 不同平衡点的特性代表不同的记忆模式。神经网络多重稳定性能够描述稳定的多重平衡点和周期轨迹的共存状态。运用激活函数性质, 可以设计带任意个数平衡点的神经网络来扩大关联记忆储存能力^[11-14]。文献[11]研究了二维神经网络, 得

[收稿日期] 2016-04-21

[修回日期] 2016-07-18

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(61573005)

[作者简介] 王博宇(1990—), 男, 硕士生, 从事神经网络方向研究。通信作者: 宾红华(1966—), 女, 教授, 硕士生导师, 从事神经网络方向研究, E-mail: hbbin@jmu.edu.cn。

到系统有 2^n 个孤立的平衡点并且是局部指数稳定的。文献 [12] 对神经环路建立拥有唯一平衡点和多重平衡点的一个准确边界。文献 [13] 介绍了带不饱和分段线性激活函数的一类离散时间回归神经网络的多重稳定性。文献 [14] 运用柯西收敛准则原理证明了带 k 个水平的不连续激活函数的 n 重 C-G 神经网络具有 k 平方个局部指数稳定的平衡点和周期轨迹, 确保网络有 k^n 平衡点和 k^n 周期轨迹。近年来许多学者研究了时标上神经网络的稳定性和周期解等动力学性质^[15-20]。然而到目前为止, 很少有文献探讨时标上带不连续激活函数神经网络的多重周期解。受文献 [11] 的启发, 本文研究了一类时标上 2-D 神经网络, 给出了在时标上带 N -段激活函数 2-D 神经网络的指数型周期解的一些新准则, 推广了文献 [11] 的结果。

1 模型简介

考虑在时标上的 2-D 神经网络的微分方程

$$\begin{cases} x_1^\Delta(t) = -\beta_1(t)x_1(t) + a_{11}(t)f(x_1(t)) + a_{12}(t)f(x_2(t)) + I_1(t), \\ x_2^\Delta(t) = -\beta_2(t)x_2(t) + a_{21}(t)f(x_1(t)) + a_{22}(t)f(x_2(t)) + I_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

$t \in \mathbb{T}$, 其中 x_i 表示第 i 个活跃的神经元, $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 表示神经元状态, $f(x) = (f(x_1), f(x_2))^T$

表示激活函数, $\beta(t) = \text{diag}\{\beta(t_1), \beta(t_2)\}$ 表示外部抑制, \mathbb{T} 是 ω 周期时标。 $A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

是一个矩阵表示神经元的连接强度, $I(t) = (I(t_1), I(t_2))^T \in \mathbb{R}^2$ 是一个 ω 周期向量表示外部输入。激活函数是有 N 段的不连续函数, 选取两组数 $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_N\}, \{c_1, c_2, \dots, c_N\}$ 满足 $-1 = c_1 < b_1 < c_2 < b_2 < c_3 < \dots < b_{N-2} < c_{N-1} < b_{N-1} < c_N = 1$, 其中 $b_0 = -\infty, b_N = +\infty$ 。 $f(x) =$

$\begin{cases} c_1, x < b_1, \\ c_i, b_{i-1} \leq x < b_i, \text{ 其中 } i = 1, 2, \dots, N, \text{ 而且 } x < b_1 \Leftrightarrow b_0 < x < b_1 \text{ 和 } x \geq b_{N-1} \Leftrightarrow b_{N-1} \leq x < b_N. \text{ 所以激活} \\ c_N, x \geq b_{N-1}. \end{cases}$

函数可以改写: $f(x) = c_i$, 如果 $b_{i-1} \leq x < b_i$ 。

文中, 做如下假定: (H_1) $I_k(t), \beta_k(t), a_{km}(t)$ ($k, m = 1, 2$) 都是周期函数且周期 $\omega > 0$; (H_2) $-\beta_k(t) \in \mathbb{R}^+$ (见定义 2) 和 $0 < \underline{\beta}_k \leq \beta_k(t) \leq \overline{\beta}_k, t \in \mathbb{T}, \overline{\beta}_k = \max_{t \in [0, \omega]_T} \beta_k(t), \underline{\beta}_k = \min_{t \in [0, \omega]_T} \beta_k(t), \overline{a_{km}} = \max_{t \in [0, \omega]_T} |a_{km}(t)|, \overline{I_k} = \max_{t \in [0, \omega]_T} |I_k(t)|, k, m = 1, 2$ 。

集合 $[a, b]_T = \{t \in \mathbb{T}, a \leq t \leq b\}$, 如果 $0 \in \mathbb{T}$, \mathbb{T} 是无界的, 即 $\sup \mathbb{T} = \infty$ 。

2 预备知识

本节给出一些关于时标的基本概念和一些引理。时标 \mathbb{T} 是实数集 \mathbb{R} 的任意一个非空闭子集, 前跳算子 $\sigma: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, 定义为 $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T}: s > t\}$, 并且当 $\sup \mathbb{T} = \mathbb{T}$ 时, $\sigma(\sup \mathbb{T}) = \sup \mathbb{T}$ 。后跳算子 $\rho: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, 定义为 $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T}: s < t\}$, 并且当 $\inf \mathbb{T} = \mathbb{T}$ 时, $\rho(\inf \mathbb{T}) = \inf \mathbb{T}$ 。如果 $t > \inf \mathbb{T}$ 和 $\rho(t) = t$, 那么称点 t 为左稠密点。如果 $\rho(t) < t$, 那么点 t 称为左扩散点。如果 $t < \sup \mathbb{T}$ 和 $\sigma(t) = t$, 那么称点 t 为右稠密点。如果 $\sigma(t) > t$, 那么点 t 称为右扩散点。距离函数 μ 定义为 $\mu(t) := \sigma(t) - t$ 。当 $\mu(t) > 0$ 时, 称 t 为右扩散点; 当 $\mu(t) = 0$ 时, 称 t 为右稠密点。 C_{rd} 表示所有定义在 \mathbb{T} 上的右稠密连续函数。

定义 1 令 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, 则 (Δ) 导数有如下定义: 1) 当 f 是连续函数且在 t 点为右扩散的, 则 $f^\Delta(t) = (f(\sigma(t)) - f(t)) / (\sigma(t) - t)$; 2) 当 f 是连续函数且在 t 点为右稠密的, 则 $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} (f(\sigma(t)) - f(s)) / (\sigma(t) - s) = \lim_{s \rightarrow t} (f(t) - f(s)) / (t - s)$ 。

定义 2 令 $p: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, p 是回归函数当且仅当 $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ 。令 \mathfrak{R} 为时标 \mathbb{T} 上所有右稠密连续

和回归函数构成的集合, 给出 \mathfrak{R}^+ 的定义是所有正回归元素构成的集合, 即 $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R}^+(\mathbb{T}, \mathbb{R}) = \{p \in \mathfrak{R} : 1 + \mu(t)p(t) > 0\}$, 对于所有的 $t \in \mathbb{T}$ 都成立。

定义 3 如果 $p \in \mathfrak{R}$, 那么在时标 \mathbb{T} 上的一般指数函数 $e_p(t, s)$, 有: $e_p(t, s) = \exp[\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau))\Delta\tau]$, 其中 $s, t \in \mathbb{T}$ 。其中柱面变换 $\xi_h(z)$ 定义如下: $\xi_h(z) = \begin{cases} \log(1 + hz)/h, & h \neq 0, \\ z, & h = 0. \end{cases}$ 其中 \log 为主对数函数。

引理 1 对于任意给定的时标 \mathbb{T} , 若 $y(t), f(t) \in C_{rd}$ 且 $p(t) \in \mathfrak{R}^+$, 则对于所有的 $t \in \mathbb{T}$, $y^\Delta = p(t)y + f(t), y(t_0) = y_0$ 的解为: $y(t) = e_p(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t e_p(t, \sigma(\tau))f(\tau)\Delta\tau$ 。

定义 4 如果存在 $p > 0$, 使得当 $t \in \mathbb{T}$ 时有 $t \pm p \in \mathbb{T}$, 那么时标 \mathbb{T} 就是周期的。最小的正数 p 就称为时标上的周期, 本文中所有时标上的周期都是无界的。

定义 5 令 $\mathbb{T} \neq \mathbb{R}$ 是周期为 p 的周期时标, 如果存在一个自然数 n , 使得 $f(t + \omega) = f(t)$ 中的 $\omega = np$ 对于所有的 $t \in \mathbb{T}$ 都成立, 且 ω 是 $f(t + \omega) = f(t)$ 中最小的数, 那么函数 $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 ω 的周期函数。当 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 时, 如果 $\omega > 0$ 是 $f(t + \omega) = f(t)$ 中最小的正数对于所有的 $t \in \mathbb{R}$ 都成立, 那么函数 f 是周期为 ω 的周期函数。

显而易见, 如果 \mathbb{T} 是周期为 p 的周期时标, 那么可以得到 $\sigma(t + np) = \sigma(t) + np$ 和 $\mu(t + np) = \sigma(t + np) - (t + np) = \sigma(t) + np - (t + np) = \mu(t)$, 所以 $\mu(t)$ 是周期为 p 的周期函数。

引理 2 如果 $p, q \in \mathfrak{R}$, 那么, 1) $e_p(\sigma(t), s) = (1 + \mu(t)p(t))e_p(t, s)$; 2) $e_p(t, s)e_p(s, r) = e_p(t, r)$; 3) $e_p(t, s) = 1/e_p(s, t) = e_{\ominus p}(s, t)$; 4) $(\Theta p)(t) := -p(t)/(1 + \mu(t)p(t))$ 。

注 1 当 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 时, $\beta_1(t) = \beta_2(t) \equiv 1, a_{11}(t) \equiv a_{11}, a_{12}(t) \equiv a_{12}, a_{21}(t) \equiv a_{21}, a_{22}(t) \equiv a_{22}, I_1(t) \equiv I_1, I_2(t) \equiv I_2$, 那么系统 (1) 就会简化成文献 [11] 中的一种情况。当 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ 时, 系统 (1) 就会简化成
$$\begin{cases} x_1(n+1) = (1 - \beta_1(n))x_1(n) + a_{11}(n)f(x_1(n)) + a_{12}(n)f(x_2(n)) + I_1(n), \\ x_2(n+1) = (1 - \beta_2(n))x_2(n) + a_{21}(n)f(x_1(n)) + a_{22}(n)f(x_2(n)) + I_2(n), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$ 。可见本文中的结果包含了连续和离散的情况, 更具一般性。

3 主要结果

首先由激活函数的定义, 给出了系统 (1) 有 N^2 个正不变集。

引理 3 若 $(H_3): \begin{cases} \beta_1(t)b_{i-1} - a_{11}(t)c_i + |a_{12}(t)| - I_1(t) < 0, \\ \beta_2(t)b_{i-1} - a_{22}(t)c_i + |a_{21}(t)| - I_2(t) < 0, \text{ 成立。对于任意的 } i = 1, 2, \dots, N, \\ 0 < 1 - \mu(t)\beta_k(t) < 1, k = 1, 2, \end{cases}$

那么系统 (1) 有 N^2 个正不变集。

证明 定义区间 $\Xi_{ij} = (b_{i-1}, b_i) \times (b_{j-1}, b_j)$ 。对于每一个 Ξ_{ij} 可以找到 $b_{i-1}^\dagger, b_i^\dagger, b_{j-1}^\dagger, b_j^\dagger, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, 有 $b_{i-1} < b_{i-1}^\dagger < b_i^\dagger < b_i, b_{j-1} < b_{j-1}^\dagger < b_j^\dagger < b_j$ 。

定义闭区间 $\Xi_{ij}^\dagger = [b_{i-1}^\dagger, b_i^\dagger] \times [b_{j-1}^\dagger, b_j^\dagger]$, 对于任意的 $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \Xi_{ij}$, 那么肯定存在一个闭集 Ξ_{ij}^\dagger 包含 $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ 。假设 $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ 不在闭集 Ξ_{ij}^\dagger 中, 那么存在时刻 $t > t_0$, $(x_1(t), x_2(t))$ 不在闭集 Ξ_{ij}^\dagger 中。即要么 $x_1(t)$ 不在 $[b_{i-1}^\dagger, b_i^\dagger]$ 中, 要么 $x_2(t)$ 不在 $[b_{j-1}^\dagger, b_j^\dagger]$ 中。如果 $x_1(t) < b_{i-1}^\dagger$, 那么存在第一个点 $t_1 \leq t$, 使得 $x_1(t_1) \geq b_{i-1}^\dagger$, 分下面两种情况进行讨论。

第一种情况: t_1 是右稠密连续的, 即 $t_1 = \sigma(t_1)$ 。得到 $x_1(t_1) = b_{i-1}^\dagger$ 和 $x_1^\Delta(t_1) < 0$ 。由式 (1) 和 (H_3) 得到: $x_1^\Delta(t_1) = -\beta_1(t_1)x_1(t_1) + a_{11}(t_1)f(x_1(t_1)) + a_{12}(t_1)f(x_2(t_1)) + I_1(t_1) = -\beta_1(t_1)b_{i-1}^\dagger + a_{11}(t_1)c_i + a_{12}(t_1)f(x_2(t_1)) + I_1(t_1) > -\beta_1(t_1)b_{i-1} + a_{11}(t_1)c_i - |a_{12}(t_1)| + I_1(t_1) > 0$, 和已知矛盾。

第二种情况: t_1 是右扩散的, 那么 $x_1(t_1) \geq b_{i-1}^+$, $x_1(\sigma(t_1)) < b_{i-1}^+$ 。由 (H_3) 和 $x_1(t_1) = x_1(\sigma(t_1)) - \mu(t_1)x_1^\Delta(t_1)$ 得到: $x_1^\Delta(t_1) = -\beta_1(t_1)x_1(\sigma(t_1)) + \mu(t_1)\beta_1(t_1)x_1^\Delta(t_1) + a_{11}(t_1)f(x_1(t_1)) + a_{12}(t_1)f(x_2(t_1)) + I_1(t_1)$, 从而, $x_1^\Delta(t_1) = -[\beta_1(t_1)x_1(\sigma(t_1)) - a_{11}(t_1)c_i - a_{12}(t_1)f(x_2(t_1)) - I_1(t_1)]/[1 - \mu(t_1)\beta_1(t_1)] > -[\beta_1(t_1)b_{i-1} - a_{11}(t_1)c_i + |a_{12}(t_1)| - I_1(t_1)]/[1 - \mu(t_1)\beta_1(t_1)] > 0$, 和已知条件矛盾, 可得 $x_1(t) \geq b_{i-1}^+$ 成立。类似地可得到 $x_1(t) \leq b_i^+$ 成立。从而可以证明 $x_2(t) \in [b_{j-1}^+, b_j^+]$ 。因此轨迹在 Ξ_{ij}^+ 中, 也在 Ξ_{ij} 中。引理 3 证毕。

引理 4 假设 $(H_1)-(H_3)$ 成立, 如果 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 在区间 Ξ_{ij} 中是系统 (1) 的 ω 周期解, 那么 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 可表示成 $x_k(t) = \int_t^{t+\omega} e_{\Theta(-\beta_k)}(s, t)/(1 - \beta_k(s)\mu(s)) [a_{k1}(s)c_i + a_{k2}(s)c_j + I_k(s)] \Delta s / [e_{\Theta(-\beta_k)}(\omega, 0) - 1]$, 其中 $t \in \mathbb{T}$ 和 $k = 1, 2$ 。

证明 设 $(x_1(t), x_2(t))^T$ 是系统 (1) 的 ω 周期解。系统 (1) 可以重写成 $x_k^\Delta(t) + \Theta(-\beta_k(t))x_k^\sigma(t) = (\sum_{m=1}^2 a_{km}(t)f(x_m(t)) + I_k(t))/(1 - \beta_k(t)\mu(t))$, 其中 $t \in \mathbb{T}$ 和 $k = 1, 2$ 。方程的两边同时乘上 $e_{\Theta(-\beta_k)}(t, 0)$, 得到 $(e_{\Theta(-\beta_k)}(t, 0)x_k(t))^\Delta = (\sum_{m=1}^2 a_{km}(t)f(x_m(t)) + I_k(t))e_{\Theta(-\beta_k)}(\sigma(t), 0)$ 。方程的两边从 t 到 $t + \omega$ 同时积分, 且由 $x_k(t) = x_k(t + \omega)$, 可得: $x_k(t) = \int_t^{t+\omega} [\sum_{m=1}^2 a_{km}(s)f(x_m(s)) + I_k(s)]e_{\Theta(-\beta_k)}(\sigma(s), 0) \Delta s / [(e_{\Theta(-\beta_k)}(t + \omega, 0) - e_{\Theta(-\beta_k)}(t, 0))] = \int_t^{t+\omega} [\sum_{m=1}^2 a_{km}(s)f(x_m(s)) + I_k(s)]e_{\Theta(-\beta_k)}(\sigma(s), t) \Delta s / [(e_{\Theta(-\beta_k)}(t + \omega, t) - 1)]$ 。使用公式 $e_{\Theta(-\beta_k)}(s, t)/(1 - \beta_k(s)\mu(s)) = e_{\Theta(-\beta_k)}(\sigma(s), t)$, $\beta_k(t) = \beta_k(t + \omega)$ 和 $\mu(t) = \mu(t + \omega)$ 可知: $x_k(t) = \int_t^{t+\omega} e_{\Theta(-\beta_k)}(s, t)/(1 - \beta_k(s)\mu(s)) [\sum_{m=1}^2 a_{km}(s)f(x_m(s)) + I_k(s)] \Delta s / (e_{\Theta(-\beta_k)}(\omega, 0) - 1)$, 其中 $t \in \mathbb{T}$ 和 $k = 1, 2$ 。由 $(x_1(t), x_2(t))^T \in \Xi_{ij}$ 易知结论成立, 引理 4 证毕。

定理 1 假设 $(H_1)-(H_3)$ 成立, 那么系统 (1) 有 N^2 个指数周期轨迹。

证明 由引理 3, 对于每一个 $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$, 如果 $(x_1(t_0), x_2(t_0)) \in \Xi_{ij}$, 那么一定存在一个闭集 $\Xi_{ij}^+ = [b_{i-1}^+, b_i^+] \times [b_{j-1}^+, b_j^+] \subset \Xi_{ij}$, 从初值 $(x_1(t_0), x_2(t_0))$ 出发的轨迹最终都会进入闭集 Ξ_{ij}^+ 中。系统 (1) 可以改写成:

$$\begin{cases} x_1^\Delta(t) = -\beta_1(t)x_1(t) + a_{11}(t)c_i + a_{12}(t)c_j + I_1(t), \\ x_2^\Delta(t) = -\beta_2(t)x_2(t) + a_{21}(t)c_i + a_{22}(t)c_j + I_2(t). \end{cases} \quad (3)$$

令 $x(t; t_0, \bar{x}_0)$ 和 $x(t; t_0, \bar{\bar{x}}_0)$ 是系统 (1) 的两个初始状态且初值条件是 $x(t_0, \bar{x}_0)$ 和 $x(t_0, \bar{\bar{x}}_0)$, 其中 $\bar{x}_0, \bar{\bar{x}}_0 \in \Xi_{ij}$, 那么可以找到一个闭集使得 $\bar{x}_0, \bar{\bar{x}}_0 \in \Xi_{ij}^+$ 。可以得到 $(x(t; t_0, \bar{x}_0) - x(t; t_0, \bar{\bar{x}}_0))^\Delta = -\beta(t)(x(t; t_0, \bar{x}_0) - x(t; t_0, \bar{\bar{x}}_0))$ 。

由引理 1, 得到 $x_k(t; t_0, \bar{x}_0) - x_k(t; t_0, \bar{\bar{x}}_0) = -e_{-\beta_k}(t; t_0)[\bar{x}_0 - \bar{\bar{x}}_0]_k$, 其中 $[\bar{x}_0 - \bar{\bar{x}}_0]_k = [\bar{x}_{0k} - \bar{\bar{x}}_{0k}]$, $k = 1, 2$ 。定义映射 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 其中 $T(\varphi) = x(t_0 + \omega; t_0, \varphi)$ 。那么 $T(\Xi_{ij}^+) \subset \Xi_{ij}^+$ 和 $T^m(\varphi) = x(t_0 + m\omega; t_0, \varphi)$ 可以找到一个正数 m , 使得 $e_{-\beta_k}(t_0 + m\omega, t_0) \leq \varepsilon < 1, k = 1, 2$ 。 $\|T^m(\bar{x}_0) - T^m(\bar{\bar{x}}_0)\| \leq \max\{e_{-\beta_1}(t_0 + m\omega, t_0), e_{-\beta_2}(t_0 + m\omega, t_0)\} \|\bar{x}_0 - \bar{\bar{x}}_0\| \leq \varepsilon \|\bar{x}_0 - \bar{\bar{x}}_0\|$ 。根据压缩映射原理, 存在一个不动点 $x^* \in \Xi_{ij}^+$ 使得 $T^m(x^*) = x^*$ 。显然 $x^* \in \Xi_{ij}$ 。另外 $T^m(T(x^*)) = T(T^m(x^*)) = T(x^*)$, 说明 $T(x^*)$ 也是一个不动点。由不动点的存在唯一性得 $T(x^*) = x^*$, 即 $x(t_0 + \omega; t_0, x^*) = x^*$, 让 $x(t; t_0, x^*)$ 是系统 (1) 的一个状态解, 初值条件是 (t_0, x^*) 。由式 (3) 得到, 对于任意的 $t > t_0$, $\begin{cases} x_1^\Delta(t; t_0, x^*) = -\beta_1(t)x_1(t; t_0, x^*) + a_{11}(t)c_i + a_{12}(t)c_j + I_1(t), \\ x_2^\Delta(t; t_0, x^*) = -\beta_2(t)x_2(t; t_0, x^*) + a_{21}(t)c_i + a_{22}(t)c_j + I_2(t). \end{cases}$ 且对于任意的 $t + \omega > t_0$, 有:

$\begin{cases} x_1^\Delta(t+\omega; t_0, x^*) = -\beta_1(t)x_1(t+\omega; t_0, x^*) + a_{11}(t)c_i + a_{12}(t)c_j + I_1(t), \\ x_2^\Delta(t+\omega; t_0, x^*) = -\beta_2(t)x_2(t+\omega; t_0, x^*) + a_{21}(t)c_i + a_{22}(t)c_j + I_2(t). \end{cases}$ 这说明 $x(t+\omega; t_0, x^*)$ 是系统 (1) 的一个状态解, 初值条件是 (t_0, x^*) 。对于任意的 $t > t_0$ $x(t+\omega; t_0, x^*) = x^*$, $x(t+\omega; t_0, x^*) = x(t; t_0+\omega, x^*) = x(t; t_0, x^*)$, $x(t; t_0, x^*)$ 是系统 (1) 的周期为 ω 的周期轨迹。当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 系统 (1) 的初值条件 (t_0, x^*) 指数收敛到周期轨迹。因此, $x(t; t_0, x^*)$ 在 Ξ_{ij} 中是局部指数稳定的周期轨迹。由 $(H_1)-(H_3)$ 可知系统 (1) 有 N^2 局部指数周期轨迹。定理 1 证毕。

当时标 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 时, 定理 1 包含了文献 [11] 的结果; 当 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ 时, 可得推论 1。

推论 1 如果 $\omega \in \mathbb{Z}$, (H_1) 、 (H_2) 和 $(H_3)'$:
$$\begin{cases} \beta_1(n)b_{i-1} - a_{11}(n)c_i + |a_{12}(n)| - I_1(n) < 0, \\ \beta_2(n)b_{i-1} - a_{22}(n)c_i + |a_{21}(n)| - I_2(n) < 0, \\ 0 < 1 - \beta_k(n) < 1, k = 1, 2, \end{cases}$$

成立。其中 $n \in \mathbb{Z}$, 那么系统 (2) 有 N^2 个指数周期轨迹。

4 模拟例子

例 1 当 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 时, 选择参数 $(I_1(t), I_2(t))^T = (0.07\sin(t), 0.08\cos(t))^T$, $a_{11}(t) = 0.95 + 0.002\sin(\pi t/3)$, $a_{12}(t) = -0.08 + 0.002\cos(\pi t/3)$, $a_{21}(t) = 0.02 - 0.001\cos(\pi t/3)$, $a_{22}(t) = 1.32 + 0.08\sin(\pi t/3)$, $\text{diag}\{\beta_1(t), \beta_2(t)\} = \{1 + 0.001\sin(\pi t/3), 1 + 0.001\cos(\pi t/3)\}$ 。

激活函数 $f(x)$ 是分段函数并分成三段:
$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < -3/4, \\ -1/2, & -3/4 \leq x < -1/4, \\ 1, & x \geq -1/4, \end{cases}$$

可以检验 $(H_1)-(H_3)$ 成立。由定理 1 知, 系统 (1) 有 9 个局部指数周期轨迹, 见图 1。

例 2 当 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ 时, 选择参数 $(I_1(t), I_2(t))^T = (0.07\sin(t), 0.05\cos(t))^T$, $\text{diag}\{\beta_1(t), \beta_2(t)\} = \{0.99 + 0.001\sin(\pi t/1400) + 0.003, 1 + 0.001\cos(\pi t/1400) + 0.002\}$, $a_{11}(t) = 0.95 + 0.002\sin(\pi t/1400)$, $a_{12}(t) = -0.08 + 0.003\cos(\pi t/1400)$, $a_{21}(t) = 0.02 - 0.002\cos(\pi t/1400)$, $a_{22}(t) = 1.32 + 0.08\sin(\pi t/1400)$ 。可以检验 $(H_1)-(H_3)$ 成立。由定理 1 知, 系统 (1) 有 9 个局部指数周期轨迹, 见图 2。

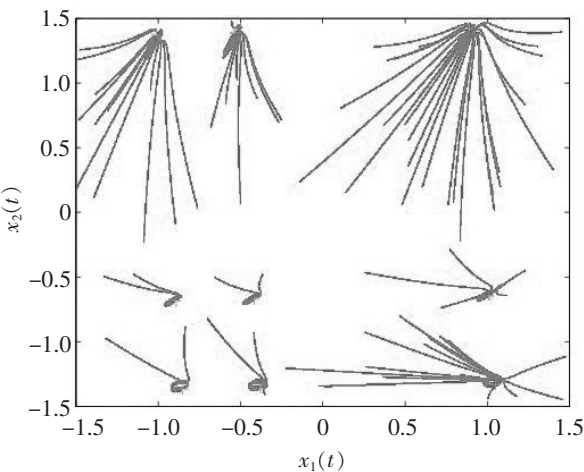


图 1 当 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ 时 $(x_1(t), x_2(t))$ 的轨迹

Fig.1 The trajectory of $(x_1(t), x_2(t))$ when $\mathbb{T} = \mathbb{R}$

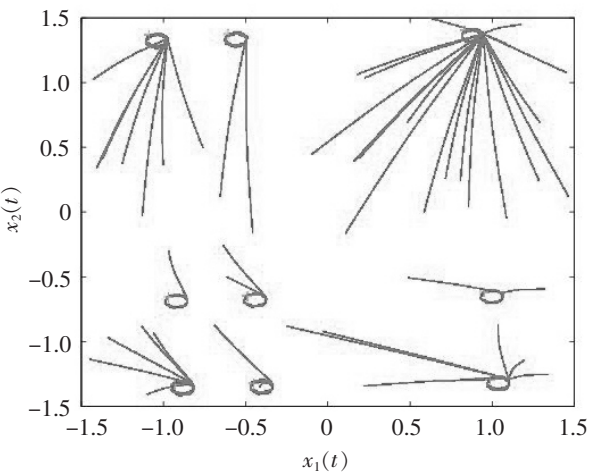


图 2 当 $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ 时 $(x_1(t), x_2(t))$ 的轨迹

Fig.2 The trajectory of $(x_1(t), x_2(t))$ when $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$

[参 考 文 献]

- [1] WANG F, SUN D, WU H Y. Global exponential stability and periodic solutions of high-order bidirectional associative memory (BAM) neural networks with time delays and impulses [J]. *Neurocomputing*, 2015, 155: 261-276. DOI:10.1016/j.neucom.2014.12.014.
- [2] LI H F, JIANG H J, HU C. Existence and global exponential stability of periodic solution of memristor-based BAM neural networks with time-varying delays [J]. *Neural Networks*, 2016, 75: 97-109. DOI:10.1016/j.neunet.2015.12.006.
- [3] ZENG Z G, WANG J. Multiperiodicity and exponential attractivity evoked by periodic external inputs in delayed cellular neural networks [J]. *Neural Computing*, 2006, 18: 848-870. DOI:10.1162/089976606775774624.
- [4] KANG H Y, FU X C, SUN Z L. Global exponential stability of periodic solutions for impulsive Cohen-Grossberg neural networks with delays [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39: 1526-1535. DOI:10.1016/j.apm.2014.09.015.
- [5] WANG D S, LUO D Z. Multiple periodic solutions of delayed competitive neural networks via functional differential inclusions [J]. *Neurocomputing*, 2015, 168: 777-789. DOI:10.1016/j.neucom.2015.05.046.
- [6] CAO J D, FENG G, WANG Y Y. Multistability and multiperiodicity of delayed Cohen-Grossberg neural networks with a general class of activation functions [J]. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 2008, 237(13):1734-1749. DOI:10.1016/j.physd.2008.01.012.
- [7] NIE X B, HUANG Z K. Multistability and multiperiodicity of high-order competitive neural networks with a general class of activation functions [J]. *Neurocomputing*, 2012, 82(4):1-13. DOI:10.1016/j.neucom.2011.09.032.
- [8] ZENG Z G, WANG J. Multiperiodicity of discrete-time delayed neural networks evoked by periodic external inputs [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2006, 17(5):1141-1151. DOI:10.1109/TNN.2006.877533.
- [9] YU J S, XIAO H F. Multiple periodic solutions with minimal period 4 of the delay differential equation $x'(t) = -f(t, x(t-1))$ [J]. *J Differential Equations*, 2013, 254: 2158-2172. DOI:10.1016/j.jde.2012.11.022.
- [10] HUANG Z K, MOMAHOD S, BIN H H. Multiperiodicity analysis and numerical simulation of discrete-time transiently chaotic non-autonomous neural networks with time-varying delays [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(5):1348-1357. DOI:10.1016/j.cnsns.2009.05.060.
- [11] HUANG G, CAO J D. Multistability of neural networks with discontinuous activation function [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13: 2279-2289. DOI:10.1016/j.cnsns.2007.07.005.
- [12] FORTI M. A note on neural networks with multiple equilibrium points [J]. *IEEE Trans Circuits Syst Part I*, 1996, 43: 487-491. DOI:10.1109/81.503261.
- [13] YI Z, TAN K K. Multistability of discrete-time recurrent neural networks with unsaturating piecewise linear activation functions [J]. *IEEE Trans Neural Network*, 2004, 15: 329-336. DOI:10.1109/TNN.2004.824272.
- [14] DU Y K, LI Y L, XU R. Multistability and multiperiodicity for a general class of delayed Cohen-Grossberg neural networks with discontinuous activation functions [J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2013(1): 66-67.
- [15] CHEN A P, CHEN F L. Periodic solution to BAM neural network with delays on time scales [J]. *Neurocomputing*, 2009, 73: 274-282. DOI:10.1016/j.neucom.2009.08.013.
- [16] LI Y K, CHEN X R, ZHAO L. Stability and existence of periodic solutions to delayed Cohen-Grossberg BAM neural networks with impulses on time scales [J]. *Neurocomputing*, 2009, 72: 1621-1630. DOI:10.1016/j.neucom.2008.08.010.
- [17] ZHANG Z Q, PENG G Q, ZHOU D M. Periodic solution to Cohen-Grossberg BAM neural networks with delays on time scales [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2011, 348: 2759-2781. DOI:10.1016/j.jfranklin.2011.08.015.
- [18] ZHANG F D. Periodic solutions for a Cauchy problem on time scales [J]. *Arab J Math Sci*, 2015, 21: 237-252. DOI:10.1016/j.ajmsc.2015.04.002.
- [19] ZHANG L, LI H X, ZHANG X B. Periodic solutions of competition Lotka-Volterra dynamic system on time scales [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2009, 57: 1204-1211. DOI:10.1016/j.camwa.2009.01.019.
- [20] ZHANG H T, LI Y K. Existence of positive periodic solutions for functional differential equations with impulse effects on time scales [J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14:19-26.

(责任编辑 马建华 英文审校 黄振坤)